

Zabezpieczenie przed spadkiem wartości aktywów w modelu typu Lévy'ego z fazowymi skokami i dowolną funkcją wynagrodzenia

1. Wstęp

W artykule rozważymy proces spadku, który definiujemy jako różnicę aktualnej maksymalnej wartości aktywów osiągniętej pomiędzy momentem zawarcia kontraktu a obecną chwilą oraz wartości tych aktywów bazowych w tej właśnie chwili. Zainteresowanie tym procesem jest nieodłącznie związane z niedawnymi kryzysami finansowymi. Spadek o ustalony poziom może posłużyć inwestorom do predykcji przyszłych strat i wyznaczać moment zmiany strategii inwestycyjnej. Z tego względu badanie procesu spadku stało się niezwykle istotne przy analizie ryzyka inwestycyjnego. Libor Pospisil i Jan Vecer³ oraz Jan Vecer⁴ przedstawiali proces spadku jako dynamiczną miarę ryzyka. Rozważania dotyczące optymalizacji portfela z pewnymi ograniczeniami na proces spadku można znaleźć w pracy S.J. Grossmana i Z. Zhou⁵. Rozkład procesu spadku analizowało wielu innych autorów, m.in. P. Carr i inni⁶, z kolei M. Magdon-Ismail i A. Atiya⁷ rozważali rozkład maksymalnej wartości procesu spadku dla ruchu Browna z dryfem oraz tzw. wskaźnik ryzyka Calmar, który jest zdefiniowany jako stosunek

¹ Politechnika Wrocławska, Wydział Matematyki.

² Uniwersytet Wrocławski, Wydział Matematyki i Informatyki.

³ L. Pospisil, J. Vecer, *Portfolio sensitivities to the changes in the maximum and the maximum drawdown*, „Quantitative Finance” 2010, vol. 10(6), s. 617–627.

⁴ J. Vecer, *Maximum drawdown and directional trading*, „Risk” 2006, vol. 19(12), s. 88–92; J. Vecer, *Preventing portfolio losses by hedging maximum drawdown*, „Wilmott” 2007, vol. 5(4), s. 1–8.

⁵ S.J. Grossman, Z. Zhou, *Optimal investment strategies for controlling drawdowns*, „Mathematical Finance” 1993, vol. 3(3), s. 241–276.

⁶ P. Carr, H. Zhang, O. Hadjiladis, *Maximum drawdown insurance*, „International Journal of Theoretical and Applied Finance” 2011, vol. 14(8), s. 1–36.

⁷ M. Magdon-Ismail, A. Atiya, *Maximum drawdown*. „Risk” 2004, vol. 17(10), s. 99–102.

stopy zwrotu do wartości maksymalnego spadku. W pracy D. Sornette'a⁸ można znaleźć natomiast przegląd technik związanych z analizą załamań rynku oraz empiryczne badania dotyczące procesu spadku i jego maksymalnej wartości.

W niniejszym artykule rozważymy ubezpieczenie zabezpieczające przeciwko spadkowi cen aktywów powyżej pewnej ustalonej wartości. Kontrakt ten zobowiązuje inwestora do opłacania, w sposób ciągły, składki o stałej intensywności, a ubezpieczyciela – do wypłacenia pewnego wynagrodzenia w momencie dużego spadku. Wycenimy opisane ubezpieczenie oraz podamy wysokość sprawiedliwej składki (tzw. *fair premium*), dla której wartość kontraktu równa się zero.

Po raz pierwszy ubezpieczenie tego rodzaju pojawiło się w literaturze w pracy H. Zhanga i innych⁹ dla geometrycznego ruchu Browna. Wyniki badań przedstawione w ich pracy zostały rozszerzone dla spektralnie ujemnego procesu Lévy'ego i stałej wartości wynagrodzenia w pracy Z. Palmowskiego i J. Tumilewicz¹⁰. Jak wskazali ci autorzy, wysokość wypłaty może jednak zależeć od wielkości spadku¹¹. Głównym celem niniejszego artykułu jest praktyczne i numeryczne zaprezentowanie wspomnianych wyników teoretycznych. Numeryczna analiza zostanie przedstawiona dla wartości akcji modelowanej ruchem Browna ze skokami z tzw. rozkładu fazowego. Szczegółowy przegląd własności rozkładów fazowych można znaleźć w książce S. Asmussena¹².

Artykuł został zorganizowany następująco: w punkcie 2 przedstawimy szczegółowo model oraz wycenimy rozpatrywane ubezpieczenie, w punkcie 3 przeprowadzimy numeryczną analizę dla wybranych rozkładów fazowych, rozważania zakończymy zaś wnioskami ujętymi w punkcie 4.

⁸ D. Sornette, *Why Stock Markets Crash: Critical Events in Complex Financial Systems*, Princeton University Press, Princeton 2003.

⁹ H. Zhang, T. Leung, O. Hadjiladis, *Stochastic modeling and fair valuation of drawdown insurance*, „Insurance: Mathematics and Economics” 2013, vol. 53, s. 840–850.

¹⁰ Z. Palmowski, J. Tumilewicz, *Pricing insurance drawdown-type contracts with underlying Lévy assets*, „Insurance: Mathematics and Economics” 2018, vol. 79, s. 1–14.

¹¹ Ibidem.

¹² S. Asmussen, *Applied Probability and Queues*, wyd. 2, Springer-Verlag, New York 2003.

2. Opis kontraktu ubezpieczeniowego

2.1. Przedstawienie modelu

Cenę bazowego instrumentu finansowego S_t będziemy modelować jako geometryczny proces Lévy'ego:

$$S_t := e^{X_t}, \quad (1)$$

gdzie X_t jest dany poprzez rynek Blacka-Scholesa, zaburzany ujemnymi spadkami na rynku cen, to znaczy:

$$X_t := x + \mu t + \sigma B_t - \sum_{i=1}^{N_t} \eta_i. \quad (2)$$

W powyższej definicji B_t jest ruchem Browna, zaś N_t jest procesem Poissona z intensywnością $\lambda > 0$, a η_i tworzy ciąg niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie. Poprzez obecność części skokowej w (2) możliwe jest lepsze dopasowanie modelu do danych rzeczywistych niż w przypadku rynku Blacka-Scholesa:

$$X_t := x + \mu t + \sigma B_t. \quad (3)$$

Analiza rzeczywistych danych rynkowych pokazuje bowiem, że rozkład logarytmicznych zwrotów cen akcji może cechować się ciężkimi ogonami lub asymetrią. Własności tych jednak nie można odtworzyć, używając rozkładu normalnego (3). Alternatywą jest właśnie użycie procesu mającego część dyfuzyjną oraz część skokową, czyli tzw. modelu *jump-diffusion*, co zostało opisane przez B. Oksendala i A. Sulem¹³.

W naszych rozważaniach zakładamy, że rozkład F_η skoków η_i procesu cen X_t opisanego w (2) jest zadany poprzez rozkład fazowy. Rozkład F_η zmiennej η nazywamy rozkładem fazowym i zapisujemy to jako $\eta \approx \text{Ph}(\gamma, \mathbf{T})$, gdzie η opisuje rozkład czasu życia do pochłonięcia dla, startującego ze stanu γ , procesu Markowa ze skończoną liczbą stanów N i jednorodną w czasie intensywnością przejść $\mathbf{T}$. Wtedy:

$$F_\eta(\phi) = 1 - \gamma \exp\{\mathbf{T}\phi\}1,$$

¹³ B. Oksendal, A. Sulem, *Applied Stochastic Control of Jump Diffusions*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2005.

dla $\phi \geq 0$, gdzie $\mathbf{1}$ jest wektorem jedynek. Powyższy wzór wyznacza również gęstość $f_\gamma(\phi)$ tego rozkładu:

$$f_\gamma(\phi) = \gamma \exp\{\mathbf{T}\phi\} \mathbf{t},$$

gdzie

$$\mathbf{t} = -\mathbf{T}\mathbf{1}.$$

Do rozkładów fazowych zaliczamy m.in.: rozkład wykładniczy, rozkład Erlanga, rozkład hiperwykładniczy, mieszanę rozkładów Erlanga. W niniejszej pracy przedstawimy numeryczną analizę dla pierwszych dwóch rozkładów. Ich charakterystyki przedstawione są w tabeli 1.

W rozważaniach dotyczących procesów (2) przydatnym narzędziem jest wyznaczenie tzw. funkcji skalujących. Definiujemy je w następujący sposób. Dla $r \geq 0$ pierwsza funkcja skalująca $W^{(r)}$ jest ciągłą, ściśle rosnącą funkcją określoną na $[0, \infty)$, z transformatą Laplace'a, zadaną poprzez:

$$\int_0^\infty e^{\phi u} W^{(r)}(u) du = \frac{1}{\psi(\phi) - r}, \quad (5)$$

gdzie

$$\psi(\phi) := \log \mathbb{E}[e^{\phi X_1}] \quad (6)$$

jest wykładnikiem Laplace'a procesu X_t . Druga funkcja skalująca, $Z^{(r)}$, jest związana z pierwszą poprzez następującą zależność:

$$Z^{(r)}(u) := 1 + r \int_0^u W^{(r)}(\phi) d\phi. \quad (7)$$

Wykładnik Laplace'a zdefiniowany w (6) dla procesów X_t danych wzorem (2) wyraża się następująco:

$$\psi(\phi) = \mu\phi + \frac{\sigma^2\phi^2}{2} + \lambda \left(\gamma(\phi\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1} \mathbf{t} - 1 \right), \quad (8)$$

gdzie $\mathbf{t}$ jest dane w (4), a $\mathbf{I}$ jest macierzą identyczności rozmiaru N .

Używając powyższej definicji funkcji skalującej $W^{(r)}$, danej w (5), oraz prac A.E. Kyprianou i innych¹⁴ oraz M. Egami i K. Yamazaki¹⁵, możemy otrzymać jawną postać szukanej funkcji skalującej. Niech

$$I := \{\varphi_i: \psi(-\varphi_i) = r \quad \text{ i } \quad \operatorname{Re}(\varphi_i > 0)\}$$

oraz

$$\Phi(r) := \sup\{\phi \geq 0: \psi(\phi) = r\}.$$

Jeżeli wszystkie elementy w I są jednokrotnymi pierwiastkami, to

$$W^{(r)}(u) = \frac{e^{\Phi(r)u}}{\psi'(\Phi(r))} - \sum_{i=1}^{N-1} B_i e^{-\varphi_i u},$$

gdzie

$$B_i := -\frac{1}{\psi'(-\varphi_i)}. \quad (10)$$

Instrumenty ubezpieczeniowo-finansowe w tej pracy są obliczane w mierze martyngałowej zgodnie z martyngałową formułą wyceny. Przy braku dodatkowych mechanizmów finansowych daje to założenie, że zdyskontowany proces cen $\exp\{X_t - rt\}$ jest martyngałem, co w przypadku rozważanego procesu, zdefiniowanego poprzez (2), jest równoważne założeniu, że $\mu = r - \sigma^2 / 2 - \lambda(\gamma(\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1} \mathbf{t} - 1)$. W pracy dopuszczamy jednakże możliwość dowolnego dryfu μ . Może on pojawić się na przykład kiedy akcje wypłacają w sposób ciągły dywidendę z intensywnością b . W tym przypadku w naszym modelu otrzymujemy $\mu = r - \sigma^2 / 2 - \lambda(\gamma(\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1} \mathbf{t} - 1) - b$. Podobnie, kiedy S_t będzie na przykład ceną złota z kosztami przechowywania e^{ct} , wtedy $\mu = r - \sigma^2 / 2 - \lambda(\gamma(\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1} \mathbf{t} - 1) + c$.

W niniejszym artykule będziemy rozważać ubezpieczenie przeciwko spadkowi o co najmniej pewien, ustalony poziom. Proces spadku definiujemy jako różnicę pomiędzy maksymalną wartością bazowego procesu (2) w pewnym horyzoncie czasowym i obecną wartością procesu bazowego. Niech

¹⁴ A.E. Kyprianou, A. Kuznetsov, V. Rivero, *The theory of scale functions for spectrally negative Lévy processes*, „Lévy Matters II”, Springer Lecture Notes in Mathematics, Berlin Heidelberg 2012.

¹⁵ M. Egami, K. Yamazaki, *Phase-type fitting of scale functions for spectrally negative Lévy processes*, „Journal of Computational and Applied Mathematics” 2014, vol. 264, s. 1–22.

$$\bar{X}_t := \sup_{s \leq t} X_s.$$

Wtedy proces spadku możemy zapisać jako:

$$D_t := \bar{X}_t \vee d - X_t,$$

gdzie d jest historycznym maksimum procesu X_t . Moment wypłaty ubezpieczenia będziemy oznaczać poprzez:

$$\tau_D^+(a) := \inf \{t \geq 0 : D_t \geq a\}.$$

Powyższa definicja oznacza, że $\tau_D^+(a)$ jest pierwszym momentem od chwili obecnej (chwila 0), gdy proces spadku D_t osiągnie bądź przekroczy pewien ustalony poziom a .

2.2. Wycena ubezpieczenia

W tej części pracy zdefiniujemy ubezpieczenie przeciwko spadkowi oraz podamy metodę wyceny rozważanego kontraktu. Przedstawione tu zagadnienia opierają się na ustaleniach wspomnianego już artykułu Z. Palmowskiego i J. Tumilewicz¹⁶. Dla przejrzystości i skupienia większej uwagi na aspekcie praktycznym, pomijamy dowody twierdzeń, które są zawarte we wskazanej pracy.

Rozważmy kontrakt ubezpieczeniowy, który jest pewną formą zabezpieczenia inwestora w sytuacji wystąpienia dużego spadku. Inwestor zobowiązuje się do opłacania składki w sposób ciągły o stałej intensywności $p > 0$ aż do momentu wystąpienia spadku o ustalonej wielkości $a > 0$, czyli od chwili obecnej do $\tau_D^+(a)$. Z drugiej strony ubezpieczyciel zobowiązuje się do wypłacenia w chwili $\tau_D^+(a)$ wynagrodzenia w wysokości $\alpha(D_{\tau_D^+(a)})$. Wysokość wypłaty jest pewną funkcją, ustaloną podczas podpisywania kontraktu, i zależy od rzeczywistej wielkości spadku, jaki obserwujemy w chwili $\tau_D^+(a)$. Intuicyjnie możemy uznać, że przy większym spadku inwestor ponosi większe straty, a więc od ubezpieczyciela oczekuje wyższego wynagrodzenia, a w związku z tym wysokość wypłaty powinna zależeć od wartości spadku.

Zauważmy dodatkowo, że proces spadku (11) jest zdefiniowany dla procesu X_t zdefiniowanego w (2). Z kolei obserwowane rzeczywiste wartości aktywów

¹⁶ Z. Palmowski, J. Tumilewicz, op.cit.

dane są poprzez (1), tzn. przez geometryczny proces Lévy'ego $S_t = e^{X_t}$. W praktyce oznacza to, że rzeczywisty poziom spadku dla procesu ceny S_t będzie wynosił e^a .

Niech $r > 0$ będzie wolną od ryzyka stopą procentową. Wartość omawianego kontraktu w obecnej chwili, $U(d, p)$, jest równa wartości oczekiwanej przyszłych przepływów, a więc:

$$U(d, p) = E \left[- \int_0^{\tau_D^+(a)} e^{-rt} p dt + \alpha \left(D_{\tau_D^+(a)} \right) e^{-r\tau_D^+(a)} \mid D_0 = d \right], \quad (12)$$

gdzie d jest pozycją startową procesu spadku D_t , a p jest wysokością składki. Wartość powyższego ubezpieczenia możemy wyliczyć, korzystając z następującego twierdzenia, udowodnionego w opracowaniu Z. Palmowskiego i J. Tumilewicz¹⁷.

Twierdzenie 1. *Wartość obecna kontraktu zdefiniowanego w (12) wynosi:*

$$\begin{aligned} U(d, p) = & \frac{p}{r} \left(Z^{(r)}(a-d) - rW^{(r)}(a-d) \frac{W^{(r)}(a)}{W^{(r)}(a)} \right) - \frac{p}{r} + \\ & + \alpha(a) \frac{\sigma^2}{2} \left(W^{(r)}(a-d) - W^{(r)}(a-d) \frac{W^{(r)}(a)}{W^{(r)}(a)} \right) + \\ & + \lambda \int_0^a \int_0^\infty \alpha(a+h) \left[W^{(r)}(a-d) \frac{W^{(r)}(a-z)}{W^{(r)}(a)} - W^{(r)}(a-d-z) \right] f_\gamma(z+h) dh dz, \end{aligned}$$

gdzie λ jest intensywnością procesu Poissona, a f_γ jest gęstością skoków rozkładu fazowego z definicji procesu X_t danego w (2).

Wartość rozważanego kontraktu ubezpieczeniowego jest zdefiniowania w (12) jako wartość oczekiwana przyszłych przepływów, rozpatrując je od strony inwestora. Jeżeli wartość ta byłaby dodatnia, oznaczałoby to, że inwestor – średnio – zyskuje, decydując się na taki kontrakt. Z drugiej strony firma ubezpieczeniowa średnio traciłaby na każdym kontrakcie, a zatem ubezpieczyciel nie zgodziłby się podpisać takiego kontraktu. Oznacza to, że zdarzenie takie nie może mieć miejsca. Jeżeli z kolei wartość kontraktu (12) byłaby ujemna, to inwestor traciłby na ubezpieczeniu i nie podjąłby decyzji o zawarciu kontraktu. Rozważania te prowadzą do wniosku, że jedyną sprawiedliwą sytuacją jest wartość kontraktu równa zero, tj.:

¹⁷ Z. Palmowski, J. Tumilewicz, op.cit.

$$U(d, p^*) = 0. \quad (13)$$

Wysokość intensywności składki, p^* , dla której wartość ubezpieczenia w chwili jego zawarcia jest równa zero, nosi nazwę składki sprawiedliwej (ang. *fair premium*). Wartość tę możemy obliczyć bezpośrednio, używając twierdzenia 1, co zostało pokazane w twierdzeniu 2.

Twierdzenie 2. *Sprawiedliwa wysokość składki, spełniająca równanie (13), wyraża się wzorem:*

$$p^* = \frac{r\lambda \int_0^a \int_0^\infty \alpha(a+h) \left[W^{(r)}(a-d) \frac{W^{(r)}(a-z)}{W^{(r)}(a)} - W^{(r)}(a-d-z) \right] f_\gamma(z+h) dh dz}{1 - Z^{(r)}(a-d) + rW^{(r)}(a-d) \frac{W^{(r)}(a)}{W^{(r)}(a)}} +$$

$$+ \frac{r\alpha(a) \frac{\sigma^2}{2} \left(W^{(r)}(a-d) - W^{(r)}(a-d) \frac{W^{(r)}(a)}{W^{(r)}(a)} \right)}{1 - Z^{(r)}(a-d) + rW^{(r)}(a-d) \frac{W^{(r)}(a)}{W^{(r)}(a)}}.$$

3. Analiza numeryczna – przykłady

W tym punkcie przeprowadzimy analizę numeryczną dla, przedstawionego w poprzednim punkcie, ubezpieczenia przeciwko spadkowi. Obliczeń dokonamy przy założeniu, że logarytm ceny instrumentu bazowego jest dany przez (2). W szczególności zakładamy, że część skokowa jest zadana poprzez pewne rozkłady fazowe. Rozważone zostaną dwa rozkłady: rozkład wykładniczy oraz rozkład Erlanga. Podstawowe charakterystyki obu tych procesów zostały przedstawione w tabeli 1.

W celu wyceny omawianego ubezpieczenia przeciwko spadkowi w pierwszej kolejności wyznaczmy postacie funkcji skalujących zdefiniowanych w (5) i (7), używając wzoru (9). Ze względu na podobieństwo wniosków dla obu rozkładów, dla rozkładu wykładniczego wyliczymy wartość ubezpieczenia, korzystając z twierdzenia 1. Z kolei dla rozkładu Erlanga, powołując się na twierdzenie 2, wyznaczmy wysokość sprawiedliwej składki p^* .

Tabela 1. Charakterystyka wybranych rozkładów fazowych

Nazwa rozkładu skoków	Rozkład wykładniczy	Rozkład Erlanga
parametry	intensywność ρ $N = 1$	intensywność ρ
γ	1	$(1, 0, \dots, 0)$
T	$-\rho$	$\begin{pmatrix} -\rho & \rho & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\rho & \rho & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\rho \end{pmatrix}$
$f_\gamma(\phi)$	$\rho e^{-\rho\phi}$	$\rho^N \frac{\phi^{N-1}}{(N-1)!} e^{-\rho\phi}$
$\psi(\phi)$	$\mu\phi + \frac{\sigma^2\phi^2}{2} + \lambda \frac{\rho}{\rho + \phi} - \lambda$	$\mu\phi + \frac{\sigma^2\phi^2}{2} + \lambda \left(\frac{\rho}{\rho + \phi} \right)^N - \lambda$

Źródło: opracowanie własne

3.1. Rozkład wykładniczy

W tej części zakładamy, że instrument bazowy jest zadany wzorem (2):

$$X_t := x + dt + \sigma B_t - \sum_{i=1}^{N_t} \eta_i,$$

gdzie η_i mają rozkład wykładniczy. Wszystkich obliczeń dla tego modelu dokonamy dla parametrów zadanych w tabeli 2.

Tabela 2. Parametry dla procesu bazowego z wykładniczymi skokami

μ	σ	λ	ρ
0,05	0,2	0,2	1,0

Źródło: opracowanie własne

W celu wyznaczenia wartości ubezpieczenia przeciwko spadkowi wyznaczamy wartości funkcji skalującej $\mathbf{W}^{(r)}$ poprzez wyznaczenie pierwiastków równania:

$$\psi(\varphi) = r.$$

Korzystając ze wzoru na wykładnik Laplace'a z tabeli 1, otrzymujemy równanie:

$$\frac{\sigma^2}{2}\phi^3 + \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\rho\right)\phi^2 + (\mu\rho - \lambda - r)\phi - r\rho = 0$$

dla $\phi \neq -\rho$. Wartości pierwiastków powyższego równania dla parametrów z tabeli 2 zostały przedstawione w tabeli 3 dla ustalonej stopy wolnej od ryzyka, równej $r = 0,01$.

Tabela 3. Pierwiastki równania $\Psi(\phi) = r$

$\Phi(r)$	$-\phi_1$	$-\phi_2$
1,622	-0,061	-5,061

Źródło: opracowanie własne

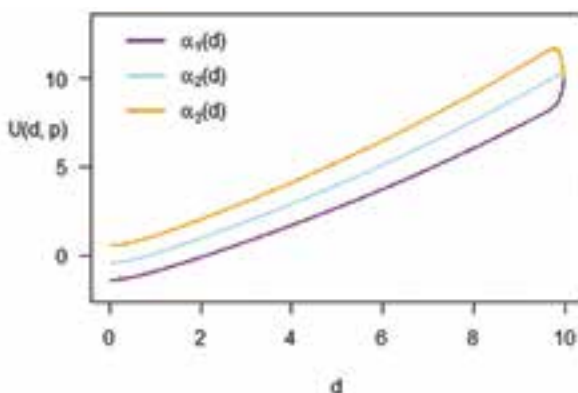
Dla ustalonych parametrów otrzymujemy wartości funkcji skalujących $W^{(r)}$ i $Z^{(r)}$:

$$\begin{aligned} W^{(r)}(\phi) &\cong 11,656e^{1,622\phi} - 5,580e^{-0,061\phi} - 6,076e^{-5,061\phi}, \\ Z^{(r)}(\phi) &\cong \frac{0,117}{1,622}e^{1,622\phi} + \frac{0,056}{0,061}e^{-0,061\phi} + \frac{0,061}{5,061}e^{-5,061\phi} + \\ &+ 1 - \frac{0,117}{1,622} - \frac{0,056}{0,061} - \frac{0,061}{5,061}. \end{aligned}$$

W celu obliczenia wartości ubezpieczenia przeciwko spadkowi musimy dokonać dodatkowych założeń dotyczących wysokości składki p , postaci funkcji α wyznaczającej wysokości wynagrodzenia oraz poziomu spadku a . Analizy numerycznej dokonamy dla trzech różnych postaci funkcji wypłaty – stałej, liniowej i kwadratowej:

$$\begin{aligned} \alpha_1(d) &= 10 \cdot 1_{\{d \geq a\}}, \\ \alpha_2(d) &= (10 + 2(d - a)) \cdot 1_{\{d \geq a\}}, \\ \alpha_3(d) &= (10 + 2(d - a)^2) \cdot 1_{\{d \geq a\}}. \end{aligned}$$

Dla porównania zachowania powyższych funkcji wypłaty przyjmujemy, że składka $p = 0,14$, a poziom ubezpieczenia $a = 10$. Wartość kontraktu dla rozważanych funkcji wypłaty przedstawiona jest na rysunku 1.

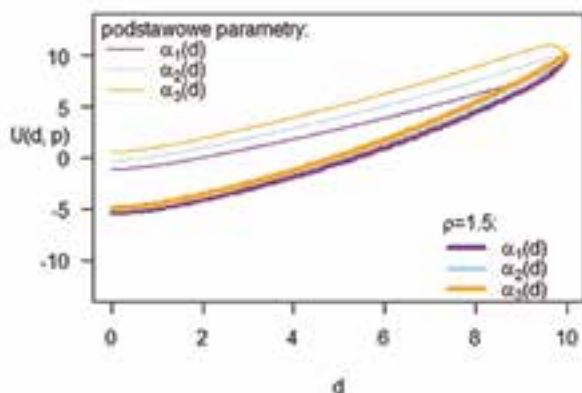


Rysunek 1. Wartość kontraktu ubezpieczeniowego dla różnych funkcji wynagrodzenia

Źródło: opracowanie własne

Analizując rysunek 1, możemy zauważyć pewne zachowanie się ceny kontraktu. Po pierwsze, wraz ze wzrostem początkowej wartości procesu spadku wzrasta również cena ubezpieczenia dla stałej funkcji wynagrodzenia. Wynika to z faktu, że spadek ustalonej wysokości $a = 10$ nastąpi szybciej, jeżeli startuje z wyższego poziomu procesu spadku. Natomiast dla liniowej i kwadratowej funkcji wynagrodzenia wartość kontraktu rośnie, a blisko pozycji startowej $d = 10$ – gwałtownie maleje. Jest to skutek możliwości zaobserwowania wyższego spadku powyżej granicznej wartości 10, a w związku z tym również wyższej wypłaty.

Z powyższej analizy możemy wywnioskować również, że jeśli zmienimy parametry procesu bazowego (2) tak, aby skoki wywierały mniejszy wpływ na realizację procesu, to różnice pomiędzy doбором różnych funkcji wypłaty się zacierają. W tym celu wyliczona została cena ubezpieczenia dla zmienionego parametru $\rho = 1,5$, który odpowiedzialny jest za wielkość skoków. Przy zwiększaniu tego parametru zmniejsza się średnio wielkość skoku. Wartość kontraktu dla podstawowych parametrów, przedstawionych w tabeli 2 ($\rho = 1$), oraz dla zmienionych parametrów ($\rho = 1,5$) została zaprezentowana na rysunku 2.



Rysunek 2. Porównanie wartości kontraktu dla różnych parametrów rozkładu skoków

Źródło: opracowanie własne

3.2. Rozkład Erlanga

W drugiej części analizy numerycznej zakładamy, że instrument bazowy jest zadany wzorem (2), gdzie skoki η_i mają rozkład Erlanga z parametrami ρ i N . Obliczeń dokonamy dla parametrów zadanych w tabeli 4.

Tabela 4. Parametry dla procesu bazowego ze skokami z rozkładu Erlanga

μ	σ	λ	ρ	N
0,05	0,2	0,2	1,0	2

Źródło: opracowanie własne

Podobnie jak poprzednio, wyliczamy numerycznie pierwiastki równania:

$$\psi(\varphi) = r.$$

Wartości te, wyliczone dla wolnej od ryzyka stopy procentowej $r = 0,01$, zostały przedstawione w tabeli 5. Podobnie jak dla rozkładu wykładniczego, na podstawie wyliczonych wartości pierwiastków powyższego równania obliczamy wartość funkcji skalujących $\mathbf{W}^{(r)}$ – korzystając ze wzoru (9) oraz $\mathbf{Z}^{(r)}$ – korzystając ze wzoru (7).

Tabela 5. Pierwiastki równania $\Psi(\varphi) = r$

$\Phi(r)$	$-\varphi_1$	$-\varphi_2$	$-\varphi_3$
2,066	-0,027	-1,928	-4,611

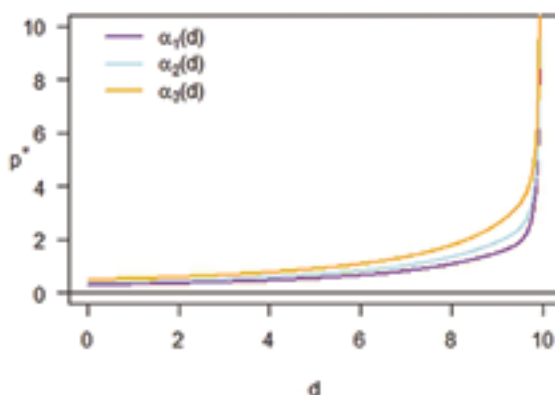
Źródło: opracowanie własne

W celu obliczenia wysokości sprawiedliwej składki dla ubezpieczenia przeciwko spadkowi korzystamy z twierdzenia 2. Postaci funkcji α wyznaczającej wysokości wynagrodzenia dokonamy dla funkcji wypłaty przedstawionych w poprzednim przykładzie – funkcji stałej, liniowej i kwadratowej:

$$\alpha_1(d) = 10 \cdot 1_{\{d \geq a\}},$$

$$\alpha_2(d) = (10 + 2(d - a)) \cdot 1_{\{d \geq a\}},$$

$$\alpha_3(d) = (10 + 2(d - a)^2) \cdot 1_{\{d \geq a\}}.$$

**Rysunek 3. Wysokość sprawiedliwej składki**

Źródło: opracowanie własne

Wartości p^* zostały zaprezentowane na rysunku 3. Dla funkcji wypłaty kwadratowej wartość ta jest najwyższa, a dla funkcji stałej – najniższa. Wynika to z faktu, że w pierwszym przypadku możliwe są wyższe wypłaty, a w związku z tym składka powinna być wyższa, by zrównoważyć przyszłą, wyższą wypłatę wynagrodzenia. Co więcej, gdy wartość startowa procesu spadku rośnie i staje się bliska poziomowi zabezpieczenia a , to wysokość składki gwałtownie rośnie. Jest to spowodowane wysoką szansą szybkiego przekroczenia, przez proces

spadku, poziomu ubezpieczenia. W związku z tym okres opłacania składki będzie krótki, więc poziom składki musi być odpowiednio wysoki, by pokryć bardzo prawdopodobną wypłatę.

4. Podsumowanie i kierunki dalszych badań

W artykule rozważyliśmy podstawowe ubezpieczenie przeciwko spadkowi powyżej ustalonego poziomu. Aktywa bazowe symulowaliśmy przy użyciu modelu Blacka-Scholesa, zaburzanego dodatkowymi skokami procesu cen. Skoki były modelowane przy użyciu pewnych rozkładów fazowych. Głównym celem tej pracy była numeryczna wycena oraz znalezienie tzw. sprawiedliwej składki w tym ubezpieczeniu.

Możliwe jest rozszerzenie przeprowadzonych badań w kilku kierunkach. Jednym z nich jest rozważenie innych procesów do modelowania instrumentu bazowego. Kolejnym podejściem może być skonstruowanie innych, bardziej ogólnych ubezpieczeń. Można np. rozważać ubezpieczenie z dodatkowym prawem do wcześniejszego wycofania się z kontraktu po opłaceniu pewnej kary za rozwiązanie umowy, bądź kontrakty terminowe.

Podziękowania

Praca ta jest częściowo finansowana przez granty Narodowego Centrum Nauki nr 2016/23/B/HS4/00566 (2017–2020) oraz nr 2016/23/N/ST1/01189 (2017–2019). Autorzy chcieliby podziękować obu recenzentom za wnikliwe uwagi.

Bibliografia

- Asmussen S., *Applied Probability and Queues*, wyd. 2, Springer-Verlag, New York 2003.
- Carr P., Zhang H., Hadjiladis O., *Maximum drawdown insurance*, „International Journal of Theoretical and Applied Finance” 2011, vol. 14(8), s. 1–36.
- Egami M., Yamazaki K., *Phase-type fitting of scale functions for spectrally negative Lévy processes*, „Journal of Computational and Applied Mathematics” 2014, vol. 264, s. 1–22.
- Grossman S.J., Zhou Z., *Optimal investment strategies for controlling drawdowns*, „Mathematical Finance” 1993, vol. 3(3), s. 241–276.

- Kyprianou A.E., Kuznetsov A., Rivero V., *The theory of scale functions for spectrally negative Lévy processes*, „Lévy Matters II” Springer Lecture Notes in Mathematics, Berlin Heidelberg 2013.
- Magdon-Ismail M., Atiya A., *Maximum drawdown*, „Risk” 2004, vol. 17(10), s. 99–102.
- Oksendal B., Sulem A., *Applied Stochastic Control of Jump Diffusions*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2005.
- Palmowski Z., Tumilewicz J., *Fair valuation of Lévy drawdown-drawup contracts with general insured and penalty functions*, przyjęte do druku w „Applied Mathematics and Optimization”, 2018.
- Palmowski Z., Tumilewicz J., *Pricing insurance drawdown-type contracts with underlying Lévy assets*, „Insurance: Mathematics and Economics” 2018, vol. 79, s. 1–14.
- Pospisil L., Vecer J., *Portfolio sensitivities to the changes in the maximum and the maximum drawdown*, „Quantitative Finance” 2010, vol. 10(6), s. 617–627.
- Sornette D., *Why Stock Markets Crash: Critical Events in Complex Financial Systems*, Princeton University Press, Princeton 2003.
- Vecer J., *Maximum drawdown and directional trading*, „Risk” 2006, vol. 19(12), s. 88–92.
- Vecer J., *Preventing portfolio losses by hedging maximum drawdown*, „Wilmott” 2007, vol. 5(4), s. 1–8.
- Zhang H., Leung T., Hadjiladis O., *Stochastic modeling and fair valuation of drawdown insurance*, „Insurance: Mathematics and Economics” 2013, vol. 53, s. 840–850.

* * *

Drawdown insurance contracts for the Lévy-type model with the phase-type jump distribution and general reward function

Abstract

In this paper, we consider an insurance contract which insure against a fall of some pre-specified level below an asset's maximal value. This situation may cause huge losses to investors and it gives a reason to create an insurance against such a situation.

We model a risky asset by the geometric Brownian motion with jumps having the phase-type distribution. We define the drawdown proces as a difference between the supremum of underlying process and its current value. For this model, we construct insurance against a huge drawdown. In this contract, an insurance company commits to pay reward at a drawdown epoch. In return, an investor pays continuously a consant premium up to the drawdown moment.

This work is based on the paper of Palmowski and Tumilewicz¹⁸, in which the authors presented a mathematical model for some insurance contracts against the drawdown for spectrally negative Lévy processes. Here, we focus on numerical analysis of one of such contracts when jumps are of the phase-type.

Keywords: drawdown process, phase-type process, insurance contracts

¹⁸ Z. Palmowski, J. Tumilewicz, *Fair valuation of Lévy drawdown-drawup contracts with general insured and penalty functions*, submitted for publication in „Applied Mathematics and Optimization”, 2018.