

MICHAŁ BERNARDELLI¹, MARIUSZ PRÓCHNIAK²,
BARTOSZ WITKOWSKI³

Przydatność ukrytych modeli Markowa do oceny podobieństwa krajów w zakresie synchronizacji wahań cyklicznych i wyrównywania się poziomów dochodu

Streszczenie

W analizie zastosowano ukryte modele Markowa i ścieżki Viterbiego do oceny podobieństwa Polski w stosunku do pozostałych 27 krajów UE, biorąc pod uwagę 12 zmiennych makroekonomicznych. Wykorzystano m.in. poziom PKB *per capita* wg PSN oraz stopę wzrostu realnego PKB ogółem do oceny stopnia konwergencji cyklicznej oraz stopnia wyrównywania się poziomów dochodu. Jednym z elementów świadczących o nowości i oryginalności niniejszego badania jest uwzględnienie średnich ważonych, za pomocą których dokonano agregacji poszczególnych stanów ze ścieżek Viterbiego, co daje bardziej miarodajne pod względem ekonomicznym wyniki niż uśrednianie z wykorzystaniem średniej arytmetycznej. Badanie potwierdziło m.in. występowanie dywergencji gospodarczej w okresie globalnego kryzysu oraz silną konwergencję nominalną stóp inflacji między Polską a grupą UE-27.

Słowa kluczowe: konwergencja, zbieżność, ukryte modele Markowa, Unia Europejska, ścieżka Viterbiego

JEL: C61, E32, O47, O52

1. Wstęp

Zgodnie z hipotezą konwergencji, kraje słabiej rozwinięte wykazują szybsze tempo wzrostu gospodarczego niż kraje na wyższym poziomie rozwoju, dzięki czemu następuje zrównanie poziomów dochodu między krajami. W literaturze istnieje wiele definicji realnej konwergencji gospodarczej, a na przestrzeni

¹ Szkoła Główna Handlowa w Warszawie, Kolegium Analiz Ekonomicznych.

² Szkoła Główna Handlowa w Warszawie, Kolegium Gospodarki Światowej.

³ Szkoła Główna Handlowa w Warszawie, Kolegium Analiz Ekonomicznych.

lat opracowano wiele metod badania tego zjawiska. W literaturze przeważają metody wykorzystujące modelowanie ekonometryczne, ale są też stosowane alternatywne podejścia. Jednym z nich są ukryte modele Markowa (*hidden Markov models* – HMM), które stanowią podstawowe narzędzie wykorzystane w tym badaniu.

Podstawą niniejszej analizy była praca, w której wykorzystano nieklasyczne modele Markowa do badania konwergencji cyklicznej i dochodowej dla 28 krajów Unii Europejskiej⁴. W pracy tej autorzy opisali procedurę opartą na połączeniu koncepcji ścieżek Viterbiego, symulacji Monte Carlo z HMM, co daje możliwość oceny charakteru i tempa konwergencji w Europie (nie tylko w stosunku do zmiennych mierzących poziom dochodu i produkcji, ale także do wielu innych zmiennych makroekonomicznych). Podejście to zostało zastosowane m.in. w odniesieniu do szeregów czasowych PKB, a wyniki pozwoliły zweryfikować zgodność cykli koniunkturalnych między różnymi gospodarkami, jak również siłę wyrównywania się poziomów dochodu między krajami Unii Europejskiej (UE). W badaniu użyto danych panelowych, przy czym każdy z krajów był uwzględniany z jednakową wagą bez względu na wielkość gospodarki.

Niniejszy artykuł stanowi rozwinięcie analizy zapoczątkowanej wcześniej i pozwala m.in. zweryfikować odporność wyników na przyjęte założenia. W badaniu podjęto próbę znalezienia odpowiedzi na pytanie o podobieństwo gospodarki Polski do gospodarek krajów UE w okresie 1995–2016, ale z uwzględnieniem wielkości gospodarek poszczególnych państw. W tym celu wykorzystano uogólnienie procedury badawczej, polegające na wprowadzeniu wag przy uśrednianiu stanów łańcuchów ukrytych modeli Markowa. Analizę przeprowadzono dla wag proporcjonalnych do liczby mieszkańców poszczególnych państw.

Badanie obejmuje identyfikację punktów zwrotnych w szeregach związanych z 12 zmiennymi makroekonomicznymi dla panelu państw UE, a następnie agregację uzyskanych stanów ścieżek Viterbiego zgodnie ze zmodyfikowaną procedurą badania konwergencji. Wyniki pokazują w pewnych aspektach dużą odporność na metodę agregacji danych, jednak w niektórych kwestiach uzyskane wnioski są odmienne. Zostało potwierdzone m.in. realne podobieństwo Polski do pozostałych krajów UE w kategoriach poziomów PKB *per capita* wg PSN oraz stóp wzrostu PKB, z krótkim okresem dywergencji podczas globalnego kryzysu. Zaobserwowano natomiast różnice, częściowo znaczące, w tempie konwergencji w stosunku do badania z jednakowymi wagami.

⁴ M. Bernardelli, M. Próchniak, B. Witkowski, *The Application of Hidden Markov Models to the Analysis of Real Convergence*, „Dynamic Econometric Models” 2017, vol. 17, s. 59–80.

Zastosowanie metody HMM i ścieżki Viterbiego do analizy konwergencji jest istotną wartością niniejszego badania. Może być jednocześnie traktowane jako przyczynek do rozwoju teorii ekonomii.

Artykuł składa się z pięciu punktów. Po niniejszym wprowadzeniu przedstawiono krótki opis teorii realnej konwergencji, metod jej badania oraz wyników analiz empirycznych na podstawie przeglądu literatury. Trzeci punkt zawiera charakterystykę wykorzystanych danych. W punkcie czwartym przedstawiono opis zmodyfikowanej procedury badawczej, w tym ukrytych modeli Markowa i ścieżek Viterbiego, a także uzyskane na tej podstawie wyniki analizy empirycznej dla Polski. Ostatni punkt zawiera podsumowanie oraz wskazanie możliwości dalszych prac nad tym zagadnieniem.

2. Realna konwergencja

W literaturze poświęconej badaniom nad konwergencją można spotkać różne sposoby jej definiowania, a także wiele metod jej weryfikacji⁵. W dużym uproszczeniu należy stwierdzić, że wyróżniamy dwa typy zbieżności – konwergencję nominalną oraz realną. Przez konwergencję nominalną rozumiemy tendencję do wyrównywania się między krajami poziomu zmiennych nominalnych, takich jak ceny, stopy procentowe lub kursy walutowe. Termin „konwergencja realna” odnosi się natomiast do zmiennych realnych (przede wszystkim wielkości produkcji) i może wskazywać na zbieżność cykliczną lub dochodową. Konwergencja cykliczna oznacza tendencję do wyrównywania się cykli koniunkturalnych między gospodarkami. Można to rozumieć w kategoriach zarówno synchronizacji występowania górnych i dolnych punktów zwrotnych cyklu koniunkturalnego lub cyklu wzrostowego⁶, jak i wyrównywania się amplitudy wahań wielkości produkcji. Z kolei konwergencja dochodowa oznacza wyrównywanie się poziomów PKB na mieszkańca.

⁵ Np. N. Islam, *What Have We Learnt from the Convergence Debate?*, „Journal of Economic Surveys” 2003, vol. 17, s. 309–362.

⁶ Termin „cykl wzrostowy” (*growth cycle*) został spopularyzowany przez V. Zarnowitza. Z cyklem wzrostowym mamy do czynienia wówczas, gdy faza ekspansji oznacza przyspieszenie tempa wzrostu gospodarczego, w fazie spowolnienia zaś następuje obniżenie tempa wzrostu (w przeciwieństwie do klasycznego cyklu koniunkturalnego, gdy recesja oznacza spadek poziomu PKB). Zob. np. V. Zarnowitz, A. Ozyildirim, *Time Series Decomposition and Measurement of Business Cycles, Trends and Growth Cycles*, „Journal of Monetary Economics” 2006, vol. 53, s. 1717–1739.

Wyróżnia się dwa główne rodzaje zbieżności poziomów dochodu – zbieżność β i σ . Zbieżność β występuje, gdy kraje słabiej rozwinięte wykazują szybsze tempo wzrostu gospodarczego niż kraje wyżej rozwinięte, zbieżność σ oznacza zaś zmniejszanie się zróżnicowania poziomów dochodu *per capita* między krajami, mierzonego np. odchyleniem standardowym logarytmów naturalnych PKB na mieszkańca. Mimo że oba typy konwergencji dochodowej dotyczą, ogólnie rzecz biorąc, zmniejszania się różnic dochodowych, wymagają jednak różnych metod ilościowych i analizuje się je oddzielnie (tym bardziej że – przynajmniej w teorii – nie muszą występować jednocześnie).

Jedno z pierwszych ogólnych podejść do analizy konwergencji zostało przedstawione przez X. Sala-i-Martina w pracy doktorskiej z 1990 r.⁷ i następnie spopularyzowane w wielu pracach autorstwa R. Barro i X. Sala-i-Martina⁸. W literaturze można znaleźć liczne prace teoretyczne i empiryczne z zakresu zbieżności dochodowej. Artykuł M. Bernardellego i in.⁹ zawiera przegląd różnych podejść teoretycznych do badania zjawiska konwergencji, z nakreśleniem ich mocnych i słabych stron. Z kolei w pracy Z. Matkowskiego i in.¹⁰ przedstawiono przegląd badań empirycznych nad realną konwergencją w UE. Z bardziej złożonych metod ekonometrycznych stosowanych do analizy konwergencji typu β warto wymienić modelowanie z wykorzystaniem uśredniania bayesowskiego, gdzie autorzy szacują wszystkie możliwe kombinacje równań regresji dla przyjętego wstępnie szerokiego zestawu zmiennych objaśniających. Podejście takie pozwala na uzyskanie wyników odpornych na dobór czynników kontrolnych do modelu i bardziej wiarygodnej wartości współczynnika szybkości zbieżności¹¹.

Większość badań empirycznych wskazuje na występowanie konwergencji dochodowej w Europie, w tym zwłaszcza między nowymi i starymi członkami UE. Oznacza to, że dystans między krajami Europy Środkowo-Wschodniej, w tym Polski, a Europą Zachodnią uległ zmniejszeniu, niemniej różnice w poziomach

⁷ X. Sala-i-Martin, *On Growth and States*, rozprawa doktorska, Harvard University, 1990.

⁸ R. Barro, X. Sala-i-Martin, *Economic Growth*, The MIT Press, Cambridge–London 2003.

⁹ M. Bernardelli, M. Próchniak, B. Witkowski, *Konwergencja dochodowa: mocne i słabe strony istniejących podejść*, „Kwartalnik Kolegium Ekonomiczno-Społecznego. Studia i Prace” 2017, nr 3(31), s. 71–86.

¹⁰ Z. Matkowski, M. Próchniak, R. Rapacki, *Real Income Convergence between Central Eastern and Western Europe: Past, Present, and Prospects*, „Ekonomista” 2016, nr 6, s. 853–892.

¹¹ M. Próchniak, B. Witkowski, *Konwergencja gospodarcza typu β w świetle bayesowskiego uśredniania oszacowań*, „Bank i Kredyt” 2012, nr 43(2), s. 25–58; M. Bernardelli, M. Próchniak, B. Witkowski, *Cycle and Income-Level Convergence in the EU Countries: An Identification of Turning Points Based on the Hidden Markov Models*, „Roczniki” Kolegium Analiz Ekonomicznych 2017, nr 47, s. 27–42

dochodu są ciągle bardzo duże¹². Wyniki badań empirycznych różnią się jednak szacunkiem tempa konwergencji oraz stabilnością tego zjawiska w czasie. Odmienne wnioski wynikają z: różnych metod weryfikacji hipotez badawczych, wielości zmiennych objaśniających używanych w równaniach regresji, stosowania w tych równaniach rozmaitych estymatorów oraz różnej długości szeregów czasowych i różnych grup krajów. Oznacza to, że nadal jest miejsce na nowe badania empiryczne w tym zakresie, uwzględniające m.in. nowe metody badawcze, które pozwolą wyciągnąć nowe wnioski odnośnie do zjawiska zbieżności.

3. Charakterystyka danych

Do oceny konwergencji krajów UE wykorzystano 12 zmiennych makroekonomicznych. Są to te same zmienne, które zostały użyte we wcześniejszym badaniu¹³. Dzięki temu możliwe jest porównanie wyników empirycznych uzyskanych przy wykorzystaniu procedury przed modyfikacją uwzględniającą siłę (wielkość) gospodarek poszczególnych państw i po tej modyfikacji.

Zmienne wykorzystane w badaniu są następujące:

- a) PKB na mieszkańca według parytetu siły nabywczej (PSN, w cenach stałych 2011 r.) [gdppc_ppp],
- b) tempo wzrostu realnego PKB ogółem (w %) [g_gdp],
- c) stopa inflacji CPI (w %) [inf],
- d) stopa bezrobocia (w %) [une],
- e) wydatki konsumpcyjne gospodarstw domowych (w cenach stałych z 2010 r. w USD) [cons_usd],
- f) stopa wzrostu wydatków konsumpcyjnych gospodarstw domowych (w %) [cons_g],
- g) wydatki konsumpcyjne państwa (w cenach stałych z 2010 r. w USD) [gov_usd],
- h) stopa wzrostu wydatków konsumpcyjnych państwa (w %) [gov_g],
- i) saldo handlu zagranicznego (w USD) [nx_usd],
- j) saldo handlu zagranicznego (jako % PKB) [nx_gdp],

¹² Z. Matkowski, M. Próchniak, R. Rapacki, *Income Convergence in Poland vis-à-vis the EU: Major Trends and Prospects*, w: *Poland. Competitiveness Report 2016. The Role of Economic Policy and Institutions*, red. M.A. Weresa, World Economy Research Institute, SGH Warsaw School of Economics, Warsaw 2016, s. 37–55.

¹³ M. Bernardelli, M. Próchniak, B. Witkowski, *The Application of Hidden Markov...*, op.cit.

- k) wolumen kredytów krajowych udzielonych przez sektor finansowy (jako % PKB) [*cred_byfin*],
- l) wolumen zagrożonych kredytów bankowych (jako % ogółu kredytów brutto) [*nonp_loans*].

Wymienione zmienne pochodzą z baz danych Międzynarodowego Funduszu Walutowego (World Economic Outlook) i Banku Światowego (World Development Indicators).

Z punktu widzenia weryfikacji wyrównywania się poziomów dochodu i synchronizacji wahań cyklicznych najważniejsze są dwie pierwsze zmienne, tj. poziom PKB *per capita* wg PSN oraz stopa wzrostu realnego PKB ogółem. Wyniki uzyskane dla tych dwóch zmiennych pozwalają *explicite* zweryfikować występowanie zjawiska realnej konwergencji. Ujęcie takie pozwala na jednoczesną analizę zarówno zbieżności cyklicznej, jak i zbieżności dochodowej przy wykorzystaniu ukrytych modeli Markowa.

W analizie uwzględniono także szereg innych zmiennych do oceny stopnia zbieżności gospodarek. Są to zmienne realne oraz nominalne, które pozwalają na ocenę przydatności zaimplementowanego algorytmu w postaci ukrytych modeli Markowa i ścieżki Viterbiego do oceny podobieństwa krajów. Inflacja i bezrobocie to ważne zmienne w kontekście dobrobytu społeczeństwa i poziomu życia. Uwzględnione są także zmienne stanowiące składniki PKB (konsumpcja gospodarstw domowych, wydatki państwa, eksport netto) zarówno jako poziomy, jak i jako stopy wzrostu (z wyjątkiem eksportu netto, który jest włączony jako wartość wyrażona w dolarach oraz jako odsetek PKB). Badanie obejmuje także dwie zmienne reprezentujące stabilność sektora finansowego i jego rozwój, który był szczególnie ważny w okresie globalnego kryzysu i kryzysu strefy euro, kiedy zakłócenia finansowe oddziaływały w dużym stopniu na realną gospodarkę.

Przedmiotem analizy jest 28 krajów UE w okresie 1995–2016. Zastosowano roczne szeregi czasowe. W przypadku braku danych obliczenia uwzględniają krótszy okres lub mniejszą liczbę krajów. Ponieważ badanie koncentruje się na Polsce, na rysunkach przedstawiono Polskę na tle pozostałych 27 krajów UE traktowanych jako całość.

4. Wyniki analizy empirycznej

W badaniu konwergencji są na ogół stosowane opierające się na analizie danych statystycznych metody, w których wykorzystuje się podejście eksperckie,

a także metody ilościowe, obejmujące przede wszystkim modele ekonometryczne. W niniejszym badaniu zastosowano rozwiązanie alternatywne w postaci ukrytych modeli Markowa. Dokładny opis metody przedstawili np. O. Cappé i in.¹⁴ oraz R. Bhar i S. Hamori¹⁵. Metoda HMM jest uogólnieniem klasycznego modelu Markowa o dodatkowy, nieobserwowalny proces, którego stany chcemy wyznaczyć na podstawie znanych, obserwowalnych sygnałów. Podejście to jest wykorzystywane w obszarach, w których istotne jest rozpoznawanie wzorców. Stąd często stosuje się je w rozpoznawaniu mowy, gestów czy odręcznego pisma. Są one też popularnym narzędziem w bioinformatyce, kryptoanalizie oraz teorii sygnałów. HMM od wielu lat są również obecne w makroekonomii, m.in. jako metoda analizy synchronizacji cykli koniunkturalnych, zjawiska zbieżności oraz identyfikacji punktów zwrotnych¹⁶.

W przeciwieństwie do klasycznych modeli Markowa, w których wszystkie stany są znane, a model Markowa jest definiowany tylko przez prawdopodobieństwa przejścia, w HMM stany są nieobserwowalne i muszą być obliczane na podstawie innego obserwowalnego szeregu czasowego. Dlatego oprócz macierzy prawdopodobieństw przejścia istnieją również parametry rozkładu prawdopodobieństwa związane z każdym stanem. W przypadku założonego rozkładu gaussowskiego mówimy o normalnych HMM. Wyznaczenie parametrów HMM, czyli prawdopodobieństw definiujących model, jest możliwe przez użycie algorytmu Bauma–Welcha¹⁷. Problemem, który pozostaje do rozwiązania, jest znalezienie nieobserwowalnej ścieżki stanów na podstawie wyznaczonych prawdopodobieństw będących wynikiem działania algorytmu Bauma–Welcha. Jednym ze stosowanych rozwiązań jest dobór ścieżki stanów, która jest optymalna z punktu widzenia całego rozpatrywanego okresu. Ścieżka taka nazywa się ścieżką Viterbiego, a do jej wyznaczenia stosuje się tzw. algorytm Viterbiego¹⁸.

¹⁴ O. Cappé, E. Moulines, T. Rydén, *Inference in Hidden Markov Models*, Springer Series in Statistics, Springer, 2005.

¹⁵ R. Bhar, S. Hamori, *Hidden Markov Models. Applications to Financial Economics*, Springer, 2004.

¹⁶ J.D. Hamilton, *Time Series Analysis*, Princeton University Press, Princeton 1994; L. Koskinen, L.E. Oeller, *A Classifying Procedure for Signaling Turning Points*, „Journal of Forecasting” 2004, vol. 23, s. 197–214; P. Wójcik, *Dywergencja czy konwergencja: dynamika rozwoju polskich regionów*, „Studia Regionalne i Lokalne” 2008, nr 2(32), s. 41–60.

¹⁷ L.E. Baum, T. Petrie, G. Soules, N. Weiss, *A Maximization Technique Occurring in the Statistical Analysis of Probabilistic Functions of Markov Chains*, „Annals of Mathematical Statistics” 1970, vol. 41, s. 164–171.

¹⁸ A. Viterbi, *Error Bounds for Convolutional Codes and an Asymptotically Optimum Decoding Algorithm*, „IEEE Transactions on Information Theory” 1967, vol. 13, s. 260–269.

Algorytm Viterbiego wraz z algorytmem Bauma–Welcha tworzą deterministyczną procedurę przekształcania wejściowych szeregów czasowych w najbardziej prawdopodobną ścieżkę stanów. Niestety, wyniki silnie zależą od początkowych wartości i mogą być dalekie od optymalnych. Dlatego, aby zwiększyć szansę znalezienia optymalnego rozwiązania, obliczenia są wykonywane wielokrotnie z tym samym zestawem danych i różnymi wartościami początkowymi. Szczegółowy opis procedury oraz dobór kryteriów optymalizacyjnych zostały przedstawione przez M. Bernardellego¹⁹.

W niniejszym badaniu są stosowane dwustanowe normalne ukryte modele Markowa. Interpretacja stanów jest następująca: 0 jest związane z okresami względnie dobrych warunków, a 1 oznacza sytuację, którą można określić jako gorszą. Teoretycznie w badaniu można wykorzystać modele z większą liczbą stanów, ale ze względu na krótkość szeregów czasowych oraz stabilność numeryczną wyników mogłoby się to okazać problematyczne.

Procedura składa się z trzech kroków i jest analogiczna do stosowanej we wcześniejszym badaniu²⁰. Jedyne w ostatnim kroku została wprowadzona modyfikacja w stosunku do oryginalnej procedury, polegająca na uwzględnieniu wielkości gospodarki danego kraju mierzonej liczbą ludności²¹. W efekcie wartości referencyjne są średnimi ważonymi i pozwalają lepiej określić punkt odniesienia w porównaniu z wartościami uzyskanymi na podstawie średniej arytmetycznej.

W pierwszym kroku dla każdej z 12 zmiennych i dla każdego z 27 krajów UE (wszystkie kraje z wyjątkiem Polski) utworzono szeregi czasowe różnic jako

$$\tilde{v}_t^C = v_t^{PL} - v_t^C, \quad (1)$$

gdzie $t = 1995, 1996, \dots, 2016$, zaś C odnosi się do jednego z krajów UE.

W drugim kroku oszacowano parametry HMM za pomocą algorytmu Bauma–Welcha dla każdego z szeregów \tilde{v}_t^C , a następnie wyznaczono ścieżki Viterbiego vp_t^C . Stan 0 na tej ścieżce oznacza rok, w którym kraje pod względem analizowanej zmiennej były podobne, podczas gdy stan 1 wskazuje na rozbieżność między krajami (Polska względem kraju C). W tym kroku są wykonywane obliczenia dla $12 \cdot 27 = 324$ modeli, przy czym ze względu na braki danych oraz związaną

¹⁹ M. Bernardelli, *Non-classical Markov Models in the Analysis of Business Cycles in Poland*, „Roczniki” Kolegium Analiz Ekonomicznych 2013, nr 30, s. 59–74.

²⁰ M. Bernardelli, M. Próchniak, B. Witkowski, *The Application of Hidden Markov...*, op.cit.

²¹ Dane na temat liczby ludności poszczególnych państw w latach 1995–2016 zostały zaczerpnięte z bazy danych Banku Światowego World Development Indicators.

z tym krótkość szeregów czasowych uzyskanie stabilnych wyników dla niektórych zmiennych było niemożliwe.

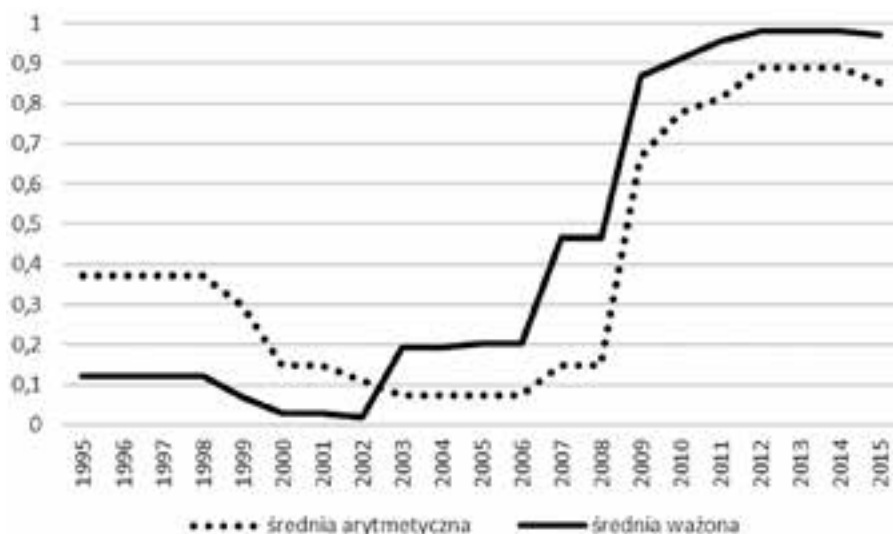
Trzecim krokiem było obliczenie dla każdego roku średnich ze stanów ścieżek Viterbiego dla danej zmiennej i wszystkich krajów. Wartość 0 oznacza idealną konwergencję (podobieństwo), podczas gdy rok, w którym średnia równa się 1, oznacza okres bezspornego braku podobieństwa (dywergencji) między Polską a innymi krajami UE. W tym kroku została dodana modyfikacja, związana z wyznaczaniem średniej. We wcześniejszym badaniu uwzględniono średnią arytmetyczną. Natomiast teraz została wykorzystana średnia ważona, w której wagami był stosunek liczby mieszkańców danego państwa pop_t^C do liczby mieszkańców UE w danym roku $\sum_{K \in UE28 \setminus PL} pop_t^K$, tj.

$$r_t = \sum_{C \in UE28 \setminus PL} \frac{pop_t^C}{\sum_{K \in UE28 \setminus PL} pop_t^K} vp_t^C. \quad (2)$$

W powyższym opisie procedury wykorzystano Polskę jako kraj, dla którego weryfikowana jest hipoteza konwergencji, ale oczywiście może być ona zastąpiona dowolnym innym krajem z analizowanego zbioru państw UE.

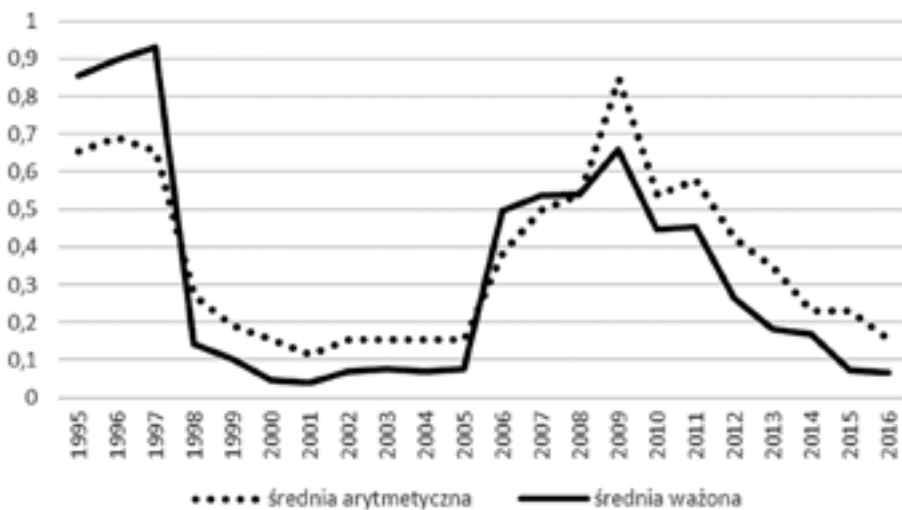
Wyniki analizy empirycznej dla Polski przedstawiono na rysunkach 1–12. Wykresy obrazują średnie ze stanów ścieżek Viterbiego, obliczone z wykorzystaniem szacowanych parametrów HMM dla rocznych różnic między wartościami danej zmiennej dla Polski i każdego z pozostałych krajów UE. Niższe wartości (bliższe 0) wskazują na istnienie konwergencji, czyli upodabnianie się krajów pod względem danej zmiennej makroekonomicznej. Natomiast wyższe wartości (bliżej 1) oznaczają dywergencję, czyli zmniejszanie się podobieństwa między Polską a grupą pozostałych 27 krajów UE.

W celu zbadania odporności wyników na sposób uśredniania danych na rysunkach pokazano wyniki zarówno dla średniej arytmetycznej, jak i dla średniej ważonej. Linia ciągłą zaznaczono średnie ważone liczbą ludności poszczególnych państw, linia przerywana zaś jest wizualizacją zależności dla obliczeń ze średnią arytmetyczną.



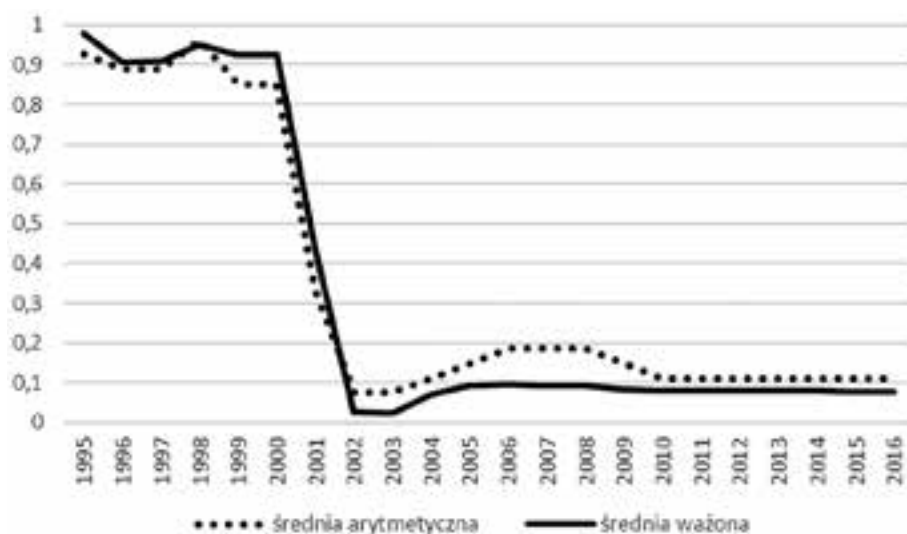
Rysunek 1. Konwergencja na podstawie poziomów PKB *per capita* wg PSN [gdpc_ppp] – Polska względem 27 krajów UE

Źródło: opracowanie własne.



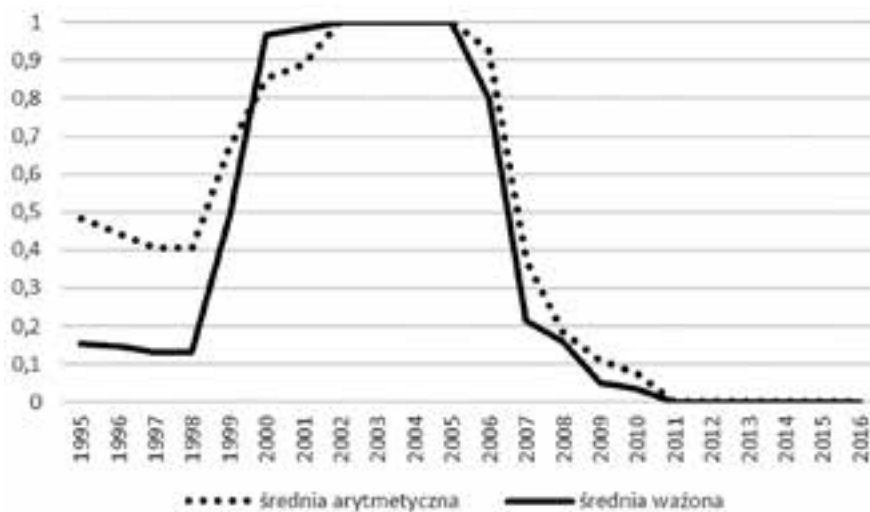
Rysunek 2. Konwergencja na podstawie stóp wzrostu realnego PKB ogółem [g_gdp] – Polska względem 27 krajów UE

Źródło: opracowanie własne.



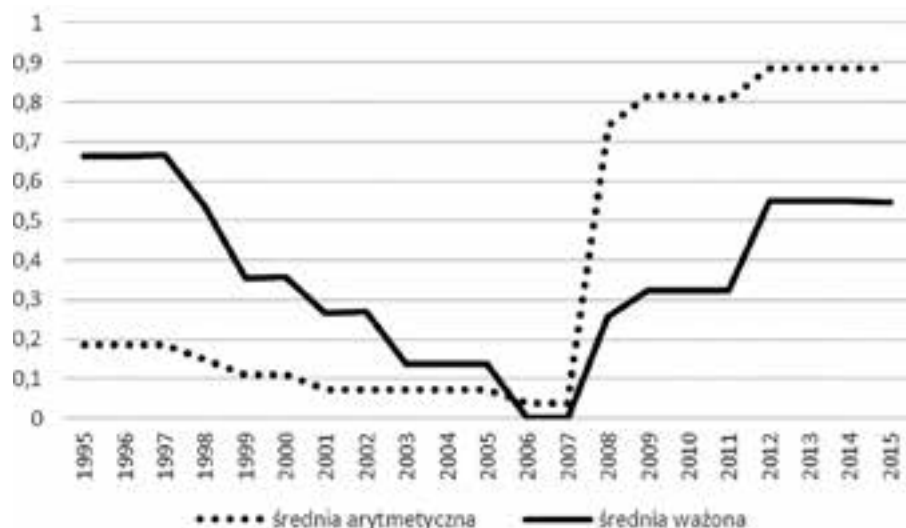
Rysunek 3. Konwergencja w zakresie stóp inflacji [inf] – Polska względem 27 krajów UE

Źródło: opracowanie własne.



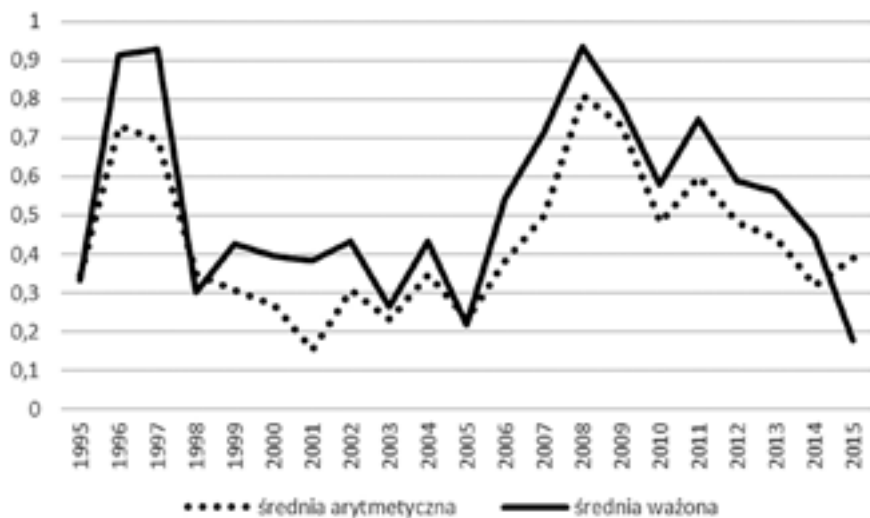
Rysunek 4. Konwergencja w zakresie stóp bezrobocia [une] – Polska względem 27 krajów UE

Źródło: opracowanie własne.



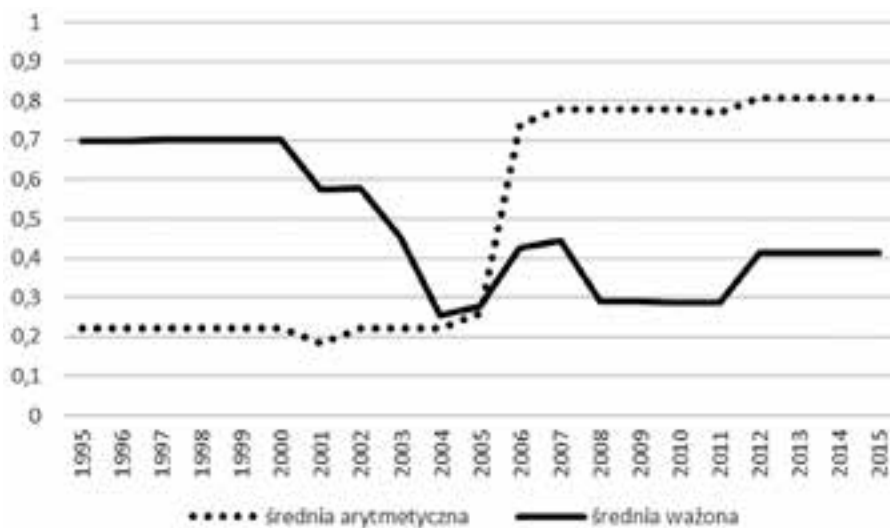
Rysunek 5. Konwergencja na podstawie poziomu wydatków konsumpcyjnych gospodarstw domowych [cons_usd] – Polska względem 27 krajów UE

Źródło: opracowanie własne.



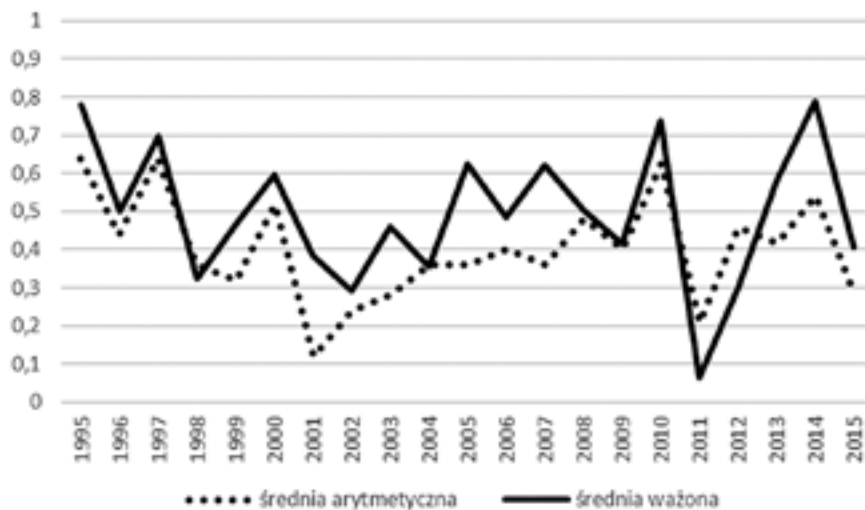
Rysunek 6. Konwergencja na podstawie dynamiki wydatków konsumpcyjnych gospodarstw domowych [cons_g] – Polska względem 27 krajów UE

Źródło: opracowanie własne.



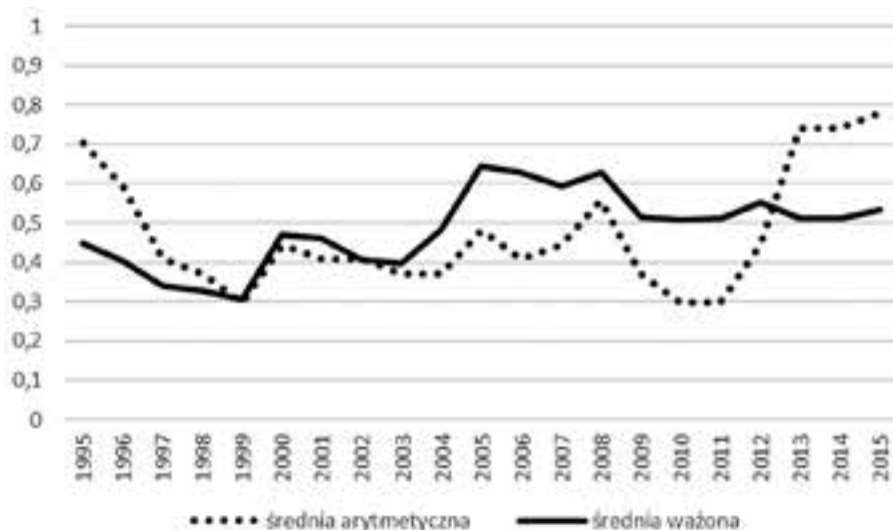
Rysunek 7. Konwergencja na podstawie poziomów wydatków konsumpcyjnych państwa [gov_usd] – Polska względem 27 krajów UE

Źródło: opracowanie własne.



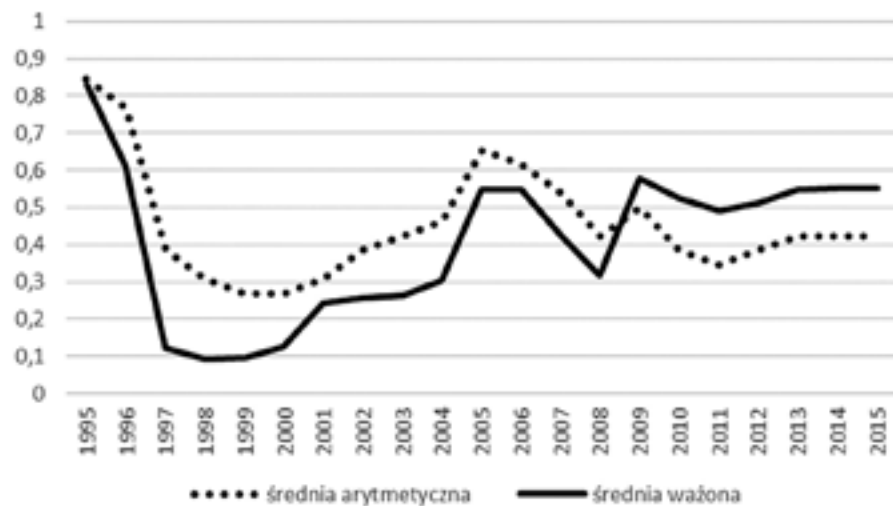
Rysunek 8. Konwergencja na podstawie dynamiki wydatków konsumpcyjnych państwa [gov_g] – Polska względem 27 krajów UE

Źródło: opracowanie własne.



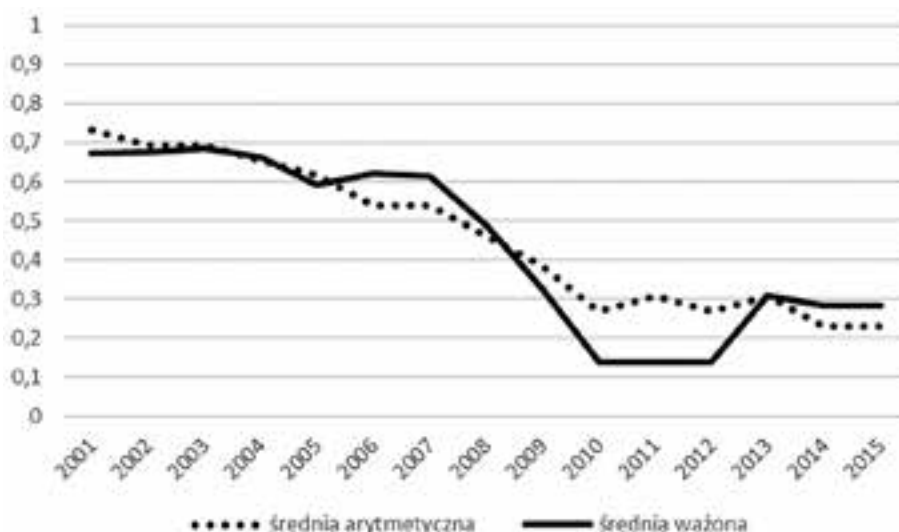
Rysunek 9. Konwergencja w zakresie wolumenu salda handlu zagranicznego [nx_usd] – Polska względem 27 krajów UE

Źródło: opracowanie własne.



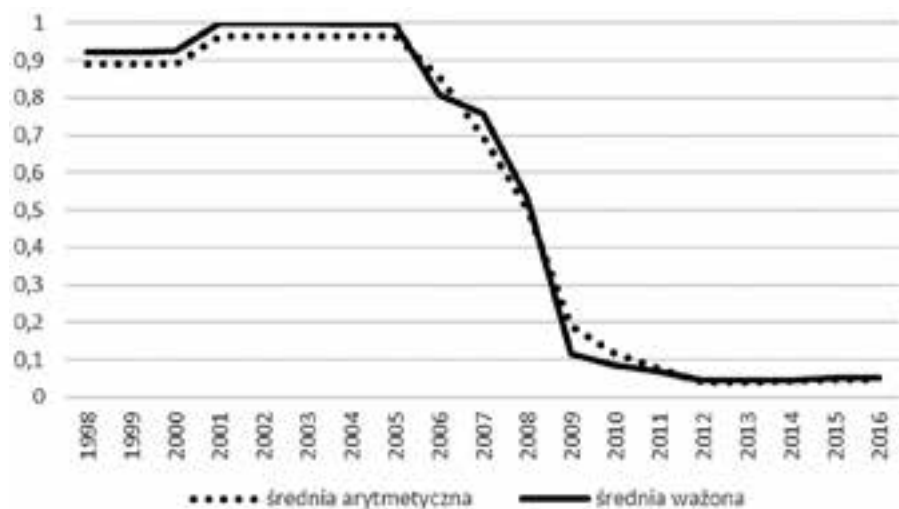
Rysunek 10. Konwergencja w zakresie udziału salda handlu zagranicznego w PKB [nx_gdp] – Polska względem 27 krajów UE

Źródło: opracowanie własne.



Rysunek 11. Konwergencja w zakresie wolumenu kredytów krajowych udzielonych przez sektor finansowy [cred_byfin] – Polska względem 27 krajów UE

Źródło: opracowanie własne.



Rysunek 12. Konwergencja w zakresie wolumenu kredytów zagrożonych [nonp_loans] – Polska względem 27 krajów UE

Źródło: opracowanie własne.

Analiza danych umieszczonych na wykresach prowadzi do kilku wniosków. Po pierwsze, w kategoriach poziomów PKB *per capita* wg PSN widać silną

zbieżność w początkowej dekadzie objętej badaniem, tj. do czasu rozpoczęcia globalnego kryzysu. Światowy kryzys ekonomiczno-finansowy, a potem kryzys strefy euro zmniejszył stopień podobieństwa między Polską a pozostałymi krajami UE. Dywergencja w ostatnich latach jest zgodna z wynikami niektórych innych badań empirycznych, sugerującymi pojawienie się elementów dywergencji w poziomach dochodów w UE²².

Po drugie, konwergencja cykliczna analizowana w kategoriach upodabniania się stóp wzrostu realnego PKB ogółem także sugeruje wystąpienie silnej dywergencji gospodarczej w okresie globalnego kryzysu, tj. ok. 2009 r. Wynika to z tego, że w 2009 r. Polska była jedynym krajem UE, który uniknął recesji. Procedura HMM pozwoliła wychwycić tę istotną różnicę w tempie wzrostu gospodarczego w tym okresie. W przeciwieństwie jednak do wyników dla poziomów PKB *per capita* po zakończeniu kryzysu tempo wzrostu PKB Polski upodobniło się do średniego tempa wzrostu pozostałych krajów UE. W efekcie w latach 2015–2016 średnie wartości ze stanów ścieżek Viterbiego są dla Polski zbliżone do tych z lat 2000–2005.

Po trzecie, dla większości zmiennych wyniki w zakresie konwergencji Polski w stosunku do pozostałych 27 krajów UE są bardzo zbliżone, jeśli weźmiemy pod uwagę zagregowane wartości dla grupy UE-27 liczone zarówno jako średnie arytmetyczne, jak i jako średnie ważone. Okazuje się zatem, że w kontekście oceny podobieństwa krajów można dla uproszczenia stosować wnioskowanie na podstawie prostszej procedury, obejmującej średnią arytmetyczną stanów ze ścieżek Viterbiego. Niemniej jednak algorytm z uwzględnieniem średnich ważonych daje wyniki dokładniejsze i bardziej miarodajne pod względem ekonomicznym.

Wreszcie najbardziej zauważalne różnice między wynikami opartymi na średniej arytmetycznej a wynikami uzyskanymi przy użyciu średniej ważonej dotyczą zmiennych mierzących poziom wydatków konsumpcyjnych państwa oraz – chociaż w mniejszym stopniu – poziom wydatków konsumpcyjnych gospodarstw domowych. Mimo że z ekonomicznego punktu widzenia, biorąc pod uwagę działanie zastosowanego algorytmu, uprawnione jest badanie zmian podobieństw na szeregach czasowych wyrażonych w postaci wolumenu, to jednak

²² Zob. np. M. Mucha, *Mechanizm dywergencji gospodarczej w strefie euro*, „*Ekonomista*” 2012, nr 4, s. 487–498; N. Stañisić, *The Effects of the Economic Crisis on Income Convergence in the European Union*, „*Acta Oeconomica*” 2012, vol. 62, s. 161–182; M.T. Borsi, N. Metiu, *The Evolution of Economic Convergence in the European Union*, „*Deutsche Bundesbank Discussion Paper*” 2013, no. 28; M. Monfort, J.C. Cuestas, J. Ordóñez, *Real Convergence in Europe: A Cluster Analysis*, „*Economic Modelling*” 2013, vol. 33, s. 689–694.

brak odporności wyników utrudnia wnioskowanie w tym zakresie. Bardziej wiarygodne wyniki w zakresie podobieństw poszczególnych krajów dają obliczenia wykonane na stopach wzrostu zmiennych lub zmiennych uwzględnionych np. w przeliczeniu na jednego mieszkańca.

5. Podsumowanie

W analizie zastosowano ukryte modele Markowa i ścieżki Viterbiego do oceny podobieństwa Polski w stosunku do pozostałych 27 krajów UE, biorąc pod uwagę 12 zmiennych makroekonomicznych. Wykorzystano poziom PKB *per capita* wg PSN oraz stopę wzrostu realnego PKB ogółem do oceny stopnia konwergencji cyklicznej oraz stopnia wyrównywania się poziomów dochodu. Pozostałe zmienne (stopa inflacji i stopa bezrobocia, składowe PKB oraz zmienne z zakresu sektora finansowego) pozwalają na szerszą ocenę podobieństwa Polski do grupy UE-27. Badanie jest kontynuacją wcześniejszej analizy w tym zakresie. Jednym z elementów nowości i oryginalności tej edycji jest uwzględnienie średnich ważonych, za pomocą których dokonano agregacji poszczególnych stanów ze ścieżek Viterbiego. Procedura wykorzystująca HMM, ścieżki Viterbiego i uśrednianie ścieżek za pomocą średnich ważonych daje bardziej miarodajne z ekonomicznego punktu widzenia wyniki niż uśrednianie z wykorzystaniem średniej arytmetycznej.

Zastosowana metoda ma duży potencjał jako narzędzie do analizy synchronizacji wahań cyklicznych i wyrównywania się poziomów dochodu. Kluczową zaletą w porównaniu z modelowaniem ekonometrycznym są niewielkie wymagania, jeśli chodzi o założenia. Dlatego też warto wykorzystać proponowaną metodę – tak jak zostało to wykonane w niniejszym badaniu – do większej liczby zmiennych niż tylko miary produkcji i dochodu.

Ukryte modele Markowa dają wiarygodne i dające się uzasadnić ekonomicznie wyniki oceny podobieństw różnych krajów, co pokazuje słuszność wyboru tej procedury do badań nad konwergencją. Na przykład w zakresie synchronizacji wahań cyklicznych wyniki dla stopy wzrostu realnego PKB ogółem pokazują na przejściową dywergencję Polski w stosunku do pozostałych 27 krajów UE w okresie globalnego kryzysu. Jeśli chodzi o zbieżność poziomów dochodu, wyniki dla PKB *per capita* wg PSN sugerują silne wyrównywanie się poziomów dochodu na mieszkańca przed globalnym kryzysem i rozpoczęcie dywergencji gospodarczej ok. 2009 r. Procedura HMM potwierdza także istnienie wyraźnej

konwergencji nominalnej w zakresie upodabniania się stóp inflacji w trakcie okresu objętego badaniami.

Metoda HMM wydaje się skuteczną metodą analizy makroekonomicznych szeregów czasowych. Poza identyfikacją punktów zwrotnych i synchronizacją cykli koniunkturalnych proponowana procedura stanowi przykład udanego zastosowania w badaniach nad realną konwergencją. Procedura może podlegać dalszym modyfikacjom i uogólnieniom. Zamiast wag związanych z liczbą ludności można wykorzystać np. PKB danego kraju. Dodatkowo w dalszych badaniach można dokonać analizy, ograniczając weryfikację hipotezy konwergencji do określonych podgrup krajów.

Bibliografia

- Barro R., Sala-i-Martin X., *Economic Growth*, The MIT Press, Cambridge–London 2003.
- Baum L.E., Petrie T., Soules G., Weiss N., *A Maximization Technique Occurring in the Statistical Analysis of Probabilistic Functions of Markov Chains*, „Annals of Mathematical Statistics” 1970, vol. 41, s. 164–171.
- Bernardelli M., *Non-classical Markov Models in the Analysis of Business Cycles in Poland*, „Roczniki” Kolegium Analiz Ekonomicznych 2013, nr 30, s. 59–74.
- Bernardelli M., Próchniak M., Witkowski B., *Cycle and Income-Level Convergence in the EU Countries: An Identification of Turning Points Based on the Hidden Markov Models*, „Roczniki” Kolegium Analiz Ekonomicznych 2017, nr 47, s. 27–42.
- Bernardelli M., Próchniak M., Witkowski B., *Konwergencja dochodowa: mocne i słabe strony istniejących podejść*, „Kwartalnik Kolegium Ekonomiczno-Społecznego. Studia i Prace” 2017, nr 3(31), s. 71–86.
- Bernardelli M., Próchniak M., Witkowski B., *The Application of Hidden Markov Models to the Analysis of Real Convergence*, „Dynamic Econometric Models” 2017, vol. 17, s. 59–80.
- Bhar R., Hamori S., *Hidden Markov Models. Applications to Financial Economics*, Springer, 2004.
- Borsi M.T., Metiu N., *The Evolution of Economic Convergence in the European Union*, „Deutsche Bundesbank Discussion Paper” 2013, no. 28.
- Cappé O., Moulines E., Rydén T., *Inference in Hidden Markov Models*, Springer Series in Statistics, Springer, 2005.
- Hamilton J.D., *Time Series Analysis*, Princeton University Press, Princeton 1994.
- Islam N., *What Have We Learnt from the Convergence Debate?*, „Journal of Economic Surveys” 2003, vol. 17, s. 309–362.

- Koskinen L., Oeller L.E., *A Classifying Procedure for Signaling Turning Points*, „Journal of Forecasting” 2004, vol. 23, s. 197–214.
- Matkowski Z., Próchniak M., Rapacki R., *Income Convergence in Poland vis-à-vis the EU: Major Trends and Prospects*, w: *Poland. Competitiveness Report 2016. The Role of Economic Policy and Institutions*, red. M.A. Weresa, World Economy Research Institute, SGH Warsaw School of Economics, Warsaw 2016, s. 37–55.
- Matkowski Z., Próchniak M., Rapacki R., *Real Income Convergence between Central Eastern and Western Europe: Past, Present, and Prospects*, „*Ekonomista*” 2016, nr 6, s. 853–892.
- Monfort M., Cuestas J.C., Ordóñez J., *Real Convergence in Europe: A Cluster Analysis*, „*Economic Modelling*” 2013, vol. 33, s. 689–694.
- Mucha M., *Mechanizm dywergencji gospodarczej w strefie euro*, „*Ekonomista*” 2012, nr 4, s. 487–498.
- Próchniak M., Witkowski B., *Konwergencja gospodarcza typu β w świetle bayesowskiego uśredniania oszacowań*, „*Bank i Kredyt*” 2012, nr 43(2), s. 25–58.
- Sala-i-Martin X., *On Growth and States*, rozprawa doktorska, Harvard University, 1990.
- Stańsić N., *The Effects of the Economic Crisis on Income Convergence in the European Union*, „*Acta Oeconomica*” 2012, vol. 62, s. 161–182.
- Viterbi A., *Error Bounds for Convolutional Codes and an Asymptotically Optimum Decoding Algorithm*, „*IEEE Transactions on Information Theory*” 1967, vol. 13, s. 260–269.
- Wójcik P., *Dywergencja czy konwergencja: dynamika rozwoju polskich regionów*, „*Studia Regionalne i Lokalne*” 2008, nr 2(32), s. 41–60.
- Zarnowitz V., Ozylidirim A., *Time Series Decomposition and Measurement of Business Cycles, Trends and Growth Cycles*, „*Journal of Monetary Economics*” 2006, vol. 53, s. 1717–1739.

* * *

The usefulness of hidden Markov models to analyze the similarity of the countries in terms of business cycle synchronization and income level equalization

Summary

The analysis uses hidden Markov models and Viterbi paths to assess Poland's similarity in relation to the other 27 EU countries, taking into account 12 macroeconomic variables. The level of GDP per capita at PPP and the growth rate of real GDP are used to assess the degree of cyclical convergence and income level equalization. One of the elements of novelty and originality is the inclusion of weighted averages that are used to aggregate individual states of the Viterbi paths, which gives more

economically reliable results than averaging using the arithmetic mean. The study confirmed, among others, the existence of economic divergence during the global crisis and strong nominal convergence of inflation rates between Poland and the EU27 group.

Keywords: convergence, catching up, hidden Markov models, European Union, Viterbi path

Zgodnie z oświadczeniem autorów, ich udział w przygotowaniu artykułu wyniósł: Michał Bernardelli – 33%, Mariusz Próchniak – 33%, Bartosz Witkowski – 33%.