

Modelowanie śmiertelności. Wpływ specyfikacji modelu na jakość prognoz śmiertelności

1. Wstęp

Ostatnie dziesięciolecia przyniosły duże zmiany struktury demograficznej krajów uprzemysłowionych, wynikające ze wzrostu przeżywalności praktycznie we wszystkich przedziałach wiekowych, przy jednoczesnym spadku liczby urodzeń. W efekcie populacje w krajach rozwiniętych stały się zauważalnie starsze. Zwiększa się odsetek osób dożywających wieku emerytalnego i korzystających ze świadczeń emerytalnych, wydłuża się także okres, przez jaki systemy emerytalne i zakłady ubezpieczeń na życie wypłacają świadczenia.

Prognozy oczekiwanej długości życia w momencie narodzin opracowywane przez urzędy statystyczne państw europejskich w ostatnich dziesięcioleciach okazywały się niedoszacowane. Pojawienie się w literaturze nowych modeli śmiertelności daje nadzieję na zmianę tej sytuacji. Niemniej bogactwo specyfikacji modeli rodzi pytanie, który model wybrać do prognozowania. Okazuje się, że modele, które dobrze opisują dynamikę zmian współczynnika śmiertelności w przeszłości, niekoniecznie dobrze sobie radzą z generowaniem trafnych prognoz. Na jakość prognoz ma również wpływ specyfikacja modelu wykorzystywanego do wyznaczania przyszłych parametrów okresowych i kohortowych. Dotąd w literaturze nie pojawiły się prace, w których w sposób systematyczny zbadano ten efekt. Najczęściej specyfikacja modelu prognostycznego dla parametrów okresowych i kohortowych przyjmowana jest *a priori*, ewentualnie dobierana na podstawie kryterium informacyjnego.

¹ Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu, Wydział Informatyki i Gospodarki Elektronicznej, Katedra Matematyki Stosowanej.

Prognozowanie śmiertelności dla danych z Polski znaleźć można między innymi w pracach J. Bijaka i B. Więckowskiej², M. Papież³, K. Jodzia⁴ oraz G. Trzpiot i J. Majewskiej⁵. W pierwszych dwóch z przywołanych prac wykorzystano do tego celu tylko najprostszy model Lee-Cartera, w trzeciej uwzględniono dodatkowo model Renshawa-Habermana i uproszczony model Plata. Natomiast w ostatniej włączono do analizy kolejne trzy modele: wiek-okres-kohorta, Cairns-Blake'a-Dowda i kwadratowy Cairns-Blake'a-Dowda z efektem kohortowym. Ponadto w pracach tych wykorzystano do prognozowania parametrów okresowych i kohortowych (o ile te w ogóle występują w modelu) błędzenie losowe albo w ogóle nie określono jakie modele zostały użyte, co pozwala domniemywać, że posłużono się specyfikacją zaproponowaną w pracach referencyjnych.

2. Stochastyczne modele śmiertelności

Jedną z najbardziej wpływowych publikacji uwzględniających podejście stochastyczne do modelowania śmiertelności był artykuł R. Lee i L. Cartera⁶ z 1992 r. Nie była to pierwsza próba odejścia od modeli deterministycznych na rzecz modeli stochastycznych. Za taką należy uznać model wiek-okres-kohorta (*Age-Period-Cohort*, APC) zaproponowany w 1982 r. przez J. Hobcrafta i innych⁷. Jednak model APC w literaturze aktuarialnej nie był szeroko wykorzystywany. Zmieniło się to dopiero w pierwszej dekadzie XXI w.

Model Lee-Cartera doczekał się licznych modyfikacji i uogólnień i stał się punktem wyjścia do konstrukcji kolejnych, bardziej złożonych modeli stochastycznych.

² J. Bijak, B. Więckowska, *Prognozowanie przeciętnego dalszego trwania życia na podstawie modelu Lee-Cartera – wybrane zagadnienia*, seria: Statystyka aktuarialna – teoria i praktyka, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu, Wrocław 2008, s. 9–27.

³ M. Papież, *Wykorzystanie modelu Lee-Cartera do prognozowania współczynników zgonów w Polsce*, „Studia Ekonomiczne Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach. Współczesne problemy demograficzne w dobie globalizacji: aspekty pozytywne i negatywne” 2011, nr 95, s. 83–91.

⁴ K. Jodź, *Stochastyczne modelowanie umieralności*, „Śląski Przegląd Statystyczny” 2014, nr 12(18), s. 237–252.

⁵ G. Trzpiot, J. Majewska, *Modeling and projection life expectancy. The case of the EU countries*, „Ekonometria” 2015, vol. 4, s. 196–213.

⁶ R. Lee, L. Carter, *Modeling and forecasting U.S. mortality*, „Journal of the American Statistical Association” 1992, vol. 87, s. 659–671.

⁷ J. Hobcraft, J. Menken, S.H. Preston, *Age, period and cohort effects in demography: A review*, „Population Index” 1982, vol. 48, no. 1, s. 4–43.

Mnogość proponowanych modeli rodzi pytania o kryteria pozwalające na wybór tego właściwego. Badacze A. Hunt i D. Blake⁸ sformułowali warunki, jakie powinien spełniać dobry model śmiertelności. Powinien on:

1. Zapewniać odpowiednie dopasowanie do danych, a więc posiadać wystarczającą liczbę składowych, które umożliwią uchwycenie istotnych struktur występujących w danych.
2. Być sensowny z demograficznego punktu widzenia, czyli zawierać składowe o charakterze demograficznym, których występowanie można wyjaśnić w kategoriach biologicznych, medycznych lub socjoekonomicznych przyczyn zmian w śmiertelności w określonym wieku.
3. Być oszczędny, mieć najmniejszą liczbę składowych niezbędną do uchwycenia struktur występujących w danych, a każda ze składowych powinna wykorzystywać tak mało parametrów, jak to tylko możliwe.
4. Być stabilny, to znaczy niepewność parametrów powinna być niska, a niewielkie zmiany w danych nie powinny skutkować istotnymi zmianami oszacowań parametrów i ich interpretacji.
5. Obejmować pełen zakres wiekowy, co oznacza konieczność posiadania składowych umożliwiających modelowanie złożonego kształtu i dynamiki występującej w stopie śmiertelności nie tylko w starszych, ale również w młodszych przedziałach wiekowych.
6. Uwzględniać efekt kohortowy, jeśli tylko jest to uzasadnione przez dane, oraz umożliwiać jego odróżnienie od efektu związanego z wiekiem i rokiem kalendarzowym, jest to bowiem niezbędne do postawienia wiarygodnej prognozy. Powyższe warunki można uzupełnić o dwa kolejne, istotne z punktu widzenia możliwości wykorzystywania modeli śmiertelności w praktyce:
7. Być transparentny – to znaczy, że użytkownik danego modelu powinien rozumieć jego strukturę i działanie oraz potrafić zinterpretować uzyskiwane przy pomocy tego modelu wyniki.
8. Umożliwiać generowanie przykładowych trajektorii: ta cecha jest niezbędna w przypadku takich zadań, jak wycena instrumentów finansowych powiązanych z ryzykiem długowieczności czy opracowanie powiązanych z tymi instrumentami strategii zabezpieczających.

Mimo dużego zróżnicowania stochastycznych modeli śmiertelności, większość z nich można przedstawić w ramach wspólnej struktury – uogólnionego

⁸ A. Hunt, D. Blake, *A general procedure for constructing mortality models*, „North American Actuarial Journal” 2014, vol. 18, no. 1, s. 116–138.

modelu wiek-okres-kohorta (*Generalised Age-Period-Cohort*, GAPC)⁹. Załóżmy, że model jest estymowany dla wieku $x = x_1, x_2, \dots, x_k$ oraz roku kalendarzowego $t = t_1, t_2, \dots, t_n$, czyli dysponujemy danymi dla n_k roczników i n_n lat. Model GAPC zbudowany jest z czterech komponentów:

- składnika losowego,
- składnika systematycznego,
- funkcji łączącej,
- ograniczeń na parametry.

Składnikiem losowym jest liczba zgonów $D_x(t)$, która może mieć rozkład Poissona lub dwumianowy.

Składnik systematyczny umożliwia uchwycenie wpływu wieku x , roku kalendarzowego t oraz roku urodzenia (przynależności do kohorty) $c = t - x$, przez zmienną zależną $\eta_x(t)$:

$$\eta_x(t) = \alpha_x + \sum_{i=1}^N \beta_x^i \kappa^i(t) + \beta_x^0 \gamma_{t-x}, \quad (1)$$

gdzie:

α_x – średnie względem czasu poziomy umieralności – parametr ten opisuje ogólny kształt śmiertelności ze względu na wiek,

N – liczba całkowita oznaczająca liczbę składników typu wiek-okres wykorzystanych do opisu trendów w śmiertelności,

$\kappa^i(t)$ – i -ty parametr opisujący poziom śmiertelności w roku kalendarzowym t , czyli opisujący ogólną tendencję zmiany poziomów umieralności w czasie (czasem współczynniki te są interpretowane jako szeregi czasowe efektów kalendarzowych reprezentujących ewolucję współczynników umieralności),

β_x^i – i -ty parametr względnej szybkości zmian umieralności osób w wieku x w roku kalendarzowym t (czynniki te reprezentują strukturę wiekową efektu kalendarzowego, ponieważ modyfikują wartości $\kappa^i(t)$ w zależności od wieku x),

γ_{t-x} – parametr wyjaśniający zmiany natężenia umieralności obserwowane w kohorcie,

β_x^0 – parametr modyfikujący efekt kohortowy względem wieku.

Funkcja łącząca g wiąże ze sobą składnik losowy i systematyczny. Możliwe jest wykorzystanie różnych funkcji łączących, jednak najczęściej dla rozkładu Poissona wykorzystywana jest funkcja logarymiczna, a dla rozkładu dwumianowego

⁹ A. Hunt, B. David, *On the Structure and Classification of Mortality Models*, Pension Institute Working Paper 1506, 2015.

– funkcja logitowa. Wybór funkcji logarytmicznej oznacza, że zmienna zależna jest logarytmem rocznego współczynnika zgonów: $\eta_x(t) = \ln m_x(t)$. Natomiast w przypadku wyboru funkcji logitowej modelowany jest logit z rocznego prawdopodobieństwa zgonów: $\eta_x(t) = \text{logit } q_x(t) = \ln \frac{q_x(t)}{1 - q_x(t)}$.

$$\eta_x(t) = \text{logit } q_x(t) = \ln \frac{q_x(t)}{1 - q_x(t)}.$$

Większość stochastycznych modeli śmiertelności ma nieskończenie wiele równoważnych postaci (różne parametryzacje modelu mogą prowadzić do identycznych wartości $\eta_x(t)$), dlatego – aby zapewnić jednoznaczność estymowanych parametrów – nakładane są dodatkowe ograniczenia. Wybór tych ograniczeń jest subiektywny, ale nie ma wpływu na jakość dopasowania modelu i prognoz śmiertelności¹⁰.

Parametry uogólnionych modeli wiek-okres-kohorta estymuje się metodą największej wiarygodności. Maksymalizowana jest logarytmiczna funkcja wiarygodności, której postać uzależniona jest od przyjętego rozkładu liczby zgonów. Dla rozkładu dwumianowego jest określona wzorem:

$$L(d_x(t), \hat{d}_x(t)) = \sum_x \sum_t \omega_x(t) \left\{ d_x(t) \ln \left(\frac{\hat{d}_x(t)}{E_x^0(t)} \right) - (E_x^0(t) - \hat{d}_x(t)) \ln \left(\frac{E_x^0(t) - \hat{d}_x(t)}{E_x^0(t)} \right) + \left(\begin{matrix} E_x^0(t) \\ d_x(t) \end{matrix} \right) \right\}, \quad (2)$$

Natomiast dla rozkładu Poissona:

$$L(d_x(t), \hat{d}_x(t)) = \sum_x \sum_t \omega_x(t) \left\{ d_x(t) \ln \hat{d}_x(t) - \hat{d}_x(t) - \ln [d_x(t)]! \right\}. \quad (3)$$

W obu wzorach (2 i 3) przyjęto:

$\omega_x(t)$ – zmienna zerojedynkowa, równa 0 w przypadku braku obserwacji lub 1 w przeciwnym przypadku,

$E_x^0(t)$ – początkowa ekspozycja na ryzyko zgonu osób będących w wieku x , w roku kalendarzowym t (początkowa liczebność populacji x -latków w roku kalendarzowym t),

$d_x(t)$ – obserwowana liczba zgonów w danej populacji, osób będących w wieku x , w ciągu roku kalendarzowego t .

¹⁰ A.J. Cairns, D. Blake, K. Dowd, G.D. Coughlan, D. Epstein, A. Ong, I. Balevich, *A quantitative comparison of stochastic mortality models using data from England and Wales and the United States*, „North American Actuarial Journal” 2009, vol. 13, no. 1, s. 1–35.

Ponadto $\hat{d}_x(t)$ jest oczekiwaną liczbą zgonów przewidywaną przez model:

$$\hat{d}_x(t) = E_x(t) \cdot g^{-1} \left(\alpha_x + \sum_{i=1}^N \beta_x^i \kappa^i(t) + \beta_x^0 \gamma_{t-x} \right), \quad (4)$$

gdzie g^{-1} jest funkcją odwrotną do funkcji łączącej, natomiast $E_x(t)$ to początkowa lub centralna ekspozycja na ryzyko zgonu, w zależności od przyjętego rozkładu.

2.1. Model Lee-Cartera z rozkładem Poissona

Modyfikacja modelu Lee-Cartera (LC), w której liczba zgonów $D_x(t)$ ma rozkład Poissona, została zaproponowana przez N. Brouhnsa i innych¹¹. Wprowadzenie takiego rozkładu pozwoliło autorom na uchylenie nierealistycznego założenia o homoskedastyczności składnika losowego oraz na wykorzystanie do estymacji metody największej wiarygodności. Struktura oryginalnego modelu nie została zmieniona:

$$\eta_x(t) = \alpha_x + \beta_x^1 \cdot \kappa^1(t), \quad (5)$$

zatem zastosowano jeden składnik typu wiek-okres ($N = 1$), a efekt kohortowy nie jest uwzględniany. Jako funkcji łączącej użyto funkcji logarytmicznej, co oznacza, że zmienną objaśnianą jest logarytm natężenia zgonów. W celu zapewnienia identyfikowalności parametrów wprowadza się następujące ograniczenia:

$$\sum_t \kappa^1(t) = 0, \quad \sum_x \beta_x^1 = 1. \quad (6)$$

2.2. Model Renshawa-Habermana

Model Renshawa i Habermana (RH) jest uogólnieniem modelu LC, uzyskany przez dodanie składnika mającego uchwycić efekt kohortowy¹²:

$$\eta_x(t) = \alpha_x + \beta_x^1 \cdot \kappa^1(t) + \beta_x^0 \gamma_{t-x}. \quad (7)$$

¹¹ N. Brouhns, M. Denuit, J.K. Vermunt, *A Poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables*, „Insurance: Mathematics and Economics” 2002, vol. 31, no. 3, s. 373–393.

¹² A.E. Renshaw, S. Haberman, *A cohort-based extension to the Lee-Carter model for mortality reduction factors*, „Insurance: Mathematics and Economics” 2006, vol. 38, no. 3, s. 556–570.

Zatem zmienna losowa $D_x(t)$ ma rozkład Poissona, a funkcja łącząca jest funkcją logarytmiczną. Ponadto w modelu pojawia się tylko jeden składnik typu wiek-okres ($N = 1$). Identyfikowalność parametrów zapewniają ograniczenia:

$$\sum_t \kappa^1(t) = 0, \quad \sum_x \beta_x^1 = 1, \quad \sum_x \beta_x^0 = 1, \quad \sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} \gamma_c = 0. \quad (8)$$

2.3. Model wiek-okres-kohorta

Model wiek-okres-kohorta (APC) może być traktowany jako szczególny przypadek modelu RH, dla $\beta_x^0 = 1$ i $\beta_x^1 = 1$:

$$\eta_x(t) = \alpha_x + \kappa^1(t) + \gamma_{t-x}. \quad (9)$$

Uwzględnia on więc efekty kalendarzowe i kohortowe, ale nie są one modyfikowane względem wieku. Pozostałe cechy modelu są analogiczne do oryginalnego modelu RH – to znaczy, że zmienna losowa $D_x(t)$ ma rozkład Poissona, a funkcja łącząca jest funkcją logarytmiczną. Mimo że model APC jest szczególnym przypadkiem modelu RH, to jest traktowany autonomicznie, ponieważ, jak już wspomniano, historycznie jest modelem wcześniejszym¹³. Jednoznaczność parametrów gwarantują ograniczenia:

$$\sum_t \kappa(t) = 0, \quad \sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} \gamma_c = 0, \quad \sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} c \cdot \gamma_c = 0. \quad (10)$$

2.4. Model Cairns-Blake'a-Dowda

Andrew J. Cairns, David Blake oraz Kevin Dowd¹⁴ zaproponowali model (CBD) z dwoma składnikami typu wiek-okres ($N = 2$), przy czym zrezygnowali ze stałego dla każdego wieku parametru α_x oraz składnika umożliwiającego uchwycenie efektu kohortowego. Współczynniki modyfikujące uzależnione od

¹³ J. Hobcraft, J. Menken, S.H. Preston, op.cit.

¹⁴ A.J. Cairns, D. Blake, K. Dowd, *A two-factor model for stochastic mortality with parameter uncertainty: theory and calibration*, „Journal of Risk and Insurance” 2006, vol. 73, no. 4, s. 687–718.

wieku nie podlegają estymacji i wynoszą $\beta_x^1 = 1$ i $\beta_x^2 = x - \bar{x}$, gdzie \bar{x} jest średnim wiekiem w próbie. Ostatecznie model ma postać:

$$\eta_x(t) = \kappa^1(t) + (x - \bar{x})\kappa^2(t). \quad (11)$$

W modelu zakłada się, że liczba zgonów ma rozkład dwumianowy, a jako funkcję łączącą przyjęto funkcję logitową. W modelu CBD nie ma problemów z jednoznacznością estymowanych parametrów, dlatego zbiór ograniczeń parametrów jest pusty.

2.5. Model Cairnsa-Blake'a-Dowda z efektem kohortowym

Pierwszą modyfikacją modelu CBD było włączenie składnika kohortowego¹⁵:

$$\eta_x(t) = \kappa^1(t) + (x - \bar{x})\kappa^2(t) + \gamma_{t-x}. \quad (12)$$

Analogicznie jak w modelu (11) współczynniki modyfikujące uzależnione od wieku nie podlegają estymacji i są równe $\beta_x^1 = 1$, $\beta_x^2 = x - \bar{x}$ oraz $\beta_x^0 = 1$. Wprowadzenie składnika kohortowego spowodowało pojawienie się problemów z jednoznacznością parametrów. Ich identyfikowalność zapewniają warunki:

$$\sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} \gamma_c = 0, \quad \sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} c \cdot \gamma_c = 0. \quad (13)$$

2.6. Kwadratowy model Cairnsa-Blake'a-Dowda z efektem kohortowym

Kolejna modyfikacja modelu CBD polegała na dodaniu jeszcze jednego składnika zależnego od wieku – składnika kwadratowego¹⁶:

$$\eta_x(t) = \kappa^1(t) + (x - \bar{x})\kappa^2(t) + \kappa^3(t) \left((x - \bar{x})^2 - \hat{\sigma}_x^2 \right) + \gamma_{t-x}, \quad (14)$$

gdzie \bar{x} jest średnim wiekiem w próbie, a $\hat{\sigma}_x^2$ jest średnią wartością $(x - \bar{x})^2$:

¹⁵ A.J. Cairns, D. Blake, K. Dowd, G.D. Coughlan, D. Epstein, A. Ong, I. Balevich, op.cit.

¹⁶ Ibidem.

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n_k} \sum_x (x - \bar{x})^2. \quad (15)$$

Łączna liczba składników typu wiek-okres wynosi trzy ($N = 3$). Porównując specyfikację kwadratowego modelu CBD z ogólną postacią modelu GAPC (1), można zauważyć, że $\beta_x^1 = 1$, $\beta_x^2 = x - \bar{x}$, $\beta_x^3 = \left((x - \bar{x})^2 - \hat{\sigma}_x^2 \right)$ oraz $\beta_x^0 = 1$. Zmienna zależna jest logitem z rocznych prawdopodobieństw zgonu. Jednoznaczność parametrów jest uzyskiwana przy następujących warunkach:

$$\sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} \gamma_c = 0, \quad \sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} c \cdot \gamma_c = 0, \quad \sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} c^2 \cdot \gamma_c = 0. \quad (16)$$

2.7. Model Cairnsa-Blake'a-Dowda z efektem kohortowym zależnym od wieku

Jeszcze jedna modyfikacja modelu CBD zaproponowana przez A.J. Cairnsa i innych wprowadzała parametr modyfikujący efekt kohortowy w zależności od wieku¹⁷:

$$\eta_x(t) = \kappa^1(t) + (x - \bar{x})\kappa^2(t) + (x_c - x)\gamma_{t-x}, \quad (17)$$

gdzie \bar{x} jest średnim wiekiem w próbie, a x_c jest stałą niezależną od wieku i roku kalendarzowego. Tym samym parametry modyfikujące efekty kalendarzowe nie podlegają szacowaniu i wynoszą $\beta_x^1 = 1$ oraz $\beta_x^2 = x - \bar{x}$. Natomiast parametr modyfikujący efekt kohortowy jest równy $\beta_x^0 = x_c - x$, zaś stała x_c jest estymowana. Efekt kohortowy słabnie więc wraz z wiekiem i to w sposób liniowy. Zmienna objaśniana jest podobnie jak w innych modelach CBD logitem z rocznego prawdopodobieństwa zgonu. Jednoznaczność parametrów zapewnia spełnienie warunku:

$$\sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} \gamma_c = 0. \quad (18)$$

¹⁷ Ibidem.

2.8. Model Plata

Richard Plat zaproponował połączenie modelu CBD z pewnymi elementami modelu LC¹⁸:

$$\eta_x(t) = \alpha_x + \kappa^1(t) + (\bar{x} - x)\kappa^2(t) + (\bar{x} - x)^+ \kappa^3(t) + \gamma_{t-x}, \quad (19)$$

gdzie \bar{x} jest średnim wiekiem w próbie, a $(\bar{x} - x)^+ = \max(0, \bar{x} - x)$.

W strukturze modelu uwzględniony jest więc stały dla każdego wieku parametr α_x , trzy składniki typu wiek-okres ($N = 3$) oraz składnik kohortowy. Parametry modyfikujące efekty kalendarzowe nie są estymowane i wynoszą $\beta_x^1 = 1$, $\beta_x^2 = x - \bar{x}$ oraz $\beta_x^3 = (\bar{x} - x)^+$. Ponieważ parametr β_x^3 przyjmuje wartości większe od zera tylko dla przedziałów wiekowych mniejszych od średniego wieku w próbie, to trzeci ze składników wiek-okres ma za zadanie uchwycić specyficzny charakter zmian w poziomie umieralności osób młodych. Również parametr modyfikujący efekt kohortowy ma stałą wartość $\beta_x^0 = 1$. W modelu zmienna losowa $D_x(t)$ ma rozkład Poissona, w roli funkcji łączącej użyto funkcji logarytmicznej. Jednoznaczność parametrów gwarantują następujące ograniczenia:

$$\begin{aligned} \sum_t \kappa^1(t) = 0, \quad \sum_t \kappa^2(t) = 0, \quad \sum_t \kappa^3(t) = 0, \\ \sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} \gamma_c = 0, \quad \sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} c \cdot \gamma_c = 0, \quad \sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} c^2 \cdot \gamma_c = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

W przypadku, gdy model jest używany jedynie w odniesieniu do starszych grup wiekowych (powyżej 60 roku życia), Plat zaleca ominięcie trzeciego ze składników typu wiek-okres z równania (19):

$$\eta_x(t) = \alpha_x + \kappa^1(t) + (\bar{x} - x)\kappa^2(t) + \gamma_{t-x}. \quad (21)$$

Zredukowany model Plata, określony równaniem (21), jest modelem CBD z efektem kohortowym, do którego dodano stały dla każdego wieku parametr α_x . Problemy związane z identyfikowalnością parametrów zredukowanego modelu Plata są analogiczne jak w przypadku modelu wyjściowego i do jego rozwiązania należy wykorzystać zbiór ograniczeń (20).

¹⁸ R. Plat, *On stochastic mortality modeling*, „Insurance: Mathematics and Economics” 2009, vol. 45, no. 3, s. 393–404.

Omówione powyżej modele zestawione zostały w tabeli 1. Należy mieć przy tym świadomość, że przedstawiona lista nie jest zamknięta. Otwarta specyfikacja uogólnionych modeli wiek-okres-kohorta pozwala na wprowadzanie kolejnych modyfikacji.

Tabela 1. Specyfikacja stochastycznych modeli śmiertelności

Model	Struktura
M1: Lee-Carter (LC)	$\ln m_x(t) = \alpha_x + \beta_x^1 \cdot \kappa_t$
M2: Renshaw-Haberman (RH)	$\ln m_x(t) = \alpha_x + \beta_x^1 \cdot \kappa_t + \beta_x^0 \gamma_{t-x}$
M3: Age-Period-Cohort (APC)	$\ln m_x(t) = \alpha_x + \kappa_t + \gamma_{t-x}$
M5: Cairns-Blake-Dowd (CBD)	$\ln \frac{q_x(t)}{1-q_x(t)} = \kappa^1(t) + (x - \bar{x}) \kappa^2(t)$
M6: CBD + efekt kohortowy	$\ln \frac{q_x(t)}{1-q_x(t)} = \kappa^1(t) + (x - \bar{x}) \kappa^2(t) + \gamma_{t-x}$
M7: kwadratowy CBD + efekt kohortowy	$\begin{aligned} \ln \frac{q_x(t)}{1-q_x(t)} = \\ = \kappa^1(t) + (x - \bar{x}) \kappa^2(t) + \kappa^3(t) \left((x - \bar{x})^2 - \hat{\sigma}_x^2 \right) + \gamma_{t-x} \end{aligned}$
M8: CBD + efekt kohortowy zależny od wieku	$\ln \frac{q_x(t)}{1-q_x(t)} = \kappa^1(t) + (x - \bar{x}) \kappa^2(t) + \gamma_{t-x} (x_c - x)$
M9: Plat	$\begin{aligned} \ln m_x(t) = \\ = \alpha_x + \kappa^1(t) + (\bar{x} - x) \kappa^2(t) + (\bar{x} - x)^+ \kappa^3(t) \gamma_{t-x} \end{aligned}$

$m_x(t)$ – centralny współczynnik zgonów x -latka w roku t ,

$q_x(t)$ – roczny współczynnik zgonów x -latka w roku t .

Źródło: opracowanie własne

3. Analiza dopasowania modeli

Jakość dopasowania modeli można sprawdzić na dwa sposoby:

- wyznaczając kryteria informacyjne,
- badając reszty rozpatrywanego modelu.

Do najczęściej używanych kryteriów informacyjnych należą:

- kryterium informacyjne Akaikego (AIC): $AIC = 2v - 2L$,
- bayesowskie kryterium informacyjne (BIC): $BIC = v \ln K - 2L$,

gdzie:

v – liczba estymowanych parametrów,

L – maksimum funkcji wiarygodności,

K – liczba obserwacji.

Analiza reszt rozpatrywanego modelu polega na poszukiwaniu w rozkładzie reszt regularności. Występowanie takich regularności wskazuje na niezdolność do właściwego uchwycenia przez model wszystkich własności zawartych w danych.

Jeśli składnik losowy w modelu ma rozkład Poissona lub dwumianowy, to skalowane odchylenia reszt są określone wzorem:

$$r_x(t) = \text{sgn}(d_x(t) - \hat{d}_x(t)) \cdot \sqrt{\frac{\text{dev}_x(t)}{\hat{\phi}}}, \quad (22)$$

gdzie:

$$\hat{\phi} = \frac{V(d_x(t), \hat{d}_x(t))}{K - v}. \quad (23)$$

Jeśli składnik losowy ma rozkład Poissona, to

$$\text{dev}_x(t) = 2d_x(t) \cdot \ln \left(\frac{d_x(t)}{\hat{d}_x(t)} \right) - (d_x(t) - \hat{d}_x(t)), \quad (24)$$

natomiast

$$\text{dev}_x(t) = 2d_x(t) \cdot \ln \left(\frac{d_x(t)}{\hat{d}_x(t)} \right) + (E_x^0(t) - d_x(t)) \cdot \ln \left(\frac{E_x^0(t) - d_x(t)}{E_x^0(t) - \hat{d}_x(t)} \right), \quad (25)$$

gdy składnik losowy ma rozkład dwumianowy.

Ponadto:

$$V(d_x(t), d_x(t)) = \sum_x \sum_t \omega_x(t) dev_x(t) \quad (26)$$

jest całkowitym odchyleniem modelu, przy czym $K = \sum_x \sum_t \omega_x(t)$ jest liczbą obserwacji, a v to liczba estymowanych parametrów modelu.

4. Prognozowanie przyszłej śmiertelności z wykorzystaniem modeli śmiertelności

W uogólnionych modelach stochastycznej śmiertelności dynamika natężenia zgonów jest napędzana przez parametry kalendarzowe κ_t^i , $i = 1, \dots, N$ i parametr kohortowy γ_{t-x} . Dlatego też prognozowanie natężenia zgonów wymaga modelowania wymienionych parametrów. Jednocześnie zakłada się, że współczynniki związane z wiekiem nie ulegają zmianie.

Do prognozowania parametru okresowego zazwyczaj używany jest proces błędzenia losowego z dryfem. Jeżeli parametrów okresowych jest więcej niż jeden, wykorzystuje się wielowymiarowy proces błędzenia losowego z dryfem i skorelowanymi innowacjami¹⁹:

$$\kappa^i(t) = \mu^i + \kappa^i(t-1) + \xi^i(t), \quad \xi^i(t) \sim N(0, \sigma_{\xi^i}^2), \quad (27)$$

gdzie:

μ^i – dryf dla i -tego parametru okresowego,

$\xi^i(t)$ – zmienna losowa o rozkładzie normalnym ze średnią 0 i wariancją $\sigma_{\xi^i}^2$, przy czym zmienne te są skorelowane ze sobą względem indeksu i , ale są niezależne w czasie.

W przypadku pojedynczego parametru okresowego można wykorzystać ogólniejszą strukturę, czyli autoregresyjny zintegrowany model średniej ruchomej ARIMA (*Autoregressive Integrated Moving Average*)²⁰. Jeśli jednak chcielibyśmy użyć podobnego podejścia dla przypadku wielu parametrów okresowych,

¹⁹ E. Lovász, *Analysis of Finnish and Swedish mortality data with stochastic mortality models*, „European Actuarial Journal” 2011, vol. 1, s. 259–289.

²⁰ A.E. Renshaw, S. Haberman, op.cit.

to sytuacja się komplikuje. Istnieje wektorowy (wielowymiarowy) autoregresyjny zintegrowany model średniej ruchomej VARIMA (*Vector Autoregressive Integrated Moving Average*), ale jest on trudny do oszacowania ze względu na składnik średniej kroczącej (MA). Z tego powodu modele te nie są zbyt często wykorzystywane w ekonometrii²¹.

W prognozowaniu przy użyciu stochastycznych modeli śmiertelności najistotniejsze jest jednak określenie dynamiki efektu kohortowego. Ponieważ w modelach, które uwzględniają efekt kohortowy jest tylko jeden parametr opisujący jego dynamikę (γ_{t-x}), bez problemu można wykorzystać jednowymiarowy model ARIMA. Zakłada się przy tym, że proces parametrów kohortowych γ_{t-x} jest niezależny od procesów parametrów okresowych $\kappa^i(t)$.

Mając określony model dynamiki procesu, można wyznaczyć prognozę w określonym horyzoncie. Z kolei dysponując prognozami dla h kroków naprzód dla parametrów okresowych ($\hat{\kappa}_{t_n+h}^1, \hat{\kappa}_{t_n+h}^2, \dots, \hat{\kappa}_{t_n+h}^N$) oraz dla parametru kohortowego $\hat{\gamma}_{t_n+h-x}$, można wyznaczyć prognozę zmiennej objaśnianej $\hat{\eta}_x$ w oparciu o ogólną postać modelu wiek-okres-kohorta (1):

$$\hat{\eta}_x(t_n + h) = \alpha_x + \sum_{i=1}^N \beta_x^i \hat{\kappa}^i(t_n + h) + \beta_x^0 \hat{\gamma}_{t_n+h-x}, \quad (28)$$

gdzie t_n jest ostatnim rokiem kalendarzowym, dla którego znane są wartości prognozowanych parametrów.

Prognozy uzyskane z (28) mogą być wykorzystane do uzyskania prognoz centralnych współczynników zgonów. Podstawowym wymogiem, jaki stawia się prognozom jest ich dobra jakość. Do jej oceny można użyć tak zwanych błędów prognoz, wśród których wyróżnia się:

- średni błąd bezwzględny (*mean absolute error* – MAE):

$$\text{MAE} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |y_{T+i} - \hat{y}_{T+i}| \quad (29)$$

- błąd średniokwadratowy (*mean square error* – MSE):

$$\text{MSE} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_{T+i} - \hat{y}_{T+i})^2, \quad (30)$$

²¹ A. Harvey, *Forecasting with Unobserved Components Time Series Models* [w:] G. Elliott, C.W.J. Granger, A. Timmermann, *Handbook of Economic Forecasting*, North Holland 2006, t. 1, s. 327–412.

- pierwiastek błędu średniokwadratowego (*root mean square error* – RMSE):

$$\text{RMSE} = \sqrt{\text{MSE}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_{T+i} - \hat{y}_{T+i})^2}, \quad (31)$$

- średni bezwzględny błąd procentowy (*mean absolute percentage error* – MAPE):

$$\text{MAPE} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \frac{y_{T+i} - \hat{y}_{T+i}}{y_{T+i}} \right|, \quad (32)$$

gdzie:

\hat{y}_{T+i} – prognoza na okres i ,

y_{T+i} – wielkość zaobserwowana w okresie i ,

T – liczba obserwacji w próbie,

N – liczba prognoz na okres poza próbą,

i – odległość horyzontu prognozy.

5. Estymacja modeli śmiertelności dla Polski

Spośród modeli przedstawionych w punkcie 2 wybrano te, w których występuje składnik kohortowy, czyli modele M2, M3, M6, M7, M8, M9 oraz najprostszy z modeli (M1), jako model referencyjny. Modele te były estymowane dla Polski, dla danych dostępnych w bazie Human Mortality Database (HMD)²², obejmujących lata 1956–2014. Modele estymowano oddzielnie dla kobiet i mężczyzn, w przedziałach wiekowych 55–89 lat, a więc kluczowych z punktu widzenia podmiotów oferujących produkty ubezpieczeniowe narażone na ryzyko długowieczności. W tabeli 2 zestawiono liczbę estymowanych parametrów w wybranych modelach, a w tabeli 3 – wartości kryteriów informacyjnych dla poszczególnych modeli.

Tabela 2. Liczba estymowanych parametrów w modelach śmiertelności

Model	M1	M2	M3	M6	M7	M8	M9
Liczba estymowanych parametrów	127	253	183	205	262	205	240

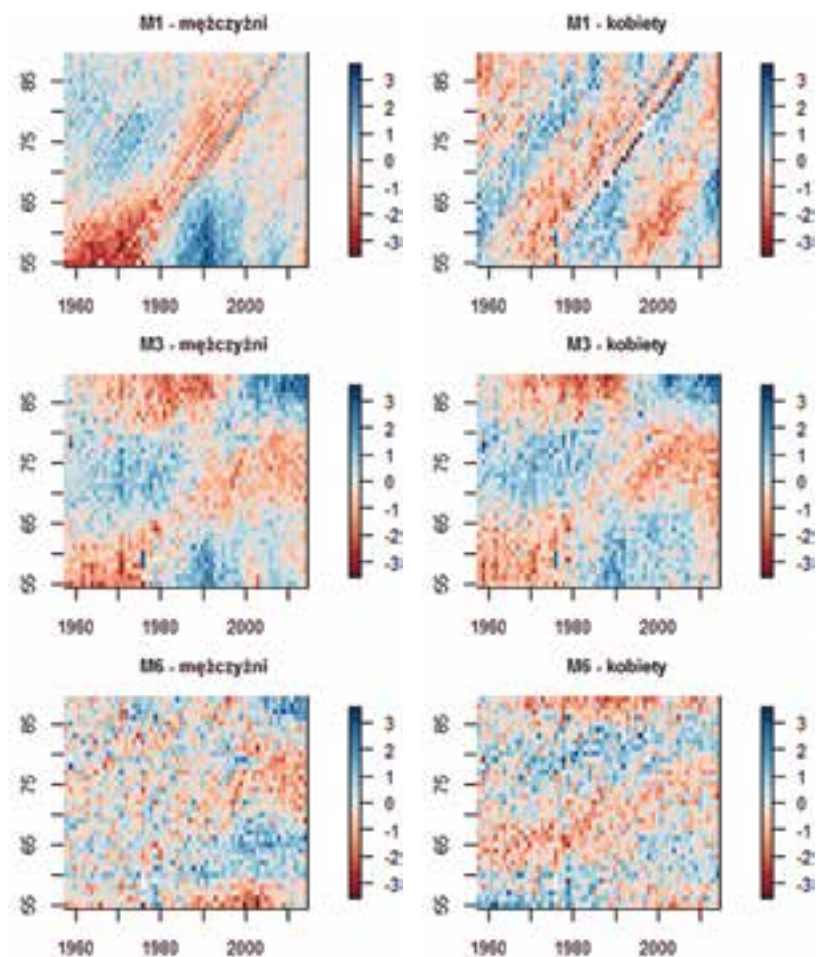
Źródło: opracowanie własne

²² <http://www.mortality.org> (data odczytu: 30.08.2017).

Tabela 3. Wartości kryteriów informacyjnych estymowanych modeli

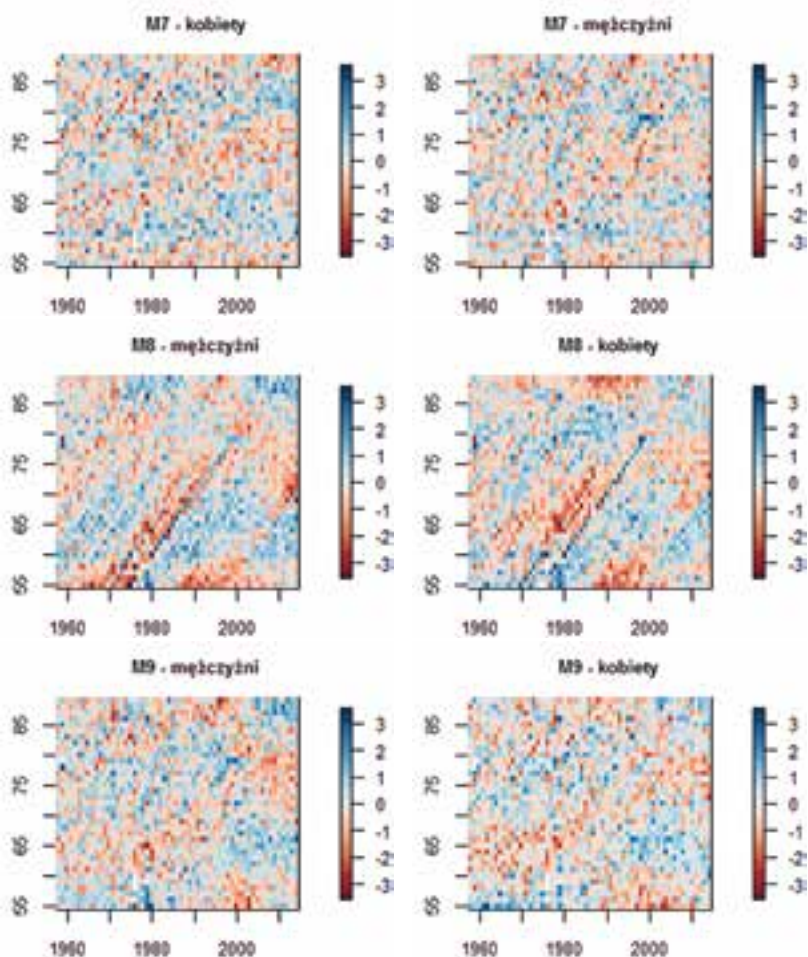
Model/Kryterium	Mężczyźni		Kobiety	
	AIC	BIC	AIC	BIC
M1	38094	38794	28381	29081
M3	28176	29184	27597	28605
M6	23856	24992	23664	24801
M7	22981	24431	22899	24349
M8	25437	26579	24914	26056
M9	23332	24647	23086	24402

Źródło: opracowanie własne



Rysunek 1. Skalowane odchylenia reszt estymowanych modeli dla Polski (modele M1, M3, M6)

Źródło: opracowanie własne



Rysunek 2. Skalowane odchylenia reszt estymowanych modeli dla Polski (modele M7, M8, M9)

Źródło: opracowanie własne

5.1. Ocena dopasowania modeli

Spośród wybranych modeli nie udało się wyestymować modelu Renshawa-Habermanna (M2) ze względu na brak zbieżności algorytmu optymalizującego funkcję wiarygodności. W tabeli 3 zamieszczono wartości kryteriów informacyjnych dla pozostałych modeli, zarówno dla mężczyzn, jak i kobiet. Z punktu widzenia obu kryteriów najlepiej dopasowanym modelem dla obu płci był model M7.

Na rysunkach 1 i 2 przedstawiono skalowane reszty estymowanych modeli. Ze wzoru (22) wynika, że jeśli obserwowana liczba zgonów jest większa niż ta wynikająca z modelu, to reszty są dodatnie. Model Lee-Cartera (M1) generuje reszty charakteryzujące się regularnością, wskazującą na występowanie efektów kohortowych. Wyraźne ukośne linie wskazują na charakterystyczne wzorce wymierania dla pokoleń doświadczonych II wojną światową. Model wiek-okres-kohorta (M3) pozwala na modelowanie efektu kohortowego, a reszty, które generuje, pokazują, że ta własność została przez model wychwycona. Niemniej pojawiają się inne niepożądane regularności – występowanie wysp dodatnich i ujemnych reszt. W modelu Cairnsa-Blake’a-Dowda z efektem kohortowym (M6) reszty są nieregularne, niemniej wciąż pojawiają się wyspy wskazujące na grupowanie się reszt o tych samych znakach. Reszty z modeli: kwadratowego CBD z efektem kohortowym oraz Plata (M7 i M9) wykazują największe nieregularności, potwierdzając tym samym, że są to najlepiej dopasowane modele. Warto zwrócić uwagę na model Cairnsa-Blake’a-Dowda z efektem kohortowym zależnym od wieku (M8), ponieważ reszty w tym modelu wskazują na występowanie efektów kohortowych. Nie są one tak silne, jak w modelu M1, niemniej modyfikowanie parametru kohortowego przez parametr zależny od wieku umożliwiło uchwycenie przez model obserwowanych wzorców wymierania poszczególnych generacji.

5.2. Wpływ specyfikacji modelu na jakość prognoz

Modele oceniono również pod kątem jakości prognoz. Prognoza dotyczyła centralnego współczynnika zgonu dla osób w wieku od 55 do 89 lat dla ostatnich 10 lat kalendarzowych dostępnych prób. Wszystkie błędy prognoz były uśrednione względem lat kalendarzowych, dla których stawiano prognozę. Dla modeli M3, M6, M7, M8 i M9, czyli uwzględniających efekt kohortowy, prognoza była wyznaczana dla najlepiej dopasowanego do wyestymowanych wartości parametru γ_{t-x} . Ponadto iteracyjnie sprawdzano, czy inna specyfikacja modelu nie wygenerowała lepszych prognoz. Sprawdzane były modele o parametrach $p \leq 2$, $d \leq 2$ i $q \leq 2$, co dało 27 możliwych specyfikacji modeli ARIMA. Najlepiej dopasowane i najlepiej prognozujące modele dla mężczyzn zamieszczono w tabeli 4, a dla kobiet – w tabeli 5.

Do wskazania najlepszego modelu do prognozowania efektu kohortowego wykorzystano dostępną w pakiecie *forecast*²³ funkcję *auto.arima*. Funkcja

²³ <https://cran.r-project.org/web/packages/forecast/forecast.pdf> (data odczytu: 30.08.2017).

ta wykorzystuje odmianę algorytmu Hyndmana i Khandakara²⁴, który przy wyborze optymalnego modelu ARIMA łączy test pierwiastka jednostkowego oraz minimalizację kryterium informacyjnego Akaike (AIC). Algorytm składa się z następujących kroków:

1. Stopień integracji d jest określany na podstawie powtarzanych testów KPSS²⁵.
2. Parametry autoregresji p i średniej ruchomej q są wybierane przez minimalizację AIC. Zamiast sprawdzania każdej możliwej kombinacji p i q wykorzystywane jest przeszukiwanie krokowe:

Wybierany jest najlepszy model (z najmniejszymi wartościami AIC) spośród następujących czterech:

ARIMA (2, d , 2),

ARIMA (0, d , 0),

ARIMA (1, d , 0),

ARIMA (0, d , 1).

Jeśli $d = 0$, to włączona jest stała c , jeśli $d \geq 1$, to stała c jest równa 0.

Wybrany model określa się mianem „aktualny model”.

3. Sprawdzany jest wpływ następujących zmian w „aktualnym modelu”:
 - zmianę p lub q o ± 1 ,
 - włączenie lub wyłączenie stałej z modelu.

Najlepszy z rozważanych modeli staje się nowym „aktualnym modelem”, chyba że żaden z nich nie przewyższa dotychczasowego „aktualnego modelu”. Etap 2 jest powtarzany, dopóki uzyskuje się niższe wartości AIC.

W przypadku mężczyzn najtrafniejsze prognozy uzyskano z kwadratowego modelu CBD z efektem kohortowym (M7), a więc z tego samego modelu, który był najlepiej dopasowany do zrealizowanych wartości współczynników śmiertelności.

Warto zwrócić uwagę, że model CBD z efektem kohortowym zależny od wieku (M8) z odpowiednio dobraną ARIMA daje lepsze prognozy niż nominalnie lepszy model M7. Oznacza to, że odpowiednia specyfikacja modelu ARIMA może zniwelować niedoskonałości bazowego modelu, który wykorzystywany jest do stawiania prognoz.

²⁴ R.J. Hyndman, G. Athanasopoulos, *Forecasting: principles and practice*, OTexts, 2014.

²⁵ Test KPSS, zaproponowany przez D. Kwiatkowskiego, P.C.B. Philippsa, P. Schmidta i Y. Shina, pozwala na testowanie stacjonarności. Hipotezą zerową jest stacjonarność szeregu czasowego, a hipotezą alternatywną – istnienie pierwiastka jednostkowego.

Tabela 4. Błędy prognoz dla różnych modeli śmiertelności (mężczyźni)

Model	Specyfikacja modelu prognostycznego dla efektu kohortowego	ARIMA	MAE	MSE	RMSE	MAPE
M1	–	–	0,0056	0,0001	0,0080	8,7652
M3	auto.arima	(1,2,2)	0,0066	0,0001	0,0088	12,4266
	dająca najlepsze prognozy	(0,0,2)	0,0063	0,0001	0,0087	10,8954
M6	auto.arima	(1,2,2)	0,0104	0,0002	0,0139	20,0821
	dająca najlepsze prognozy	(1,1,0)	0,0101	0,0002	0,0138	17,8043
M7	auto.arima	(2,0,2)	0,0052	0,0001	0,0082	7,6226
	dająca najlepsze prognozy	(0,2,2)	0,0051	0,0001	0,0082	6,6773
M8	auto.arima	(1,1,2)	0,0039	0,0000	0,0053	7,7788
	dająca najlepsze prognozy	(0,0,2)	0,0038	0,0000	0,0053	7,1092
M9	auto.arima	(2,0,2)	0,0053	0,0001	0,0070	10,6631
	dająca najlepsze prognozy	(0,0,1)	0,0052	0,0000	0,0070	9,4915

Źródło: opracowanie własne

W przypadku kobiet najlepsze prognozy generował model model CBD z efektem kohortowym zależny od wieku (M8), który – przypomijmy – nie uwzględniał całości efektu kohortowego. Bardzo dobre własności prognostyczne ma model M3, który był drugim najlepszym modelem.

Tabela 5. Błędy prognoz dla różnych modeli śmiertelności (kobiety)

Model	Specyfikacja modelu prognostycznego dla efektu kohortowego	ARIMA	MAE	MSE	RMSE	MAPE
M1	–	–	0,0027	0,0000	0,0046	6,1680
M3	auto.arima	(2,0,2)	0,0024	0,0000	0,0034	7,4248
	dająca najlepsze prognozy	(1,0,1)	0,0023	0,0000	0,0034	7,0488
M6	auto.arima	(0,2,2)	0,0087	0,0002	0,0129	26,4564
	dająca najlepsze prognozy	(2,2,0)	0,0086	0,0002	0,0129	24,9399
M7	auto.arima	(2,0,2)	0,0044	0,0000	0,0059	20,9656
	dająca najlepsze prognozy	(1,0,0)	0,0044	0,0000	0,0058	20,1987
M8	auto.arima	(1,2,1)	0,0015	0,0000	0,0023	5,4698
	dająca najlepsze prognozy	(0,2,1)	0,0015	0,0000	0,0023	5,4486
M9	auto.arima	(2,0,2)	0,0025	0,0000	0,0036	8,3312
	dająca najlepsze prognozy	(1,0,2)	0,0025	0,0000	0,0036	8,1510

Źródło: opracowanie własne

Należy podkreślić, że w żadnym z przypadków najlepiej dopasowany model nie dawał najtrafniejszych prognoz. Na ogół też prognozy były lepsze w przypadku modeli ARIMA o prostszej specyfikacji.

6. Podsumowanie i kierunki dalszych badań

Wybór modelu, który pozwoli na skuteczne prognozowanie wymierania nie jest łatwy. Błędy prognoz nie zawsze dają jednoznaczne wskazówki, który model jest pod tym względem najlepszy. Poza tym trzeba mieć świadomość, że weryfikacja prognozy następuje *ex post*. Tym samym fakt, że model generował najlepsze prognozy w próbie, nie daje żadnej gwarancji, że będzie równie skuteczny w przypadku prognoz poza próbą, zwłaszcza w sytuacji, gdy horyzont prognozy jest odległy. W praktyce można weryfikować wcześniejsze przewidywania i aktualizować prognozy wraz z napływem nowych danych oraz ewentualnie dokonać zmiany modelu prognostycznego. Niemniej decyzje podjęte na podstawie błędnych prognoz mogą być nieodwracalne.

Naturalnym dalszym kierunkiem badań będzie przeprowadzenie analogicznej do prezentowanej analizy dla danych z innych krajów. Warto również sprawdzić, jak specyfikacja modeli prognozujących efekty okresowe wpływa na jakość prognoz.

Bibliografia

- Bijak J., Więckowska B., *Prognozowanie przeciętnego dalszego trwania życia na podstawie modelu Lee-Cartera – wybrane zagadnienia*, seria: Statystyka aktuarialna – teoria i praktyka, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu, Wrocław 2008.
- Brouhns N., Denuit M., Vermunt J.K., *A Poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables*, „Insurance: Mathematics and Economics” 2002, vol. 31, no. 3, s. 373–393.
- Cairns A.J., Blake D., Dowd K., *A two-factor model for stochastic mortality with parameter uncertainty: theory and calibration*, „Journal of Risk and Insurance” 2006, vol. 73, no. 4, s. 687–718.

- Cairns A.J., Blake D., Dowd K., Coughlan G.D., Epstein D., Ong A., Balevich I., *A quantitative comparison of stochastic mortality models using data from England and Wales and the United States*, „North American Actuarial Journal” 2009, vol. 13, no. 1, s. 1–35.
- Harvey A., *Forecasting with Unobserved Components Time Series Models* [w:] G. Elliott, C.W.J. Granger, A. Timmermann, *Handbook of Economic Forecasting*, North Holland 2006, vol. 1, s. 327–412.
- Hobcraft J., Menken J., Preston S.H., *Age, period and cohort effects in demography: A review*, „Population Index” 1982, vol. 48, no. 1, s. 4–43.
- Hunt A., Blake D., *A general procedure for constructing mortality models*, „North American Actuarial Journal” 2014, vol. 18, no. 1, s. 116–138.
- Hunt A., David B., *On the Structure and Classification of Mortality Models*, Pension Institute Working Paper 1506, 2015.
- Hyndman R.J., Athanasopoulos G., *Forecasting: principles and practice*, OTexts, 2014.
- Jodź K., *Stochastyczne modelowanie umieralności*, „Śląski Przegląd Statystyczny” 2014, nr 12(18), s. 237–252.
- Lee R., Carter L., *Modeling and forecasting U.S. mortality*, „Journal of the American Statistical Association” 1992, vol. 87, s. 659–671.
- Lovász E., *Analysis of Finnish and Swedish mortality data with stochastic mortality models*, „European Actuarial Journal” 2011, vol. 1, s. 259–289.
- Papież M., *Wykorzystanie modelu Lee-Cartera do prognozowania współczynników zgonów w Polsce*, „Studia Ekonomiczne Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach, Współczesne problemy demograficzne w dobie globalizacji: aspekty pozytywne i negatywne” 2011, nr 95, s. 83–91.
- Plat R., *On stochastic mortality modeling*, „Insurance: Mathematics and Economics” 2009, vol. 45, no. 3, s. 393–404.
- Renshaw A.E., Haberman S., *A cohort-based extension to the Lee-Carter model for mortality reduction factors*, „Insurance: Mathematics and Economics” 2006, vol. 38, no. 3, s. 556–570.
- Trzpiot G., Majewska J., *Modeling and projection life expectancy. The case of the EU countries*, „Ekonometria” 2015, vol. 4, s. 196–213.

Źródła sieciowe

<http://www.mortality.org/> (data odczytu: 30.08.2017).

<https://cran.r-project.org/web/packages/forecast/forecast.pdf> (data odczytu: 30.08.2017).

* * *

Mortality modelling. Model specification and mortality forecast accuracy

Abstract

There has recently been a huge increase in the use of models which examine the structure of mortality rates across the dimensions of age, period and cohort. The goal of the article is to analyze the impact of mortality model specifications on its forecasting properties.

Keywords: stochastic mortality models, forecasting mortality

