Michał Boczek[1], Marek Kałuszka[2]

Nierówności typu Fonga-Vašíčka dla problemu immunizacji portfela aktywów i zobowiązań

1. Wstęp

Rozważmy ciąg chwil $0 < t_1 < \ldots < t_n$. Niech a_j i l_j oznaczają dokonane w chwili $t = 0$ wyceny na chwilę $H \geq 0$, odpowiednio, wartości aktywów i zobowiązań należnych w chwili t_j. W chwili H inwestor ponownie oblicza wartość ciągu płatności. Oznaczmy przez a_j' i l_j' nowe wyceny aktywów i zobowiązań. Zmiana wartości portfela na chwilę H jest dana wzorem:

$$\Delta V = \sum_{j=1}^{n}(a_j' - l_j') - \sum_{j=1}^{n}(a_j - l_j) = \sum_{j=1}^{n}(a_j - l_j)f_j, \tag{1}$$

gdzie $f_j = a_j'/a_j - 1 = l_j'/l_j - 1$ oraz $\boldsymbol{f} = (f_j) \in F$, gdzie F jest zbiorem zaburzeń stóp procentowych.

Klasyczny problem immunizacji polega na wyborze takiego nielosowego ciągu aktywów $\boldsymbol{a} = (a_j)$ z dostępnych na rynku, by $\Delta V \geq 0$ dla dowolnego $\boldsymbol{f} \in F$ przy założeniu, że dany jest nielosowy ciąg $\boldsymbol{l} = (l_j)$ i rynek jest niezupełny, tzn. nie istnieje ciąg $\boldsymbol{a}$ taki, że $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{l}$. Badania tego problemu zapoczątkował F. Macaulay[3] w przypadku jednego deterministycznego zobowiązania. Otrzymane wyniki F.M. Redington[4] uogólnił na przypadek wielu nielosowych aktywów i zobowiązań, przy założeniu, że nowa wycena portfela jest spowodowana zmianą chwilowej stopy procentowej o δ, zatem zmiana jego wartości jest funkcją postaci:

---

[1] Politechnika Łódzka, Instytut Matematyki.

[2] Politechnika Łódzka, Instytut Matematyki.

[3] F. Macaulay, *Some theoretical problems suggested by the movement of interest rates, bond yields, and stock prices in the US since 1856*, National Bureau of Economic Research, New York 1938.

[4] F.M. Redington, *Review of the Principles of Life-Office Valuations*, „Journal of the Institute of Actuaries” 1952, vol. 3, s. 286–315.

$$\Delta V(\delta) = \sum_{j=1}^{n} (a_j - l_j)\left(e^{\delta(H-t_j)} - 1\right).$$

Jeśli $\sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{j=1}^{n} l_j$, to warunek konieczny $\Delta V'(0) = 0$ do istnienia minimum lokalnego w punkcie $\delta = 0$ ma postać $D_a = D_l$, gdzie D_z oznacza czas trwania ciągu płatności $z = (z_j)$, tzn.:

$$D_z = \sum_{j=1}^{n} t_j z_j \Big/ \sum_{j=1}^{n} z_j.$$

Warunek wystarczający na to, by $\Delta V(\delta) \geq 0$ w pewnym otoczeniu zera, ma postać:

$$\sum_{j=1}^{n} (t_j - H)^2 \left(a_j - l_j\right) > 0. \tag{2}$$

Ze wzoru (2) wynika, że dla portfeli, w których $\sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{j=1}^{n} l_j$ i $D_a = D_l$ otrzymujemy następujący warunek wystarczający dla lokalnej immunizacji: $C_a > C_l$, gdzie C_z jest wypukłością ciągu $z = (z_i)$ daną wzorem:

$$C_z = \sum_{j=1}^{n} t_j^2 z_j \Big/ \sum_{j=1}^{n} z_j. \tag{3}$$

Przy jednym zobowiązaniu płatnym w chwili $H = t_h$ mamy $D_l = H$ oraz warunek $D_a = H$ jest konieczny i wystarczający na to, by $\Delta V(\delta) \geq 0$ dla wszystkich δ, gdyż funkcja $\Delta V(\delta)$ jest wypukła. Innymi słowy, wartość portfela nigdy nie zmaleje, a może jedynie wzrosnąć. Badania klasycznego problemu immunizacji były kontynuowane przez wielu autorów, np. W. Hürlimanna[5], H.H. Panjera[6],

---

[5] W. Hürlimann, *On immunization, stop-loss order and the maximum Shiu measure*, „Insurance: Mathematics and Economics" 2002, vol. 31, s. 315–325.

[6] H.H. Panjer (red.), *Financial Economics with Applications to Investment, Insurance and Pensions*, The Actuarial Foundation, Schaumburg 1998.

G. Rządkowskiego i L.S. Zarembę[7], L.S. Zarembę[8], L.S. Zarembę i W. Smoleńskiego[9] oraz przez autorów cytowanych w tych pracach.

My zajmiemy się problemem immunizacji, gdy model jest wolny od arbitrażu, tzn. $\inf_{f \in F} \Delta V < 0$. Przełomowe rezultaty w tym kierunku zawierała praca H.G. Fonga i O. Vašíčka[10]. Rozważyli oni przypadek nielosowego ciągu aktywów i jednego nielosowego zobowiązania, tzn. $l_h = 1$ i $l_j = 0$ dla pozostałych *j*, gdzie $t_h = H$. Niech $\Delta i(t)$ oznacza zaburzenie chwilowej stopy procentowej oraz niech $f_j = \exp\ (g(t_j)) - 1$, gdzie $g(t) = \int_t^H \Delta i(s) ds$ dla dowolnego $t \geq 0$. Wspomniani autorzy wykazali, że jeśli $g''(t) \geq -\lambda$ dla dowolnego *t* i $D_a = H$, to zachodzi nierówność:

$$\Delta V \geq -\frac{\lambda}{2} \sum_{j=1}^{n} (t_j - H)^2 a_j. \tag{4}$$

Ze wzoru (4) przy $\lambda > 0$ wynika, że dolne ograniczenie dla ΔV będzie największe, gdy ze wszystkich dostępnych na rynku portfeli o czasie trwania *H* wybierzemy ten, który minimalizuje wielkość

$$M^2 = \sum_{j=1}^{n} (t_j - H)^2 a_j.$$

Podejście Fonga-Vašíčka zostało zmodyfikowane w pracy A. Balbasa i A. Ibáñeza[11], którzy założyli, że $|g'(t) - g'(s)| \leq \lambda$ dla wszystkich $t, s \geq 0$. Wtedy dla dowolnego portfela o czasie trwania *H* prawdziwa jest nierówność:

---

[7] G. Rządkowski, L.S. Zaremba, *New formulas for immunizing durations*, „Journal of Derivatives" 2000, vol. 8, s. 28–36; G. Rządkowski, L.S. Zaremba, *Shifts of the term structure of interest rates against which a given portfolio is preimmunized*, „Control and Cybernetics" 2010, vol. 39, 857–865; L.S. Zaremba, G. Rządkowski, *Determination of continuous shifts in the term structure of interest rates against which a bond portfolio is immunized*, „Control and Cybernetics" 2016, vol. 45, s. 525–537.

[8] L.S. Zaremba, *Construction of a k-immunization strategy with the highest convexity*, „Control and Cybernetics" 1998, vol. 27, s. 135–144; L.S. Zaremba, *Does Macaulay duration provide the most cost-effective immunization method – A theoretical approach*, „Foundations of Management" 2017, vol. 9, s. 99–110.

[9] L.S. Zaremba, W. Smoleński, *Optimal portfolio choice under a liability constraint*, „Annals of Operations Research" 2000, vol. 97, s. 131–141.

[10] H.G. Fong, O. Vašíček, *A risk minimizing strategy for portfolio immunization*, „Journal of Finance" 1984, vol. 39, s. 1541–1546.

[11] A. Balbás, A. Ibáñez, *When can you immunize a bond portfolio?*, „Journal of Banking and Finance" 1998, vol. 22, s. 1571–1594.

$$\Delta V \geq -\lambda M^1, \tag{5}$$

gdzie $M^1 = \sum_{j=1}^{n} | t_j - H | a_j$. Uodpornienie portfela polega na wyznaczeniu ciągu $\left(a_j\right)$, który minimalizuje M^1 w klasie portfeli, dla których $D_a = H$.

Z kolei S.K. Nawalkha i D.R. Chambers[12] założyli, że $K_1 \leq g'\left(t\right) \leq K_2$ dla $t \geq 0$, gdzie K_1 i K_2 są liczbami rzeczywistymi. Wówczas dla dowolnego portfela:

$$\Delta V \geq -\max\ (|K_1|,|K_2|)M^1. \tag{6}$$

Z nierówności (6) wynika, że uodpornienie uzyskujemy, minimalizując M^1 w klasie wszystkich dostępnych portfeli. W literaturze znajdziemy szereg innych modyfikacji nierówności typu Fonga-Vašíčka, np. w pracach: A. Balbása i innych[13], M. Kałuszki i A. Kondratiuk-Janyskiej[14], A. Kondratiuk-Janyskiej[15], L. Montrucchio i L. Peccatiego[16], S.K. Nawalkhi i D.R. Chambersa[17] czy S.K. Nawalkhi i innych[18]. Dowody nierówności (4) – (6) i ich modyfikacji wykorzystują w istotny sposób założenie o istnieniu jednego zobowiązania.

Celem pracy jest sformułowanie nowych nierówności typu Fonga-Vašíčka dla losowych ciągów aktywów i zobowiązań oraz omówienie ich związków ze znanymi wynikami.

[12] S.K. Nawalkha, D.R. Chambers, *An Improved Immunization Strategy: M-Absolute*, „Financial Analysts Journal" 1996, vol. 52, s. 69–76.

[13] A. Balbás, A. Ibáñez, S. López, *Dispersion measures as immunization risk measures*, „Journal of Banking and Finance" 2002, vol. 26, s. 1229–1244.

[14] M. Kałuszka A. Kondratiuk-Janyska, *On risk minimizing strategies for default-free bond portfolio immunization*, „Applicationes Mathematicae" 2004, vol. 31, s. 259–272.

[15] A. Kondratiuk-Janyska, *Maksyminowe strategie immunizacji portfela*, rozprawa doktorska, FTIMS, Łódź 2006.

[16] L. Montrucchio, L. Peccati, *A note on Shiu-Fisher-Weil immunization theorem*, „Insurance: Mathematics and Economics" 1991, vol. 10, s. 125–131.

[17] S.K. Nawalkha, D.R. Chambers (red.), *Interest Rate Risk Measurement and Management*, McLean KA & CJ, New York 1999.

[18] S.K. Nawalkha, G.M. Soto, J. Zhang, *Generalized M-vector models for hedging interest rate risk*, „Journal of Banking and Finance" 2003, vol. 27, s. 1581–1604; S.K. Nawalkha, G.M. Soto, N.K. Beliaeva, *Interest Rate Risk Modeling: The Fixed Income Valuation Course*, Wiley, New York 2005.

2. Nierówności immunizacyjne

2.1. Portfel maksyminowy

Oznaczmy przez $\mathcal{A}$ zbiór portfeli, jakie można stworzyć w chwili $t=0$ z dostępnych na rynku instrumentów finansowych przy zadanych ograniczeniach budżetowych, prawnych i rynkowych. Zakładamy, że ciągi aktywów i zobowiązań są losowe. Portfelem maksyminowym nazwiemy ten portfel, który osiąga największą wartość $E\Delta V$ przy najbardziej niekorzystnych zmianach stóp procentowych. Wyznaczenie portfela maksyminowego sprowadza się do rozwiązania następującego problemu optymalizacyjnego:

$$\sup_{\boldsymbol{a}\in\mathcal{A}}\inf_{f\in F} E\sum_{j=1}^{n}(a_j - l_j)f_j, \tag{7}$$

gdzie $\boldsymbol{a}=\left(a_1,\dots,a_n\right)$ jest wektorem kolumnowym, $\boldsymbol{f}=\left(f_j\right)$, natomiast F jest zbiorem losowych zaburzeń stóp procentowych. Zakładamy, że $\boldsymbol{a}=\sum_{i=1}^{N}x_i\boldsymbol{z}_i$, gdzie x_i jest liczbą zakupionych aktywów i-tego rodzaju spośród N dostępnych na rynku w chwili $t=0$, zaś $\boldsymbol{z}_i=\left(z_{i1},\dots,z_{in}\right)$ jest ciągiem wypłat z aktywów i-tego rodzaju. Bez straty ogólności założymy, że wektory $\boldsymbol{z}_i$ są liniowo niezależne, tzn. nie istnieje taki ciąg $\left(\alpha_i\right)\neq 0$, że $\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\boldsymbol{z}_i=0$ z prawdopodobieństwem 1. Jeśli dwa rodzaje aktywów generują liniowo zależne strumienie, uznajemy je za jeden rodzaj o strumieniu równym sumie ciągów ich wypłat.

Ponieważ $\boldsymbol{a}=\sum_{i=1}^{N}x_i\boldsymbol{z}_i$ dla dowolnego $\boldsymbol{a}\in\mathcal{A}$, więc:

$$\sup_{\boldsymbol{a}\in\mathcal{A}}\inf_{f\in F} E\Delta V = \sup_{x\in X}\inf_{y\in Y}\sum_{i=0}^{N}x_i y_i, \tag{8}$$

gdzie $x=\left(-1,x_1,\dots,x_N\right)$, $y=\left(y_0,y_1,\dots,y_N\right)$ oraz $y_0=\sum_{j=1}^{n}E(l_jf_j)$ i $y_i=\sum_{j=1}^{n}E(z_{ij}f_j)$ dla $i\geq 1$. Oczywiście X i Y są podzbiorami przestrzeni R^{N+1} oraz zbiór X składa się z tych portfeli, dla których $\sum_{i=1}^{N} x_i z_i \in \mathcal{A}$. Z założenia o nieujemności aktywów wynika, że jeśli brak dodatkowych ograniczeń, to X jest zbiorem wypukłym. Dla większości ograniczeń spotykanych w praktyce zbiór X także jest wypukły. Na przykład jeśli dodatkowo założymy, że $EV = c$ lub $EV \geq c$ dla $c \in R$, to X pozostanie zbiorem wypukłym. Jeśli przyjmiemy, że wartość oczekiwana zysku w dowolnej chwili t_k ma być nieujemna, to pojawia się dodatkowy warunek słabej wypłacalności w postaci $\sum_{j=1}^{k} E(a_j - l_j) \geq 0$ dla każdego $k \leq n-1$ (patrz L. Gajek[19]), ale X nadal będzie zbiorem wypukłym. Ponadto zbiór X będzie wypukły, gdy dodamy klasyczny warunek, że oczekiwany czas trwania aktywów jest równy oczekiwanemu czasowi trwania zobowiązań lub pojawią się limity na krótką sprzedaż oraz ilość zakupionych aktywów danego typu, tzn. $x_i^{'} \leq x_i \leq x_i^{''}$, gdzie ograniczenia $x_i^{'}, x_i^{''}$ są znane.

Wyznaczanie portfeli maksyminowych jest trudnym zadaniem. Jeśli X, Y są zbiorami wypukłym i zwartymi, to można zastosować twierdzenie o minimaksie i zamienić zadanie (8) na równoważne:

$$\inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} \sum_{i=0}^{N} x_i y_i. \tag{9}$$

Wynika z niego, że skład $\hat{x}$ portfela maksyminowego będzie punktem ekstremalnym zbioru X, co ułatwia wyznaczenie rozwiązania, gdy zbiór punktów ekstremalnych jest skończony[20].

W pewnych modelach zadanie wyznaczania portfela maksyminowego radykalnie się upraszcza.

Przykład 1. Załóżmy, że łączny rozkład zmiennych losowych (z_{ij}), (l_i) i (f_i) jest znany. Najczęściej przyjmuje się, że zmienne (z_{ij}) i (l_i) są niezależne od

[19] L. Gajek, *Axiom of solvency and portfolio immunization under random interest rates*, „Insurance: Mathematics and Economics" 2005, vol. 36, s. 317–328.

[20] M. Kałuszka, A. Kondratiuk-Janyska, *Bond portfolio immunization in arbitrage free models*, „Financial Markets. Principles of Modelling Forecasting and Decision-Making. FindEcon Monograph Series" 2006, vol. 1, s. 89–100; M. Kałuszka, A. Kondratiuk-Janyska, *On a bond portfolio guarantying a minimal return*, „Financial Markets. Principles of Modelling Forecasting and Decision-Making. FindEcon Monograph Series" 2008, vol. 6, s. 177–191.

ciągu (f_i) oraz $f_j = \exp\ (\int_{t_j}^{H} \Delta i(t)dt)$, gdzie $\Delta i(t)$ jest procesem gaussowskim o znanej wartości oczekiwanej $\mu(t)$ i wariancji $\sigma^2(t)$. Rozważamy zatem zbiór F, składający się z jednego zaburzenia, które jest procesem stochastycznym. Szczególnymi przypadkami są model Mertona i model Fonga-Vašíčka chwilowych stóp procentowych. Wówczas znamy liczby $y_i = \sum_{j=1}^{n} E(z_{ij} f_j)$ i $y_0 = \sum_{j=1}^{n} E(l_j f_j)$ oraz

$$M := \sup_{a\in\mathcal{A}} \inf_{f\in F} E\Delta V = \sup_{x\in X} \sum_{i=1}^{N} x_i y_i - y_0.$$

Zadanie immunizacji polega zatem na wyznaczaniu kresu górnego funkcji liniowej wielu zmiennych i jego jawne rozwiązanie można uzyskać, stosując klasyczne metody analizy. Na przykład jeśli $X = [x_1', x_1''] \cdots [x_N', x_N'']$, gdzie $x_i' \le 0 \le x_i''$, to:

$$M = \sum_{i=1}^{N} (x_i' y_i 1_{\{y_i<0\}} + x_i'' y_i 1_{\{y_i>0\}}) - y_0.$$

Oczywiście i-ta współrzędna uodpornionego portfela należy do zbioru $\{x_i', x_i''\}$ dla dowolnego i.

Jeśli dodatkowo założymy, że $EV = 0$, czyli $\sum_{i=1}^{N} x_i c_i = \ell$, gdzie $c_i = \sum_{j=1}^{n} Ez_{ij}$ oraz $\ell = \sum_{j=1}^{n} El_j$, to po wyznaczeniu z równania budżetowego liczby jednego z aktywów, powiedzmy x_1, i podstawieniu jej do wzoru na zmianę wartości portfela otrzymujemy równoważny problem wyznaczenia kresu górnego następującej sumy:

$$\frac{y_1 \ell}{c_1} + \sum_{i=2}^{N} x_i \left(y_i - \frac{c_i y_1}{c_1} \right) - y_0.$$

Dla ograniczeń $x_i' \le x_i \le x_i''$, gdzie $i = 2,\ldots,N$, uzyskujemy jawne rozwiązanie $\hat{x}_2 \ldots, \hat{x}_n$ i jeśli wartość $x_1 = \left(\ell - \sum_{i=2}^{N} \hat{x}_i c_i \right) / c_1$ znajdzie się w przedziale $[x_1', x_1'']$, to otrzymamy postać uodpornionego portfela. W przeciwnym razie do wyznaczenia jawnego rozwiązania trzeba użyć metod programowania liniowego.

2.2. Nowe nierówności typu Fonga-Vašíčka

W przypadku, gdy nie potrafimy rozwiązać problemu (8) za pomocą metody minimaksowej, można zastosować metodę Fonga-Vašíčka, tzn. najpierw oszacować z dołu wartość $E\Delta V$ za pomocą odpowiedniej nierówności, a następnie rozwiązać problem optymalizacyjny dla ograniczenia dolnego. Poniżej omówione zostanie kilka nowych nierówności tego typu.

Z nierówności Cauchy'ego mamy:

$$\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y}\sum_{i=0}^{N}x_i y_i \geq -(\inf_{x\in X}\sum_{i=0}^{N}w_i x_i^2)^{1/2}\ (\sup_{y\in Y}\sum_{i=0}^{N}\frac{y_i^2}{w_i})^{1/2}, \tag{10}$$

gdzie (w_i) są dowolnymi dodatnimi wagami. Jeśli kres dolny sumy $\sum_{i=0}^{N}w_i x_i^2$ jest osiągany dla $(\hat{x}_i)\in X$ oraz kres górny sumy $\sum_{i=0}^{N}y_i^2 / w_i$ jest osiągany dla $(\hat{y}_i)\in Y$, to maksymalizując dolne ograniczenie względem wag w_i, uzyskamy optymalne dolne ograniczenie dla przeciętnej straty portfela maksyminowego. Ponadto, jeśli istnieje taka ujemna liczba c i ciąg (w_i), że $\hat{y}_i = c\hat{x}_i w_i$ dla każdego i oraz

$$\sup_{x\in X}\sum_{i=0}^{N}x_i\hat{y}_i = \sum_{i=0}^{N}\hat{x}_i\hat{y}_i,$$

to $(\hat{x}_i)$ jest składem portfela maksyminowego w pierwotnym problemie (7).

Zamiast nierówności Cauchy'ego można użyć elementarnego oszacowania

$$\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y}\sum_{i=0}^{N}x_i y_i \geq -\inf_{x\in X}(\sum_{i=0}^{N}w_i|x_i|)\cdot\sup_{y\in Y}\max_{j}\ |\frac{y_i}{w_i}| \tag{11}$$

lub innej nierówności, jak nierówność Younga (patrz np. M. Kałuszka i A. Kondratiuk-Janyska[21]). Oszacowanie (11) może być lepsze od (10) i na odwrót.

Z ograniczenia $\rho \geq -1$ dla współczynnika korelacji ρ i z tożsamości $E(XY) = EXEY + \rho\sqrt{\mathrm{Var}X\cdot\mathrm{Var}Y}$ otrzymujemy wzór:

---

21 M. Kałuszka, A. Kondratiuk-Janyska, *Generalized duration measures in a risk immunization setting. Implementation of the Heath-Jarrow-Morton model*, „Applicationes Mathematicae" 2006, vol. 33, s. 145–157.

$$\sum_{i=0}^{N} x_i y_i \geq n\bar{x}\,\bar{y} - (\sum_{i=0}^{N}(x_i - \bar{x})^2)^{1/2}\,(\sum_{i=0}^{N}(y_i - \bar{y})^2)^{1/2}, \tag{12}$$

który sprowadza zadanie immunizacji do wyznaczenia minimum względem $x \in X$ sumy $\sum_{i=0}^{N}(x_i - \bar{x})^2$ przy ustalonej wartości średniej arytmetycznej $\bar{x}$, a następnie obliczenia maksimum prawej strony względem $\bar{x}$.

Do wyznaczenia kolejnej nierówności immunizacyjnej zastosujemy następujący lemat.

Lemat 1. *Dla dowolnego niemalejącego ciągu* (y_k)

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \geq n\,\bar{x}_n \bar{y}_n \tag{13}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $\bar{x}_n \geq \bar{x}_k$ *dla każdego k. Równość w (13) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy* $(y_{k+1} - y_k)(\bar{x}_n - \bar{x}_k) = 0$ *dla dowolnego k.*

Dowód. Niech $\bar{x}_n \geq \bar{x}_k$ dla dowolnego k oraz $X_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$. Z tożsamości Abela (odpowiednika wzoru na całkowanie przez części) uzyskujemy:

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x}_n)y_k = (X_n - n\bar{x}_n)y_n - \sum_{k=1}^{n-1}(X_k - k\bar{x}_n)(y_{k+1} - y_k) = \sum_{k=1}^{n-1}k(\bar{x}_n - \bar{x}_k)(y_{k+1} - y_k).$$

Stąd otrzymujemy nierówność (13). Równość w (13) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $(\bar{x}_n - \bar{x}_k)(y_{k+1} - y_k) = 0$ dla dowolnego k.

Wstawiając do wzoru (13) ciąg (y_k) z jedynką od j-tego wyrazu i pozostałymi wyrazami równymi zero, dostajemy warunek konieczny w następującej postaci:

$$\sum_{k=j}^{n} x_j \geq (n - j + 1)\bar{x}_n$$

dla $j = 1,2,\ldots,n$ równoważny warunkowi $\bar{x}_n \geq \bar{x}_j$ dla wszystkich j, ckd.

Niech $y_{0:N} \leq \ldots \leq y_{N:N}$ będą uporządkowanymi wyrazami ciągu (y_i), zaś (x_i') będą konkomitantami w ciągu $(x_0, y_0),\ldots,(x_N, y_N)$, tzn. x_i' jest elementem ciągu

(x_i) występującym w parze z $y_{i:N}$ po uporządkowaniu współrzędnych (y_i) w kolejności rosnącej. Z Lematu 1 wynika, że jeśli $\overline{x}_N \geq x_k'$ dla każdego k, to:

$$\sum_{i=0}^{N} x_i y_i = \sum_{i=0}^{N} x_i' y_{i:N} \geq (N+1)\overline{x}_N \overline{y}_N, \tag{14}$$

zatem:

$$\sup_{x\in X} \inf_{y\in Y} \sum_{i=0}^{N} x_i y_i \geq (N+1) \sup_{x\in X} \overline{x}_N \inf_{y\in Y} \overline{y}_N. \tag{15}$$

Gdy bezpośrednie zastosowanie nierówności do sumy $\sum_{i=0}^{N} x_i y_i$ nie prowadzi do zadowalających wyników, można najpierw ją przekształcić, a dopiero potem stosować powyższe nierówności, co zostanie pokazane na dwóch przykładach.

W pierwszym skorzystamy z następującej tożsamości:

$$\sum_{k=0}^{N} x_k y_k = \sum_{k=0}^{N} (x_k - x_{k-1}) \sum_{j=k}^{N} y_j, \tag{16}$$

gdzie $x_{-1} = 0$. Po użyciu nierówności Cauchy'ego otrzymujemy oszacowanie:

$$\sup_{x\in X} \inf_{y\in Y} \sum_{i=0}^{N} x_i y_i \geq -(\inf_{x\in X} \sum_{k=0}^{N} (x_k - x_{k-1})^2)^{1/2} (\sup_{y\in Y} \sum_{k=0}^{N} (\sum_{j=k}^{N} y_j)^2)^{1/2}. \tag{17}$$

W drugim przykładzie skorzystamy z tożsamości Abela:

$$\sum_{k=0}^{N} x_k y_k = \sum_{k=0}^{N} (x_k - x_{k+1}) \sum_{i=0}^{k} y_i, \tag{18}$$

gdzie (x_k) i (y_k) są dowolnymi ciągami i $x_{N+1} = 0.$ Z (18) wynika, że

$$\sup_{x\in X} \inf_{y\in Y} \sum_{k=0}^{N} x_k y_k \geq -\inf_{x\in X} \sum_{k=0}^{N} | x_k - x_{k+1} | \cdot \sup_{y\in Y} \max_{k} | \sum_{i=0}^{k} y_i |. \tag{19}$$

Oszacowania (10)–(12), (15), (17) i (19) nie pojawiły się do tej pory w literaturze.

Przykład 2. Rozważmy przypadek jednego zobowiązania w momencie $H = t_h > 0$ o wartości l. Aby spłacić zobowiązanie, inwestor nabywa x_i skarbowych obligacji zerokuponowych dostępnych na rynku w chwili $t=0,$ które wypłacają jednostkę monetarną w chwili $t_i \neq H$ dla $i=1,2,\ldots,n.$ Prognozowalna wartość portfela V w chwili H jest dana wzorem:

$$V=\sum_{j=1}^{n} x_j \exp\ (\int_{t_j}^{H} i(t)\,dt)-l,$$

ponieważ inwestor zakłada, że kwoty wypłacone przed chwilą H będą reinwestowane przy chwilowej stopie $i(t),$ a do dyskonta kwot wypłacanych po chwili H używa tej samej stopy. Jeśli rzeczywiste przyszłe stopy będą równe $i'(t),$ to wartość portfela w chwili H będzie równa:

$$V'=\sum_{j=1}^{n} x_j \exp\ (\int_{t_j}^{H} i'(t)\,dt)-l.$$

Stąd wynika, że $E\Delta V=E(V'-V)=\sum_j x_j y_j,$ gdzie

$$y_j=E\exp\ (\int_{t_j}^{H} i'(t)\,dt)-\exp\ (\int_{t_j}^{H} i(t)\,dt).$$

Położżmy $M:=\sup_{\boldsymbol{a}\in\mathcal{A}}\inf_{f\in F} E\Delta V,$ gdzie $\boldsymbol{a}=(a_1,\ldots,a_n),$ $\boldsymbol{f}=(f_1,\ldots,f_n),$ $a_j=x_j\exp$ $(\int_{t_j}^{H} i(t)\,dt),$ $a_j'=x_j\exp(\int_{t_j}^{H} i'(t)\,dt)$ oraz

$$f_j=\exp\ (\int_{t_j}^{H}(i'(t)-i(t))dt)-1$$

dla każdego j. Zbiór $\mathcal{A}$ wyznaczamy z dodatkowych ograniczeń budżetowych i rynkowych, zaś F jest rodziną dopuszczalnych zaburzeń stopy $i(t).$ Ze wzorów (10)–(12), (17) i (19) otrzymujemy następujące oszacowania dla M:

$$M\geq-(\inf_{x\in X}\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{1/2}(\sup_{y\in Y}\sum_{i=1}^{n} y_i^2)^{1/2},$$

$$M\geq-\inf_{x\in X}(\sum_{i=1}^{n}|x_i|)\sup_{y\in Y}\max_j|y_i|,$$

$$M\geq\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y}\left(n\overline{x}\,\overline{y}-(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2)^{1/2}\ (\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2)^{1/2}\right),$$

$$M \geq -(\inf_{x \in X} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})^2)^{1/2} (\sup_{y \in Y} \sum_{k=1}^{n} (\sum_{j=k}^{n} y_j)^2)^{1/2},$$

$$M \geq -\inf_{x \in X} \sum_{k=1}^{n} | x_k - x_{k+1} | \cdot \sup_{y \in Y} \max_k | \sum_{i=1}^{k} y_i |$$

gdzie $x_0 = x_{n+1} = 0$ oraz X i Y są podzbiorami R^n.

Przykład 3. Aby zilustrować dokładność oszacowań immunizacyjnych, podamy ich wartości numeryczne dla wybranych portfeli. Posłużymy się danymi z przykładu 4.2 z pracy L. Gajka i E. Krajewskiej[22]. Zakładamy, że $H = 3$, $l = e^{3 \cdot 0,05}$ i na rynku dostępne są obligacje zerokuponowe z terminami wykupu $t_1 = 1$, $t_2 = 2$ i $t_5 = 5$, które wypłacają jednostkę monetarną. Niech $i(t) = 0,05$, natomiast zbiór F składa się z jednej deterministycznej funkcji $i'(t) = 0,05 + 0,1 \sin 5t$, zatem $E\Delta V = \Delta V$. Ponadto zakładamy, że wartość wypłat z obligacji w chwili H przy stopie $i(t)$ jest równa wartości zobowiązania, tzn.:

$$l = x_1 e^{2 \cdot 0,05} + x_2 e^{0,05} + x_5 e^{-2 \cdot 0,05}.$$

Portfel

$$x := (x_1, x_2, x_5) = (0, (2/3) e^{0,1}, (1/3) e^{0,25}) \approx (0, 0,737, 0,428)$$

ma czas trwania równy 3 i minimalizuje M^2 Fonga-Vašíčka przy warunku $x_i \geq 0$ dla każdego i. Łatwo obliczyć, że

$$y_2 = \exp\ (\int_2^3 i'(t)\, dt) - \exp\ (\int_2^3 i(t)\, dt) = -0,0167$$

oraz $y_5 = 0,0322$, zatem $\Delta V = x_2 y_2 + x_5 y_5 = 0,001477$. W pracy L. Gajka i E. Krajewskiej[23] uzyskano oszacowanie $\Delta V \geq -0,04$.

Analogicznie jak w (10) otrzymujemy następujące oszacowanie:

$$\Delta V = x_2 y_2 + x_5 y_5 \geq -(x_2^2 + x_5^2)^{1/2} (y_2^2 + y_5^2)^{1/2} = -0,0309.$$

---

[22] L. Gajek, E. Krajewska, *A new immunization inequality for random streams of assets, liabilities and interest rates*, „Insurance: Mathematics and Economics" 2013, vol. 53, s. 624–631.

[23] Ibidem.

Kolejno, ze wzorów (11), (12), (17) i (19), otrzymujemy dolne ograniczenia dla ΔV w postaci:

$$-0{,}0375, \quad 0{,}001409, \quad -0{,}0285, \quad -0{,}01746.$$

Nie stosujemy wzoru (15), gdyż nie jest spełnione założenie $\overline{x_n} \geq \overline{x_k'}$ dla $k = 1$.

Podamy teraz prosty przykład zastosowania nierówności w problemie ubezpieczeniowym.

Przykład 4. Załóżmy, że x-latkowi wystawiono polisę gwarantującą wypłatę kwoty l na koniec roku śmierci. Składki pobierane są na początku każdego n-tego roku w wysokości P_n aż do chwili śmierci, przy czym ciąg liczb nieujemnych P_n jest ustalany w momencie zakupu polisy. Składki są inwestowane na rachunku bankowym. Z zasady równoważności na chwilę wypłaty wynika, że jeśli nie bierzemy pod uwagę kosztów, to ciąg $\left(P_n\right)$ należy wyznaczyć z równania:

$$V\left(i\right) := \sum_{j=0}^{\infty} {}_j p_x q_{x+j} \sum_{k=0}^{j} P_{k+1} \exp\left(\int_k^{j+1} i\left(t\right) dt \right) - l = 0,$$

gdzie $i = \left(i\left(t\right)\right)_{t \geq 0}$ oznacza prognozowaną (techniczną) stopę procentową oraz ${}_j p_x q_{x+j}$ jest prawdopodobieństwem, że x-latek przeżyje j pełnych lat. Istnieje nieskończenie wiele ciągów składek spełniających zasadę równoważności. Najczęściej, z uwagi na prostotę obliczeń, wybiera się ciąg stały, ale ten wybór może nie spełniać wymagań klienta. Immunizacja umożliwia eliminację ciągów składek, dla których strata ubezpieczyciela, dana wzorem:

$$\inf_{i' \in I} E\left(V\left(i'\right) - V\left(i\right)\right)$$

jest największa, gdzie $i' = \left(i'\left(t\right)\right)_{t \geq 0}$ oznacza rzeczywistą stopę procentową z pewnego zbioru I. Po zamianie kolejności sumowania we wzorach na $V\left(i\right)$ i $V\left(i'\right)$ mamy:

$$E\left(V\left(i'\right) - V\left(i\right)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_k,$$

gdzie $x_k = P_{k+1}$ oraz

$$y_k = \sum_{j=k}^{\infty} {}_j p_x q_{x+j} \left(E \exp\left(\int_k^{j+1} i'\left(t\right) dt \right) - \exp\left(\int_k^{j+1} i\left(t\right) dt \right) \right).$$

Do oszacowania straty można więc użyć tych samych metod, dzięki którym uzyskaliśmy nierówności (10)–(12) i inne.

2.3. Inne znane w literaturze nierówności

W literaturze znanych jest kilka nierówności immunizacyjnych, ale są one niezależne od nierówności zamieszczonych w podrozdziale 2.2. Pierwszą z nich podał L. Gajek[24]. Niech $S_k = \sum_{j=1}^{k}(a_j - l_j)$. Udowodniono, że jeśli $E(f_{k+1} - f_k) \le K$ dla $K \ge 0$, zmienna S_k jest nieskorelowana z $f_{k+1} - f_k$ oraz $ES_k \ge 0$ dla każdego k, to zachodzi nierówność:

$$E\Delta V \ge E\left(S_n\left(f_n - nK\right)\right) + KE\sum_{k=1}^{n} k\left(a_k - l_k\right). \tag{20}$$

Podano także pewną wersję oszacowania (20) przy słabszym założeniu o ciągu $\left(f_k\right)$, ale silniejszym założeniu o $\left(S_k\right)$. Inne nierówności podobnego typu można znaleźć w pracach M. Kałuszki i A. Kondratiuk-Janyskiej[25].

Następne oszacowanie, podane przez tych autorów[26], wynika ze wzoru:

$$E\Delta V = E\sum_{k=1}^{n} f_k\left(a_k - l_k\right) = E\sum_{k=1}^{n}\left(f_k - f_{k-1}\right)\left(S_n - S_{k-1}\right),$$

gdzie $S_k = \sum_{j=1}^{k}(a_j - l_j)$ i $f_0 = S_0 = 0$. Po użyciu nierówności Cauchy'ego otrzymujemy wzór:

$$E\Delta V \ge -K\left(E\sum_{k=1}^{n}(S_n - S_{k-1})^2\right)^{1/2}, \tag{21}$$

[24] L. Gajek, op.cit.

[25] M. Kałuszka, A. Kondratiuk-Janyska, *Generalized duration measures in a risk immunization setting. Implementation of the Heath-Jarrow-Morton model*, „Applicationes Mathematicae" 2006, vol. 33, s. 145–157; A. Kondratiuk-Janyska, M. Kałuszka, *Assets/liabilities portfolio immunization as an optimization problem*, „Control and Cybernetics" 2006, vol. 35, s. 335–349.

[26] A. Kondratiuk-Janyska, M. Kałuszka, *Assets/liabilities portfolio*….

gdzie $K^2 = E\sum_{k=1}^{n}(f_k - f_{k-1})^2$. Trzecie znane oszacowanie immunizacyjne korzysta również z nierówności Cauchy'ego[27]:

$$E\Delta V \geq -\left(\sum_{j=1}^{n} E(a_j - l_j)^2\right)^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{n} Ef_j^2\right)^{1/2}. \tag{22}$$

Zauważmy, że do wyznaczenia kresu dolnego po $\boldsymbol{a} \in A$ musimy znać momenty mieszane $E(a_j l_j)$, podczas gdy w zadaniu (8) ich nie było.

W pracy L. Gajka i E. Krajewskiej[28] zaproponowano następującą nierówność immunizacyjną:

$$E\Delta V \geq EV \cdot E\overline{\boldsymbol{f}} - \mathcal{L}^2\left(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{l}\right)\mathcal{L}^2\left(\boldsymbol{f}\right), \tag{23}$$

gdzie $V = \sum_{j=1}^{n}(a_j - l_j)$, $\overline{y}$ jest średnią arytmetyczną z ciągu $y = \left(y_1, \ldots, y_n\right)$ oraz

$$\mathcal{L}^2\left(y\right) = \left(\sum_{j=1}^{n} E(y_j - E\overline{y})^2\right)^{1/2}.$$

Nierówność (23) wynika ze wzoru:

$$\frac{1}{n}E\Delta V = E(XY) = EXEY + \rho\left(\operatorname{Var} X \operatorname{Var} Y\right)^{1/2}$$

i z nierówności $\rho \geq -1$, gdzie ρ jest współczynnikiem korelacji zmiennych X i Y, $\left(X,Y\right) = \left(a_J - l_J, f_J\right)$ oraz J jest niezależną od ciągów $\left(a_i\right)$ i $\left(l_i\right)$ zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na zbiorze $\left\{1,2,\ldots,n\right\}$. Oszacowanie (23) jest lepsze od (22), ale musimy znać EV i $E\overline{\boldsymbol{f}}$.

Aby użyć nierówności (20)–(23) do rozwiązania problemu immunizacji należy wyznaczyć kresy górne z prawych stron tych nierówności po losowych wektorach $\boldsymbol{a}$ ze zbioru $\mathcal{A}$. Pokażemy jak to zrobić na przykładzie oszacowania (23). W pracy E. Krajewskiej[29] wyznaczono maksimum prawej strony nierów-

---

27 Patrz np. E. Krajewska, *Geometryczna teoria immunizacji na rynkach niezupełnych*, rozprawa doktorska, FTIMS, Łódź 2014.

28 L. Gajek, E. Krajewska, op.cit.

29 E. Krajewska, op.cit.

ności (23) po $\boldsymbol{a} \in \mathcal{A}$, gdy wartości $E\overline{\boldsymbol{f}}$ i $\mathcal{L}^2(\boldsymbol{f})$ są ustalone oraz $EV = c$, gdzie $c \in R$ jest znane, co prowadzi do problemu wyznaczania minimum z $\mathcal{L}^2(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{l})$ po $\boldsymbol{a} \in \mathcal{A}$ przy warunku $EV = c$. Ściśle rzecz biorąc, rozważano problem

$$\min_{\boldsymbol{a} \in \mathcal{A}} \sum_{j=1}^{n} w_j E\left(a_j - l_j - \frac{c}{n}\right)^2 \quad \text{p.w.} \quad \sum_{j=1}^{n} E(a_j - l_j) = c, \tag{24}$$

gdzie skrót „p.w." oznacza „przy warunku". Wagi $w_j > 0$ pojawiają się w (24) w celu uogólnienia zadania. Rozwiązanie problemu określonego formułą (24) polegało na zastosowaniu metody kolejnych rzutów na podprzestrzenie afiniczne w pewnej nieskończeniewymiarowej przestrzeni Hilberta złożonej z losowych wektorów.

Przypomnijmy, że $\mathcal{A}$ jest podzbiorem przestrzeni liniowej N-wymiarowej z bazą $\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_N$, zatem problem (24) jest w istocie problemem optymalizacyjnym w R^N, podobnie jak pozostałe problemy optymalizacyjne związane z nierównościami (20)–(22). Ograniczenia wyznaczające zbiór $\mathcal{A}$ w pracy E. Krajewskiej[30] są funkcjami liniowymi, a zatem uogólnione zadanie (24) można zapisać w postaci:

$$\min_{x \in R^N} \sum_{j=1}^{n} w_j E\left(\sum_{i=1}^{N} x_i z_{ij} - \tilde{l}_j\right)^2 \quad \text{p.w.} \quad \sum_{i=1}^{N} x_i c_{ki} = g_k,\ k = 1, 2, \ldots, m, \tag{25}$$

gdzie $x = (x_1, \ldots, x_N)$ jest wektorem kolumnowym, $\tilde{l}_j = l_j + c/n$ oraz $c_{ki} = \sum_{j=1}^{n} q_{kj} E z_{ij}$ dla znanych stałych q_{ki}, g_k. Problem (25) można zatem zapisać jak następuje:

$$\min_{x \in R^N} \left(x^T \boldsymbol{A} x - 2 d^T x\right) \quad \text{p.w.} \quad c_k^T x = g_k, \quad k = 1, \ldots, m, \tag{26}$$

gdzie $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ jest macierzą symetryczną, $d = (d_1, \ldots, d_N) \in R^N$ i $c_k = (c_{k1}, \ldots, c_{kN}) \in$ $\in R^N$ są wektorami kolumnowymi oraz

$$a_{ik} = \sum_{j=1}^{n} w_j E(z_{ij} z_{kj}), \quad d_i = \sum_{j=1}^{n} w_j E(\tilde{l}_j z_{ij}).$$

Macierz $\boldsymbol{A}$ jest dodatnio określona, gdyż wagi w_i są dodatnie i wektory $\boldsymbol{z}_i$ są liniowo niezależne. Załóżmy, że wektory $c_1, \ldots, c_m$ są liniowo niezależne, gdyż

30 Ibidem.

w przeciwnym razie można zredukować liczbę ograniczeń w problemie (26). Zgodnie z metodą mnożników Lagrange'a, najpierw wyznaczamy rozwiązanie następującego zadania:

$$\min_{x\in R^N}\left(x^T\boldsymbol{A}x-2d^Tx+2\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\left(g_k-c_k^Tx\right)\right). \tag{27}$$

Przyrównując odpowiednie pochodne do zera otrzymujemy warunek $\boldsymbol{A}x=d+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k c_k$. Stąd:

$$x=\boldsymbol{A}^{-1}\left(d+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k c_k\right). \tag{28}$$

Mnożniki wyznaczamy z ograniczeń równościowych, co prowadzi do rozwiązania układu równań liniowych postaci:

$$\sum_{k=1}^{m}\lambda_k c_i^T\boldsymbol{A}^{-1}c_k=g_i-c_i^T\boldsymbol{A}^{-1}d,\quad i=1,\ldots,m. \tag{29}$$

Macierz główna $\boldsymbol{M}=(c_i^T\boldsymbol{A}^{-1}c_k)_{i,k=1}^m$ układu (29) jest macierzą Grama, ponieważ $\langle c,d\rangle=c\boldsymbol{A}^{-1}d^T$ jest iloczynem skalarnym w R^N, zatem wyznacznik tej macierzy jest różny od zera, gdyż wektory $c_1,\ldots,c_m$ są liniowo niezależne. Istnieje jedno rozwiązanie $\lambda=\left(\lambda_1,\ldots,\lambda_m\right)$ układu (29), dane wzorem:

$$\lambda=\boldsymbol{M}^{-1}B, \tag{30}$$

gdzie $B\in R^N$ jest wektorem kolumnowym o wyrazach $g_i-c_i^T\boldsymbol{A}^{-1}d$ dla $i=1,\ldots,m.$ Podsumowując, z (28) i (30) wynika, że rozwiązaniem problemu (25) jest wektor:

$$\hat{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\left(d+\boldsymbol{C}\boldsymbol{M}^{-1}B\right),$$

gdzie $\boldsymbol{C}$ jest macierzą o kolumnach $c_1,\ldots,c_m$. Oczywiście wektor wypłat optymalnego portfela ma postać:

$$\hat{\boldsymbol{a}}=\sum_{i=1}^{N}\hat{x}_i\boldsymbol{z}_i=\boldsymbol{Z}^T\hat{x},$$

gdzie $\hat{x}=\left(\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_N\right)$ i $\boldsymbol{Z}=\left(z_{ij}\right)$ jest macierzą typu $\left(N,n\right)$.

W omawianym opracowaniu E. Krajewska[31] rozważa również przypadek, gdy w zadaniu (24) część zobowiązań można pokryć z wypłat aktywów, tzn.:

$$\tilde{\boldsymbol{l}} = \boldsymbol{l}^{rep} + \tilde{\boldsymbol{l}}^{non}, \tag{31}$$

gdzie $\tilde{\boldsymbol{l}} = \left(l_1 + c/n, \ldots, l_n + c/n\right)$ oraz $\boldsymbol{l}^{rep} = \sum_{i=1}^{N} x_i^{rep} \boldsymbol{z}_i \in \mathcal{A}$ dla pewnego ciągu $\left(x_i^{rep}\right) \in$ $\in R^N$ oraz $\tilde{\boldsymbol{l}}^{non} = \left(l^{non} + c/n, \ldots, l^{non} + c/n\right) \notin \mathcal{A}$. Wówczas zadanie (24) ma postać:

$$\min_{\boldsymbol{a} \in \mathcal{A}} \sum_{j=1}^{n} w_j E\left(\left(a_j - l_j^{rep}\right) - \left(l_j^{non} + c/n\right)\right)^2 \quad \text{p.w.} \quad \sum_{j=1}^{n} E(a_j - l_j^{rep}) = c + \sum_{j=1}^{n} E l_j^{non}. \tag{32}$$

Jeśli $\mathcal{A}$ jest podprzestrzenią liniową, to $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{l}^{rep} \in \mathcal{A}$, zatem problem (32) można zapisać w równoważnej postaci:

$$\min_{\boldsymbol{a} \in \mathcal{A}} \sum_{j=1}^{n} w_j E(a_j - \tilde{l}_j^{non})^2 \quad \text{p.w.} \quad \sum_{j=1}^{n} E a_j = \sum_{j=1}^{n} E \tilde{l}_j^{non}. \tag{33}$$

Jawne rozwiązanie problemu (33) uzyskujemy w ten sam sposób, jak jawne rozwiązanie zadania (25), gdy przestrzeń $\mathcal{A}$ ma wymiar $m-1$, ponieważ pierwsze ograniczenie równościowe w (25) jest ograniczeniem równościowym z (33), zaś pozostałe $m-1$ ograniczeń otrzymujemy z opisu przestrzeni $\mathcal{A}$.

W praktyce, oprócz ograniczeń liniowych często pojawiają się dodatkowe ograniczenia na skład portfela, które należy dodać do zadania (25), ale w większości przypadków zmodyfikowany problem optymalizacyjny będzie problemem programowania kwadratowego lub całkowitoliczbowego (gdy x_i muszą być liczbami całkowitymi) i do jego rozwiązania trzeba użyć twierdzenia Karusha-Kuhna-Tuckera lub metod numerycznych (patrz np. M.J. Best[32]).

Podziękowanie

Dziękujemy recenzentom za krytyczne uwagi, które przyczyniły się do ulepszenia tekstu.

---

31 Ibidem.

32 M.J. Best, *Quadratic programming with computers programs*, CRR Press, Boca Raton 2017.

Bibliografia

Balbás A., Ibáñez A., *When can you immunize a bond portfolio?*, „Journal of Banking and Finance" 1998, vol. 22, s. 1571–1594.

Balbás A., Ibáñez A., López S., *Dispersion measures as immunization risk measures*, „Journal of Banking and Finance" 2002, vol. 26, s. 1229–1244.

Best M.J., *Quadratic programming with computers programs*, CRR Press, Boca Raton 2017.

Fong H.G., Vašíček O., *A risk minimizing strategy for portfolio immunization*, „Journal of Finance" 1984, vol. 39, s. 1541–1546.

Gajek L., *Axiom of solvency and portfolio immunization under random interest rates*, „Insurance: Mathematics and Economics" 2005, vol. 36, s. 317–328.

Gajek L., Krajewska E., *A new immunization inequality for random streams of assets, liabilities and interest rates*, „Insurance: Mathematics and Economics" 2013, vol. 53, s. 624–631.

Hürlimann W., *On immunization, stop-loss order and the maximum Shiu measure*, „Insurance: Mathematics and Economics" 2002, vol. 31, s. 315–325.

Kałuszka M., Kondratiuk-Janyska A., *Bond portfolio immunization in arbitrage free models*, „Financial Markets. Principles of Modelling Forecasting and Decision-Making. FindEcon Monograph Series" 2006, vol. 1, s. 89–100.

Kałuszka M., Kondratiuk-Janyska A., *Generalized duration measures in a risk immunization setting. Implementation of the Heath-Jarrow-Morton model*, „Applicationes Mathematicae" 2006, vol. 33, s. 145–157.

Kałuszka M., Kondratiuk-Janyska A., *On a bond portfolio guarantying a minimal return*, „Financial Markets. Principles of Modelling Forecasting and Decision-Making. FindEcon Monograph Series" 2008, vol. 6, s. 177–191.

Kałuszka M., Kondratiuk-Janyska A., *On risk minimizing strategies for default-free bond portfolio immunization*, „Applicationes Mathematicae" 2004, vol. 31, s. 259–272.

Kondratiuk-Janyska A., *Maksyminowe strategie immunizacji portfela*, rozprawa doktorska, FTIMS, Łódź 2006.

Kondratiuk-Janyska A., Kałuszka M., *Assets/liabilities portfolio immunization as an optimization problem*, „Control and Cybernetics" 2006, vol. 35, s. 335–349.

Krajewska E., *Geometryczna teoria immunizacji na rynkach niezupełnych*, rozprawa doktorska, FTIMS, Łódź 2014.

Macaulay F., *Some theoretical problems suggested by the movement of interest rates, bond yields, and stock prices in the US since 1856*, National Bureau of Economic Research, New York 1938.

Montrucchio L., Peccati L., *A note on Shiu-Fisher-Weil immunization theorem*, „Insurance: Mathematics and Economics" 1991, vol. 10, s. 125–131.

Nawalkha S.K., Chambers D.R., *An Improved Immunization Strategy: M-Absolute*, „Financial Analysts Journal" 1996, vol. 52, s. 69–76.

Nawalkha S.K., Chambers D.R. (red.), *Interest Rate Risk Measurement and Management*, McLean KA & CJ, New York 1999.

Nawalkha S.K., Soto G.M., Beliaeva N.K., *Interest Rate Risk Modeling: The Fixed Income Valuation Course*, Wiley, New York 2005.

Nawalkha S.K., Soto G.M., Zhang J., *Generalized M-vector models for hedging interest rate risk*, „Journal of Banking and Finance" 2003, vol. 27, s. 1581–1604.

Panjer H.H. (red.), *Financial Economics with Applications to Investment, Insurance and Pensions*, The Actuarial Foundation, Schaumburg 1998.

Redington F.M., *Review of the Principles of Life-Office Valuations*, „Journal of the Institute of Actuaries" 1952, vol. 3, s. 286–315.

Rządkowski G., Zaremba L.S., *New formulas for immunizing durations*, „Journal of Derivatives" 2000, vol. 8, s. 28–36.

Rządkowski G., Zaremba L.S., *Shifts of the term structure of interest rates against which a given portfolio is preimmunized*, „Control and Cybernetics" 2010, vol. 39, s. 857–865.

Zaremba L.S., *Construction of a k-immunization strategy with the highest convexity*, „Control and Cybernetics" 1998, vol. 27, s. 135–144.

Zaremba L.S., *Does Macaulay duration provide the most cost-effective immunization method – A theoretical approach*, „Foundations of Management" 2017, vol. 9, s. 99–110.

Zaremba L.S., Rządkowski G., *Determination of continuous shifts in the term structure of interest rates against which a bond portfolio is immunized*, „Control and Cybernetics" 2016, vol. 45, s. 525–537.

Zaremba L.S., Smoleński W., *Optimal portfolio choice under a liability constraint*, „Annals of Operations Research" 2000, vol. 97, s. 131–141.

* * *

On the Fong-Vašíček type inequalities for the assets/liabilities portfolio immunization problem

Abstract

In this paper, we discuss selected aspects of the problem of assets/liabilities portfolio immunization against changes in the interest rate structure. This issue is important for a number of financial institutions: banks, insurance companies, investment funds or pension funds. We give some new estimates for the value of the portfolio at a fixed time in the future and discuss their relationship with the existing results.

Keywords: immunization, interest rates, investment portfolio