Paweł Kliber[1]

Zmiany ciągłe i skokowe w procesach cen na wybranych giełdach papierów wartościowych

1. Wstęp

Nowoczesna teoria finansów, zwłaszcza jej część związana z analizą ryzyka, wyceną instrumentów pochodnych i analizą portfelową oparta jest na modelowaniu zmian cen za pomocą ciągłych procesów dyfuzji. To podejście do modelowania zostało zapoczątkowane w pracach F. Blacka i M. Scholesa[2] oraz R. Mertona, dotyczących wyceny opcji. Jednak już na początku rozwoju teorii ilościowej w finansach zauważono, że w wielu przypadkach o wiele lepszy opis dynamiki cen można uzyskać, uwzględniając „skoki" cen – sytuacje, gdy cena zmienia się gwałtownie, co matematycznie oznacza punkt nieciągłości trajektorii ceny. Pierwszym artykułem zwracającym uwagę na to zjawisko była praca R. Mertona[3], choć wcześniejsze uwagi można też znaleźć w pracy B. Mandelbrota[4].

W latach 90. XX w. i na początku XXI w. dostęp do danych wysokiej częstotliwości umożliwił badanie zmian cen aktywów w małej skali czasowej – zmiany kilkuminutowe lub kilkusekundowe, a nawet zmiany pomiędzy kolejnymi transakcjami. Dostęp do danych bardzo dużej częstotliwości – dotyczących kolejnych transakcji na rynkach – kazał dodatkowo zwrócić uwagę na tzw. szum mikrostruktury rynku, wiążący się z działalnością inwestorów słabo poinformowanych (ang. *noice traders*).

Badania dla rynku polskiego, dotyczące występowania, aktywności i częstotliwości skoków cen, zostały przedstawione np. w pracach M. Kostrzewskiego

---

[1] Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu, Wydział Informatyki i Gospodarki Elektronicznej.

[2] F. Black, M. Scholes, *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, „Journal of Political Economy" 1973, vol. 81, s. 637–654; R. Merton, *Theory of Rational Option Pricing*, „Bell Journal of Economics and Management" 1973, vol. 4, s. 141–183.

[3] R. Merton, *Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous*, „Journal of Financial Economics" 1976, vol. 3, s. 125–144.

[4] B. Mandelbrot, *The Variation of Certain Speculative Prices*, „Journal of Business" 1963, vol. 36, s. 394–419.

i P. Klibera[5]. W tej pracy zajęto się oszacowaniami dotyczącymi rynków finansowych o różnym stopniu dojrzałości, aby sprawdzić, jak poziom rozwoju rynku wpływa na udział różnych składowych w procesie zmienności cen.

W tym artykule rozważono ceny trzydziestu akcji notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie oraz cztery indeksy z tej giełdy. Dodatkowo, w celach porównawczych, uwzględniono dwie inne giełdy europejskie: Giełdę Papierów Wartościowych w Budapeszcie oraz Giełdę Papierów Wartościowych we Frankfurcie. W każdym przypadku uwzględniono akcje wchodzące w skład jednego z głównych indeksów giełdowych na badanym rynku: WIG30, BUX i DAX.

Praca składa się z sześciu części. Po wstępie przedstawiono modele opisujące procesy cen za pomocą dyfuzji i skoków. W części trzeciej podano informacje dotyczące statystycznego szacowania aktywności procesu skoków i szumu mikrostruktury oraz obecności skoków w procesach cen. Część czwarta zawiera opis zebranych danych. W części piątej przedstawiono wyniki oszacowań. Część szósta zawiera wnioski.

2. Modele dyfuzji ze skokami

Rozważamy proces ceny S_t pewnego aktywu – akcji lub indeksu giełdowego. Zakładamy, że za zmiany cen odpowiedzialne są dwa czynniki. Pierwszym z nich jest regularny napływ na rynek nowych informacji, które wpływają na wycenę, ale nie zmieniają jej w sposób znaczący. Informacje takie powodują systematyczne zmiany ceny akcji – odpowiadają za aktualny trend cenowy, a jednocześnie różnice w ich interpretacji przez inwestorów powodują powstawanie na rynku losowości. Istotne jest to, że wskutek napływu tych informacji cena zmienia się w sposób ciągły. Drugim czynnikiem są niespodziewane informacje powodujące nagłe duże zmiany cen. Zmiany takie określa się jako skoki cen.

Modele formalne, opisujące sytuację występowania tych dwóch rodzajów informacji, nazywa się modelami dyfuzji ze skokami. Przyjmujemy zatem, że logarytm naturalny procesu ceny $X_t = \ln S_t$ opisuje proces dyfuzji ze skokami, czyli dany jest on następującym stochastycznym równaniem różniczkowym:

[5] M. Kostrzewski, *On the Existence of Jumps in Financial Time Series*, „Acta Physica Polonica B" 2012, vol. 43, s. 2001–2019; P. Kliber, *Zastosowanie procesów dyfuzji ze skokami do modelowania polskiego rynku finansowego*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu, Poznań 2013.

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t + \Delta X_t \tag{1}$$

gdzie μ_t opisuje dryf (trend) cen akcji, a σ_t to chwilowa zmienności ciągłej części procesu. W_t to standardowy proces Wienera, a ΔX_t to nieciągły proces skoków o skończonej intensywności. Logarytm naturalny ceny w momencie t jest więc dany wzorem:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s + \sum_0^{N_t} \xi_i, \tag{2}$$

gdzie N_t jest pewnym procesem liczącym. Wartość N_t oznacza liczbę skoków do momentu t. Natomiast x_i to niezależne zmienne losowe o jednakowym rozkładzie, opisujące wielkość skoku ceny. Skok ΔX_t z równania (1) wynosi zatem x_i w momentach, w których wartość N_t wzrasta oraz $\Delta X_t = 0$ w momentach ciągłości procesu N_t.

Tego rodzaju modele dyfuzji ze skokami zostały wprowadzone przez Mertona[6], w kontekście wyceny opcji na akcję. Założono w nim, że proces N_t jest procesem Poissona o stałej intensywności, a skoki mają rozkład normalny. Inny popularny model tego typu z wykładniczym rozkładem skoków został zaproponowany przez S. Kou[7]. Modele tego typu proponowali także m.in. D.S. Bates; T.G. Andersen, L. Benzoni i J. Lund; M. Chernov i in.[8]. Systematyczną prezentację można znaleźć w książkach R. Conta i P. Tankova lub S.T. Racheva i in.[9].

W literaturze rozważa się też modele, w których przyjmuje się, że proces skoków ma nieskończoną aktywność. Przykładem mogą być modele oparte na procesach stabilnych i temperowanych rozkładach stabilnych, stosowane np. w pracach Nolana oraz Carra i in.[10] lub modele oparte na uogólnionych

---

[6] R. Merton, *Option Pricing…*, op. cit., s. 125–144.

[7] S. Kou, *A Jump-diffusion Model for Option Pricing*, „Management Science" 2002, vol. 48, s. 1086–1101.

[8] D.S. Bates, *Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit in Deutsche Mark Options*, „Review of Financial Studies" 1996, vol. 9, s. 69–107; T.G. Andersen, L. Benzoni, J. Lund, *An Empirical Investigation of Continuous-time Equity Return Models*, „Journal of Finance" 2002, vol. 57, s. 1239–1284; M. Chernov, A.R. Gallan, E. Ghysels, G. Tauchen, *Alternative Models of Stock Price Dynamics*, „Journal of Econometrics" 2003, vol. 116, s. 225–257.

[9] R. Cont, P. Tankov, *Financial Modelling with Jump Processes*, Chapman & Hall, London, New York 2004; S.T. Rachev, Y.S. Kim, M.L. Bianchi, F.J. Fabozzi, *Financial Models with Lévy Processes and Volatility Clustering*, Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey 2011.

[10] J. Nolan, *Stable Distributions*, Birkhauser, 2002; P. Carr, H. Geman, D. Madan, M. Yor, *Stochastic Volatility for Lévy Processes*, „Mathematical Finance" 2003, vol. 13, s. 345–382.

rozkładach hiperbolicznych (prace E. Eberleina i in. oraz K. Prause)[11]. W modelach tego rodzaju nie ma potrzeby uwzględniania procesu Wienera w opisie procesu logarytmu cen. Proces skoków o nieskończonej aktywności pozwala na opis zarówno małych, „prawie ciągłych" zmian, jak i skoków związanych z niespodziewanymi zmianami na rynku.

Za miarę zmienności, w przypadku cen opisanych procesami stochastycznymi z czasem ciągłym przyjmuje się wariację kwadratową[12], zdefiniowaną jako:

$$\left[X\right]_t = \lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\left(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}\right)^2. \tag{3}$$

W przypadku procesu dyfuzji ze skokami wariacja kwadratowa wynosi:

$$\left[X\right]_t = \int_0^t \sigma_s^2 ds + \sum_0^t \left(\Delta X_s\right)^2. \tag{4}$$

Całkowita zmienność procesu jest sumą dwóch składowych: zmienności części ciągłej (pierwszy składnik sumy) i zmienności skoków (drugi składnik). Szacując te składniki można wyznaczyć, jaki udział w procesie zmiany cen mają zmiany „naturalne", zachodzące w zwykłych warunkach rynkowych oraz jaki jest udział informacji nieoczekiwanych, wywołujących skoki cen.

3. Szacowanie zmienności i proces szumu mikrostruktury

Najpopularniejszym estymatorem wariacji kwadratowej procesu jest zmienność zrealizowana, wprowadzona w artykule Andersena i in.[13]. Zakładamy, że ceny obserwujemy w pewnych regularnie rozłożonych momentach: $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n$, gdzie $t_i - t_{i-1} = h$. Rozważamy logarytmiczne stopy zwrotu dla okresu próbko-

[11] E. Eberlein, U. Keller, K. Prause, *New Insights into Smile, Mispricing and Value at Risk: Hyperbolic Model*, „Journal of Business" 1998, vol. 71, s. 371–405; K. Prause, *The Generalized Hyperbolic Model: Estimation, Financial Derivatives, and Risk Measures*, praca doktorska, Uniwersytet we Freiburgu, Freiburg 1999.

[12] Patrz np. P.E. Potter, *Stochastic Integration and Differential Equations*, Springer.

[13] T.G. Andersen, T. Bollerslev, F.X. Diebold, P. Labys, *The Distribution of Realized Exchange Rate Volatility*, „Journal of the American Statistical Association" 2001, vol. 96, s. 42–55. Patrz także np. M. Doman, R. Doman, *Ekonometryczne modelowanie dynamiki polskiego rynku finansowego*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu, Poznań 2004.

wania h i oznaczmy je przez $r_i\left(h\right)=X_{t_i}-X_{t_{i-1}}$. Zmienność zrealizowana jest zdefiniowana jako:

$$RV\left(h\right)=\sum_{i=1}^{m}r_i\left(h\right)^2. \tag{5}$$

Można pokazać, że gdy okres próbkowania się zmniejsza ($h \to 0$), zmienność zrealizowana dąży do wariacji kwadratowej.

W praktyce ceny obserwowane są z pewnym zakłóceniem. Na giełdzie handlują też inwestorzy błędnie interpretujący informacje i podejmujący chaotyczne decyzje – tzw. *noice traders*. Zjawisko zakłóceń cen obserwowanych dla dużych częstotliwości określa się szumem mikrostruktury. Zakładamy zatem, że obserwowane logarytmy cen $X_{t_i}^*$ to ceny „prawdziwe”, X_{t_i} zmodyfikowane o „szum”:

$$X_{t_i}^*=X_{t_i}+\epsilon_i, \tag{6}$$

gdzie $\epsilon_1,\epsilon_2,\ldots,\epsilon_n$ to niezależne zmienne losowe o takim samym rozkładzie z zerową wartością oczekiwaną i wariancją równą σ_ε^2 niezależne od „prawdziwego” procesu cen, X_t. W takim przypadku obserwowane stopy zwrotu wynoszą:

$$r_i^*\left(h\right)=X_{t_i}^*-X_{t_{i-1}}^*=X_{t_i}-X_{t_{i-1}}+\epsilon_i-\epsilon_{i-1}=r_i\left(h\right)+\epsilon_i-\epsilon_{i-1} \tag{7}$$

i jak łatwo sprawdzić, autokowariancja pierwszego rzędu stóp zwrotu wynosi:

$$cov\left(r_i^*\left(h\right),r_{i-1}^*\left(h\right)\right)=-2\sigma_\epsilon^2<0. \tag{8}$$

Zatem w przypadku istnienia zakłóceń mikrostruktury spowodowanych przez *noice traders* szereg czasowy obserwowanych zwrotów wykazuje ujemną autokorelację rzędu pierwszego, a autokorelacja jest tym większa (co do wartości bezwzględnej), im większa jest aktywność „szumu”.

W artykule Zhana i in.[14] pokazano, że przy istnieniu tego zakłóceń danych wzorem (6) estymator $RV(h)$ jest obciążony, a dla dostatecznie dużej częstości próbkowania szacuje jedynie „szum”. W tym samym artykule zaproponowano inny estymator, który umożliwia poprawne oszacowanie zmienności. Jego konstrukcja polega na wyliczeniu zmienności zrealizowanej w dwóch skalach czasowych:

[14] L. Zhang, P. Mykland, Y. Aït-Sahalia, *A Tale of Two Time Scales*, „Journal of the American Statistical Association” 2005, vol. 100, s. 1394–1411.

o wyższej i niższej częstotliwości. W skali o krótszym okresie próbkowania h, wykorzystujemy wszystkie obserwacje i obliczamy $RV^{all} = RV(h)$ $RV^{all} = RV(h)$. Dłuższy okres próbkowania jest wielokrotnością krótszego: $h_1 = Kh$. W tej skali możemy wyliczyć K różnych zmienności zrealizowanych, $RV_1, \ldots, RV_K$, na podstawie podprób, w których wykorzystuje się co K-tą obserwację. W obliczaniu kolejnych zmienności zrealizowanych za moment początkowy przyjmuje się kolejno $t_0, t_1, \ldots, t_{K-1}$. Estymator oparty na dwóch skalach czasowych zdefiniowany jest wzorem:

$$RV^{tts} = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} RV_k - \frac{\bar{n}}{n} RV^{all}, \tag{9}$$

gdzie $\bar{n}$ jest średnią wielkością podpróby. Iloraz:

$$A^N = \frac{K\bar{n}RV^{all}}{n\sum_{k=1}^{K} RV_k} \tag{10}$$

przyjmuje się za oszacowanie udziału szumu w całkowitej zmienności cen.

Osobnym problemem jest podział zmienności na część zmienność ciągłej części procesu i zmienność skoków. Zgodnie z równaniem (4), oszacowanie otrzymane za pomocą estymatora opartego na dwóch skalach czasowych stanowi sumę tych dwóch składników. Do oszacowania zmienności ciągłej części procesu wykorzystuje się wprowadzoną w artykule O.E. Barndorffa-Nielsena i Shepharda[15] wariację dwupotęgową, zdefiniowaną jako:

$$BV(h) = \frac{\pi}{2}\sum_{2}^{n} \left|r_{i-1}(h)\right|\left|r_i(h)\right|. \tag{11}$$

Jak można pokazać, jest to zgodny estymator wariacji kwadratowej ciągłej części procesu (2), tj.

$$\lim_{h\to 0} BV(h) = \int_0^t \sigma_s^2 ds \tag{12}$$

Zgodnie ze wzorem (2), za oszacowanie zmienności wynikającej ze skoków można uznać:

$$\sum_0^t \left(\Delta X_s\right)^2 \approx RV^{tts} - BV(h). \tag{13}$$

---

[15] O.E. Barndorff-Nielsen, N. Shephard, *Power and Bipower Variation with Stochastic Volatility and Jumps*, „Journal of Financial Econometrics" 2004, vol. 2, s. 1–37.

4. Dane

Do obliczeń wykorzystano dane pochodzące z trzech rynków giełdowych: Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie (GPW), Giełdy Papierów Wartościowych w Budapeszcie (Budapest Stock Exchange, BSE) oraz Giełdy Papierów Wartościowych we Frakfurcie (Frankfurter Wertpapierbörse, FWB). We wszystkich przypadkach wzięto do analizy spółki wchodzące w skład ważnych indeksów wyznaczanych na tych giełdach. W przypadku Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie był to indeks WIG30, w przypadku Giełdy Papierów Wartościowych w Budapeszcie – indeks BUX. Dla Giełdy Papierów Wartościowych we Frankfurcie wzięto do analizy spółki wchodzące w skład indeksu DAX. Oprócz tego badaniu poddano indeksy notowane na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie: indeks WIG oraz indeksy WIG20, sWIG40 i mWIG80.

W obliczeniach posłużono się 5-minutowymi notowaniami badanych instrumentów, pobranymi z serwisu stooq.pl. Dane obejmowały okres od 16 maja 2016 r. do 31 marca 2018 r. W tabeli 1 zawarto podstawowe informacje na temat 5-minutowych zwrotów dla badanych instrumentów z rynków GPW, FWB i BSE oraz dla indeksów z GPW[16].

Jak można zauważyć, średni zwrot jest bardzo bliski zera, co pozwala założyć, że w równaniu (1) nie występuje dryf ($\mu = 0$). Stopy zwrotu charakteryzują się wysoką kurtozą (w tabeli podano wartości kurtozy nadwyżkowej). Ostatnia kolumna tabeli 1 zawiera współczynnik autokorelacji pierwszego rzędu badanych szeregów czasowych. Jak można zauważyć, średnia wartość tego współczynnika jest ujemna na każdej z badanych giełd. Współczynnik autokorelacji jest ujemny dla większości badanych przypadków (65 na 74 badanych instrumentów, tj. 88%), co zgodnie ze wzorem (8) oznacza istnienie „szumu" mikrostruktury powodowanego przez niepoinformowanych inwestorów. Odsetek przypadków, w których współczynnik autokorelacji jest ujemny, jest największy dla BSE (13 z 14 instrumentów, czyli 93%), a najmniejszy dla FWB (22 z 26 instrumentów, czyli 85%). Dla GPW współczynnik ten jest ujemny dla 30 z ogólnej liczby 34 badanych instrumentów (85%). Sugeruje to, że występowanie „szumu" jest związane z dojrzałością i płynnością rynku: występuje rzadziej na rynkach bardziej rozwiniętych.

---

[16] Z powodu braku miejsca w tabeli zamieszczono jedynie wartości średnie dla każdego rynku. Statystyki dla każdego badanego instrumentu są dostępne u autora artykułu.

Tabela 1. Podstawowe charakterystyki stóp zwrotu badanych instrumentów

Symbol	Min.	Max	Średnia	Odch. std.	Skośność	Kurtoza	AR1
GPW	–0,0464	0,0399	0,0000	0,0025	–0,5377	50,6317	–0,1137
MWIG40	–0,0162	0,0105	0,0000	0,0006	–0,3752	34,6998	–0,0262
SWIG80	–0,0076	0,0071	0,0000	0,0005	0,4512	16,9477	0,0132
WIG	–0,0056	0,0109	0,0000	0,0006	0,4278	10,6298	0,0354
WIG20	–0,0071	0,0134	0,0000	0,0008	0,3095	10,2187	0,0200
FWB	–0,0489	0,0489	0,0000	0,0029	–0,6240	46,9915	–0,0370
BSE	–0,0997	0,0954	0,0000	0,0058	–1,9057	88,2107	–0,0685

Źródło: obliczenia własne.

5. Wyniki oszacowań

Dla każdego uwzględnionego w analizie instrumentu przeprowadzono oszacowania dotyczące udziału szumu mikrostruktury w procesie zmian cen oraz podziału całkowitej zmienności pomiędzy część związaną z regularnymi (ciągłymi) zmianami i zmianami skokowymi. W pierwszej części badania dokonano podziału całkowitej zmienności cen w całym badanym okresie pomiędzy trzy komponenty składowe: szum mikrostruktury, zmiany regularne (ciągłe) oraz skoki. Podziału dokonano, wykorzystując oszacowania wariancji zrealizowanej w jednej i dwóch skalach czasowych oraz biwariacji dwupotęgowej. Wyniki (wartości średnie dla każdego rynku) przedstawiono w tabeli 2.

Tabela 2. Średni udział szumu mikrostruktury, części ciągłej i skokowej w ogólnej zmienności procesu cen badanych instrumentów

Symbol	Szum	Zmiany ciągłe	Zmiany skokowe
GPW	5,41%	63,44%	31,15%
MWIG40	4,80%	79,90%	15,31%
SWIG80	4,52%	79,69%	15,79%
WIG	4,62%	88,41%	6,98%
WIG30	4,70%	88,14%	7,16%
FWB	4,84%	87,15%	8,01%
BSE	5,08%	24,15%	70,77%

Źródło: obliczenia własne.

Jak widać w tabeli 2, poziom szumu w procesach cen na wszystkich badanych rynkach jest mniej więcej na podobnym poziomie: od 4 do 6%. W rzeczywistości zróżnicowanie poziomu szumu dla poszczególnych instrumentów było bardzo niskie. Otrzymane wartości były w każdym przypadku bardzo zbliżone do średniej dla danego rynku.

W następnej kolejności zbadano aktywność skoków w każdym dniu sesyjnym. Zastosowano w tym celu procedurę zaproponowaną w publikacji T. Ané i C. Métaisa[17]. Dla każdego dnia sesyjnego przeprowadzono test logarytmiczną wersję testu obecności skoków O.E. Barndorffa-Nielsena i N. Shepharda[18]. W przypadku wykrycia skoku w danym dniu sesyjnym przyjęto, że moment skoku przypada w chwili, gdy wartość bezwzględna obserwowanej stopy zwrotu jest największa. Następnie usunięto tę obserwację z próby i powtarzano test. Procedura była powtarzana tak długo, aż test nie wykazał obecności skoków. Wyniki oszacowań przedstawiono w tabeli 3, w której zamieszczono średnią liczbę skoków w ciągu dnia sesyjnego, odsetek dni sesyjnych bez skoków oraz odsetek dni z, odpowiednio, jednym, dwoma, trzema i więcej niż trzema skokami. Jak można zauważyć, średnia liczba skoków jest większa w przypadku akcji pojedynczych spółek (GPW) niż w przypadku indeksów giełdowych. W tym drugim przypadku znacznie większa jest też liczba dni, w których nie wystąpiły żadne skoki.

Tabela 3. Oszacowania średniej liczby skoków w ciągu dnia oraz odsetek dni bez skoków i z określoną liczbą skoków

Symbol	Średnia liczba skoków	0 skoków	1 skok	2 skoki	3 skoki	4 i więcej skoków
GPW	12,2	26%	12%	6%	5%	51%
MWIG40	1,8	48%	19%	9%	6%	18%
SWIG80	1,9	41%	20%	14%	9%	16%
WIG	1,5	52%	20%	10%	3%	14%
WIG30	1,7	48%	25%	3%	6%	18%
FWB	2,4	49%	17%	8%	5%	21%
BSE	3,0	47%	10%	9%	5%	28%

Źródło: obliczenia własne.

17 T. Ané, C. Métais, *Jump Distribution Characteristic: Evidence from European Stock Markets*, „International Journal of Business and Economics" 2010, vol. 9, s. 1–22.

18 O.E. Barndorff-Nielsen, N. Shephard, *Econometrics of Testing for Jumps in Financial Economics Using Bipower Variation*, „Journal of Financial Econometrics" 2006, vol. 4, s. 1–30.

6. Podsumowanie i kierunki dalszych badań

W artykule podjęto próbę podziału zmienności cen instrumentów notowanych na trzech giełdach (GPW, BSE i FWB) na część związaną z szumem mikrostruktury, na zmiany regularne i zmiany skokowe. Każdy z tych rynków charakteryzuje się innym poziomem rozwoju i płynności. Najbardziej rozwinięta jest giełda we Frankfurcie, a za najmniej rozwiniętą i płynną uważa się giełdę w Bukareszcie. Dla każdego rynku wyznaczono oszacowania udziału aktywności szumu mikrostruktury oraz skoków, a także estymacje liczby skoków w kolejnych dniach sesyjnych.

Wyniki pokazują, że pod względem szumu mikrostruktury rynki te niewiele się różnią. Na każdym z nich szum odpowiada za od 4 do 6% ogólnej zmienności cen. Różnice występują natomiast w aktywności skoków. Największy udział skoków w zmienności cen zachodzi na najmniej rozwiniętym rynku (Bukareszt), a najmniejszy – na rynku najbardziej dojrzałym (Frankfurt).

Otrzymane wyniki pokazują, że udział gwałtownych zmian cen (skoków) w ogólnej zmienności procesu cen jest związany z poziomem rozwoju rynku. Inne badania[19] sugerują, że zarówno szum mikrostruktury, jak i zmiany „skokowe" są ujemnie skorelowane z płynnością instrumentu. Możliwym kierunkiem dalszych badań jest sprawdzenie tej hipotezy dla rynków o różnym poziomie rozwoju.

Bibliografia

Andersen T.G., Benzoni L., Lund J., *An Empirical Investigation of Continuous-time Equity Return Models*, „Journal of Finance" 2002, vol. 57, s. 1239–1284.

Andersen T.G., Bollerslev T., Diebold F.X., Labys P., *The Distribution of Realized Exchange Rate Volatility*, „Journal of the American Statistical Association" 2001, vol. 96, s. 42–55.

Ané T., Métais C., *Jump Distribution Characteristic: Evidence from European Stock Markets*, „International Journal of Business and Economics" 2010, vol. 9, s. 1–22.

Barndorff-Nielsen O.E., Shephard N., *Power and Bipower Variation with Stochastic Volatility and Jumps*, „Journal of Financial Econometrics" 2004, vol. 2, s. 1–37.

Barndorff-Nielsen O.E., Shephard N., *Econometrics of Testing for Jumps in Financial Economics Using Bipower Variation*, „Journal of Financial Econometrics" 2006, vol. 4, s. 1–30.

19 Patrz P. Kliber, op. cit.

Bates D.S., *Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit in Deutsche Mark Options*, „Review of Financial Studies" 1996, vol. 9, s. 69–107.

Black F., Scholes M., *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, „Journal of Political Economy" 1973, vol. 81, s. 637–654.

Carr P., Geman H., Madan D., Yor M., *Stochastic Volatility for Lévy Processes*, „Mathematical Finance" 2003, vol. 13, s. 345–382.

Chernov M., Gallan A.R., Ghysels E., Tauchen G., *Alternative Models of Stock Price Dynamics*, „Journal of Econometrics" 2003, vol. 116, s. 225–257.

Cont R., Tankov P., *Financial Modelling with Jump Processes*, Chapman & Hall, London, New York 2004.

Doman M., Doman R., *Ekonometryczne modelowanie dynamiki polskiego rynku finansowego*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu, Poznań 2004.

Eberlein E., Keller U., Prause K., *New Insights into Smile, Mispricing and Value at Risk: Hyperbolic Model*, „Journal of Business" 1998, vol. 71, s. 371–405.

Kallsen J., *Optimal Portfolios for Exponential Lévy Processes*, „Mathematical Methods of Operations Research" 2000, vol. 51, s. 357–374.

Kliber P., *Zastosowanie procesów dyfuzji ze skokami do modelowania polskiego rynku finansowego*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu, Poznań 2013.

Kostrzewski M., *On the Existence of Jumps in Financial Time Series*, „Acta Physica Polonica B" 2012, vol. 43, s. 2001–2019.

Kou S., *A Jump-diffusion Model for Option Pricing*, „Management Science" 2002, vol. 48, s. 1086–1101.

Mandelbrot B., *The Variation of Certain Speculative Prices*, „Journal of Business" 1963, vol. 36, s. 394–419.

Merton R., *Theory of Rational Option Pricing*, „Bell Journal of Economics and Management" 1973, vol. 4, s. 141–183.

Merton R., *Option Pricing when Underlyning Stock Returns are Discontinuous*, „Journal of Financial Economics" 1976, vol. 3, s. 125–144.

Nolan J., *Stable Distributions*, Birkhauser, 2002.

Potter P.E., *Stochastic Integration and Differential Equations*, Springer.

Prause K., *The Generalized Hyperbolic Model: Estimation, Financial Derivatives, and Risk Measures*, praca doktorska, Uniwersytet we Freiburgu, 1999.

Rachev S.T., Kim Y.S., Bianchi M.L., Fabozzi F.J., *Financial Models with Lévy Processes and Volatility Clustering*, Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey 2011.

Zhang L., Mykland P., Aït-Sahalia Y., *A Tale of Two Time Scales*, „Journal of the American Statistical Association" 2005, vol. 100, s. 1394–1411.

* * *

Continuous and jump changes in prices processes in the selected stock markets

Abstract

In classical models of asset price dynamics, it is assumed that price changes can be described by continuous diffusion processes. In such models it is assumed that price changes in the short term are regular and predictable. Alternative models of price dynamics allow the possibility of rapid price changes (“price jumps”) resulting from occurences of unforeseen information. Thus, the price dynamics can be divided into three components: the regular part (diffusion), jumps (large price changes related to unforeseen information) and “noice” generated by short-term, uninformed investors (noice traders). In the study, we divide the total volatility of asset prices (stocks and indices) from the three markets with different levels of development: WSE, BSE and FWB (i.e. the stock exchanges in Warsaw, Budapest and Frankfurt) into these three factors. We argue that the share of jumps in the variation of price movements is connected with the development of the market.

Keywords: jump-diffusion models, realized variation, bipower variation, mictro-structure noice, noice traders