

MONIKA KOŚKO

Wydział Informatyki i Ekonomii  
Wyższa Szkoła Informatyki i Ekonomii w Olsztynie

MARTA KWIECIEŃ, JOANNA STEMPIŃSKA

Wydział Matematyki i Informatyki  
Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie

## **Przełącznikowe modele Markowa (MS) – charakterystyka i sposoby zastosowań w badaniach ekonomicznych**

### **1. Wstęp**

Przełącznikowe modele Markowa (*Markov Switching Models* – MS) są narzędziem wykorzystywanym często do analizy procesów ekonomicznych charakteryzujących się występowaniem pewnych stanów (reżimów). Modele przełącznikowe należą do klasy modeli nieliniowych, w których proces generujący zmiany stanu jest nieobserwowalny, możliwe jest jednak wyróżnienie stanów o jednorodnych cechach. Przyjmuje się, że prawdopodobieństwa przejścia pomiędzy stanami są stałe w czasie. Modele MS pozwalają na opisywanie szeregów charakteryzujących się regularnością zmienności w czasie, tzn. szeregów, w których występują okresy zwiększonej i zmniejszonej zmienności bądź szybsze i wolniejsze wzrosty. Estymacja modeli MS nie jest łatwym zagadnieniem. Wykorzystuje się w tym celu metodę największej wiarygodności. Powszechnie stosowanym algorytmem maksymalizacji funkcji wiarygodności jest algorytm EM (*expectations maximization*).

Artykuł przedstawia charakterystykę struktury modeli przełącznikowych typu Markowa (MS), ich rodzaje oraz metodę ich estymacji. Prezentuje również przykłady zastosowań tych modeli w literaturze.

## 2. Przełącznikowe modele typu Markowa (MS)

Łańcuch Markowa<sup>1</sup> jest to proces stochastyczny  $\{Y_t, t \in N\}$ , w którym zmienne  $Y_t$  spełniają warunek Markowa, tzn.

$$P(Y_t = j | Y_0 = i_0, Y_1 = i_1, \dots, Y_{t-1} = i) = P(Y_t = j | Y_{t-1} = i) \quad (1)$$

dla każdego  $t \in N$  oraz dla dowolnych  $i, j \in S$ , gdzie  $S = \{1, 2, \dots, r\}$  jest zbiorem wszystkich stanów fazowych tego procesu. Zachowanie procesu w okresie bieżącym  $t$  jest uzależnione wyłącznie od jego zachowania w okresie poprzednim  $t-1$ , nie zależy natomiast od jego zachowania w okresach wcześniejszych. Prawdopodobieństwo warunkowe przejścia procesu ze stanu  $i$  do stanu  $j$  w jednostce czasu można zapisać w postaci:

$$p_{ij}(t) = P(Y_t = j | Y_{t-1} = i), \text{ dla } t \in N \text{ oraz } i, j \in S.$$

Prawdopodobieństwa  $p_{ij}(t)$  tworzą macierz  $P(t) = [p_{ij}(t)]_{r \times r}$ , spełniającą warunki

$$\forall_{t \in N} \forall_{i, j \in S} p_{ij}(t) \geq 0 \text{ oraz } \forall_{t \in N} \forall_{i \in S} p_{ij} \sum_j p_{ij}(t) = 1.$$

Łańcuch Markowa nazywamy jednorodnym, jeżeli prawdopodobieństwa  $p_{ij}(t)$  przejścia procesu pomiędzy stanami nie zależą od wyboru momentu  $t$ , tzn.  $\forall_{t \in N} p_{ij}(t) = p_{ij}$ . Dla jednorodnego łańcucha Markowa jest spełniona zależność:

$$D_t = D_{t-1} P, \quad (2)$$

gdzie  $P = [p_{ij}]_{r \times r}$  jest macierzą prawdopodobieństw przejścia, natomiast  $D_t = [d_{1t}, d_{2t}, \dots, d_{rt}]$ ,  $d_{it} = P(Y_t = i)$ .

Zależność (2) można traktować jako model ekonometryczny postaci:

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^r y_j(t-1) p_{ij} + u_i(t), \quad i = 1, \dots, r, \quad t = 1, \dots, T, \quad (3)$$

gdzie  $y_i(t)$  są ocenami nieznanymi prawdopodobieństw  $d_{it}$  wyznaczonymi na podstawie obserwacji w okresie  $[0, T]$ ,  $\sum_{i=1}^r y_i(t) = 1$  oraz  $u_i(t)$  jest składnikiem

<sup>1</sup> Nazwa łańcuchy Markowa pochodzi od nazwiska rosyjskiego matematyka A. Markowa (1856–1922), który w 1906r. zapoczątkował badania nad tymi procesami.

losowym. Parametrami strukturalnymi modelu są nieznanne prawdopodobieństwa przejścia  $p_{ij}$  dla  $i, j \in S$ , niezależne od czasu  $t$  i spełniające warunki:

$$p_{ij} \geq 0 \text{ oraz } \sum_{i=1}^r p_{ij} = 1.$$

Zadaniem modeli opartych na łańcuchu Markowa jest identyfikacja stanów fazowych procesu i ich charakterystyka oraz oszacowanie na podstawie obserwacji parametrów strukturalnych modelu. Oszacowane wartości  $p_{ij}$  pokazują prawdopodobieństwa przejścia łańcucha pomiędzy stanami, które są z góry określone wartościowo.

Przełącznikowe modele typu Markowa MSM stanowią bardziej złożoną strukturę, opartą na idei łańcuchów Markowa. Opisują one zachowanie się badanego procesu, przy czym nie wymaga się, aby stany były określone wartościowo. Jednym z założeń modeli przełącznikowych jest to, że stany nie są bezpośrednio obserwowalne. Estymacja modelu przełącznikowego typu Markowa pozwala na wyznaczenie wartości wybranych parametrów procesu w danym stanie (średnia, stała modelu, odchylenie standardowe) oraz prawdopodobieństwa znalezienia się procesu w określonym stanie w danym momencie w czasie.

Przełącznikowy model Markowa jest określony wzorem

$$y_t = \begin{cases} y_{1t} & \text{gdy } s_t = 1 \\ y_{2t} & \text{gdy } s_t = 2 \\ \vdots & \\ y_{rt} & \text{gdy } s_t = r \end{cases}, \quad (4)$$

gdzie  $s_t$  jest nieobserwowalnym stanem jednorodnego łańcucha Markowa  $X_t$  o  $r$  stanach, zadanego macierzą przejścia  $P = [p_{ij}]_{r \times r}$ . Stany te są zwykle nazywane reżimami modelu przełącznikowego.

Przy założeniu, że procesy cząstkowe  $y_{it}$  tworzące proces  $y_t$  są procesami autoregresyjnymi, przełącznikowy model łańcucha Markowa o  $r$  stanach i rzędzie opóźnienia  $p$  można zapisać w postaci

$$y_t = \mu(s_t) + \alpha_1 (y_{t-1} - \mu(s_{t-1})) + \alpha_2 (y_{t-2} - \mu(s_{t-2})) + \dots + \alpha_p (y_{t-p} - \mu(s_{t-p})) + u_t, \quad (5)$$

gdzie

$$u_t \sim NID(0, \sigma^2(s_t)),$$

$$\mu(s_t) = \begin{cases} \mu_1 & \text{gdy } s_t = 1 \\ \vdots & \\ \mu_r & \text{gdy } s_t = r \end{cases},$$

$\alpha_1, \dots, \alpha_p$  – parametry autoregresji.

Zgodnie z założeniami koncepcji modeli przełącznikowych stan łańcucha  $s_t$  w momencie  $t$  nie jest bezpośrednio obserwowalny. Nieobserwowalnym procesem, który przełącza się między  $r$  stanami, zgodnie z procesem Markowa jest w zależności od rodzaju modelu wartość oczekiwana  $\mu(s_t)$ , stała  $\alpha_0$  lub wariancja składnika losowego  $\sigma^2(s_t)$ , możliwe są też równoczesne przełączenia parametrów między stanami.

### 3. Estymacja przełącznikowych modeli Markowa

Modele przełącznikowe Markowa opierają się na warunkowej funkcji gęstości  $f(y_t | X_t = s_t, \tilde{Y}_{t-1}, \boldsymbol{\theta})$  oraz nieobserwowalnym ciągu zmiennych losowych  $X_t$  spełniających warunek  $P(X_t = j | X_{t-1} = i) = p_{ij}$ . Przez  $\boldsymbol{\theta}$  oznaczamy tu wektor wszystkich parametrów modelu, a przez  $\tilde{Y}_t$  zbiór wszystkich obserwacji do momentu  $t$ ,  $t = 1, 2, \dots, T$ . Funkcja gęstości rozkładu brzegowego  $y_t$  jest postaci

$$f(y_t | \tilde{Y}_{t-1}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{p}) = \sum_{s_t} f(y_t, s_t | \tilde{Y}_{t-1}, \boldsymbol{\theta}).$$

Na podstawie obserwacji zmiennej  $y_t$  dla  $t = 1, 2, \dots, T$  określa się funkcję wiarygodności

$$L(y_t | \boldsymbol{\theta}, \mathbf{p}) = \sum_{t=1}^T \log f(y_t | \tilde{Y}_{t-1}, \boldsymbol{\theta}).$$

Estymację modeli przełącznikowych typu Markowa za pomocą funkcji wiarygodności wprowadzili do literatury ekonometrycznej S.M. Goldfeld i R.E. Quandt<sup>2</sup>. Obecnie do maksymalizacji funkcji wiarygodności najczęściej stosuje się algorytm EM, pierwotnie wykorzystany przez A.P. Dempstera, N.M. Lairda

<sup>2</sup> S.M. Goldfeld, R.E. Quandt, *A Markov model for switching regressions*, „Journal of Econometrics” 1973, vol. 1, s. 3–16.

i D.B. Rubina<sup>3</sup>. Jest to iteracyjna technika oparta na funkcji wiarygodności, stosowana do szacowania modeli z niepełnymi danymi lub nieobserwowalnymi zmiennymi. Funkcję wiarygodności modeli MS możemy zapisać w postaci:

$$L(y_t | \theta, \mathbf{p}) = \prod_{t=1}^T f(y_t | \theta, \mathbf{p}) = \prod_{t=1}^T \sum_{X_t} f(y_t | X_t, \tilde{Y}_{t-1}, \theta) P(X_t | \tilde{Y}_{t-1}, \mathbf{p}), \quad (6)$$

gdzie:

$f(y_t | \theta, \mathbf{p})$  – łączna funkcja gęstości dla  $r$  stanów,

$\mathbf{p} = \left[ \begin{array}{cccccccc} p_{11} & \cdots & p_{r1} & p_{12} & \cdots & p_{r2} & \cdots & p_{1(r-1)} & \cdots & p_{r(r-1)} \end{array} \right]_{r(r-1) \times r}$  – wektor prawdopodobeństw przejścia modelu,

$\tilde{Y}_{t-1}$  – zbiór obserwacji do momentu  $t - 1$ ,

$\Pr(X_t | \tilde{Y}_{t-1}, \mathbf{p})$  – prawdopodobieństwo warunkowe:

$$\Pr(X_t = j | \tilde{Y}_{t-1}, \mathbf{p}) = \sum_i P(X_t = j | X_{t-1} = i) P(X_{t-1} = i | \tilde{Y}_{t-1}) = \sum_i p_{ij} P(X_{t-1} = i | \tilde{Y}_{t-1}),$$

$P(X_{t-1} = i | \tilde{Y}_{t-1})$  – prawdopodobieństwa filtrowane.

Estymacja modeli MS na podstawie algorytmu EM polega na realizacji dwóch kroków algorytmu dla każdej z iteracji – kroku *expectations* oraz kroku *maximization* – po wcześniejszym ustaleniu wartości początkowych dla wszystkich parametrów modelu. Jako wynik estymacji otrzymuje się oceny parametrów modelu oraz informacje dotyczące nieobserwowalnego procesu zmiennej  $X_t$  w postaci tzw. prawdopodobieństw filtrowanych i prawdopodobieństw wygładzonych. Prawdopodobieństwa filtrowane są wyznaczane na podstawie zbioru informacji  $\tilde{Y}_t$  dla  $t < T$ , natomiast prawdopodobieństwa wygładzone – na podstawie wszystkich informacji  $\tilde{Y}_T$ . Aby rozpocząć iterację algorytmu, należy podać wartości startowe wektora parametrów  $\theta$  oraz wektora prawdopodobeństw przejścia  $\mathbf{p}$ . Wartości startowe wektora  $\theta$  zwykle są ustalane arbitralnie, natomiast wartości startowe wektora  $\mathbf{p}$  są przyjmowane na poziomie<sup>4</sup> 0,5.

Estymacja modeli MS na podstawie funkcji wiarygodności jest utrudniona z powodu zależności końcowej wartości funkcji  $L$  od wartości startowych

<sup>3</sup> A.P. Dempster, N.M. Laird, D.B. Rubin, *Maximum Likelihood from incomplete data via the EM Algorithm*, „Journal of the Royal Statistical Society” 1977, vol. 39.

<sup>4</sup> J.D. Hamilton, *What's Real About the Business Cycle?*, NBER Working Paper 2005, vol. 11161.

wektora  $\mathbf{p}$ . J.D. Hamilton<sup>5</sup> stwierdził, że rozwiązanie oparte na algorytmie EM jest stosunkowo odporne na „nieodpowiednio” dobrane wartości startowe wektora parametrów, gdyż algorytm ten szybko porusza się w kierunku obszaru maksimum funkcji  $L$ . Jednak badania innych autorów wskazują na różnice w otrzymywanych wynikach końcowych funkcji wiarygodności, w zależności od podanych wartości startowych prawdopodobieństw przejścia.

#### 4. Charakterystyka obszarów zastosowań przełącznikowych modeli Markowa oraz podsumowanie

Po raz pierwszy łańcuchy Markowa zostały wykorzystane w badaniach ekonomicznych przez G. Lindgrena<sup>6</sup> i L.M. Bauma<sup>7</sup>. Zbudowali oni tzw. ukryty model Markowa, w którym realizacje łańcucha  $S_t$  nie były bezpośrednio obserwowalne. Modele przełącznikowej autoregresji zastosowali S.N. Neftci<sup>8</sup> i S.L. Sclove<sup>9</sup>. Estymacją modeli przełącznikowych MS zajął się J.D. Hamilton<sup>10</sup>, którego praca zawiera zastosowanie modelu MS do analizy cyklu koniunkturalnego gospodarki Stanów Zjednoczonych Ameryki Północnej. W jednym ze swoich artykułów J.D. Hamilton<sup>11</sup> wprowadza nową technikę estymacji modeli przełącznikowych MS. Za jej pomocą jest możliwe maksymalizowanie logarytmu funkcji wiarygodności dla dużej liczby parametrów w stosunkowo krótkim czasie. Do estymacji modeli przełącznikowych J.D. Hamilton zastosował algorytm EM A.P. Dempstera, N.M. Lairda i D.B. Rubina<sup>12</sup>, który jest wystarczająco odporny na wartości początkowe oraz szybko zbliża się do obszaru maksimum

---

<sup>5</sup> J.D. Hamilton, *Analysis of time series subject to changes in regime*, „Journal of Econometrics” 1990, vol. 45, s. 39–70.

<sup>6</sup> G. Lindgren, *Markov regime models for mixed distributions and switching regressions*, „Scandinavian Journal of Statistics” 1978, vol. 5, s. 81–91.

<sup>7</sup> L.E. Baum, T. Petrie, G. Soules, N. Weiss, *A maximization technique occurring in the statistical analysis of probabilistic functions of Markov chains*, „Annals of Mathematical Statistics” 1970, vol. 41, s. 164–171.

<sup>8</sup> S.N. Neftci, *Are economic time series asymmetric over the business cycle?*, „Journal of Political Economy” 1982, vol. 92, no. 2, s. 307–328.

<sup>9</sup> S.L. Sclove, *Time-series segmentation: A model and a method*, „Information Sciences” 1983, vol. 29, s. 7–25.

<sup>10</sup> J.D. Hamilton, *A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle*, „Econometrica” 1989, vol. 57, s. 357–384.

<sup>11</sup> J.D. Hamilton, *Analysis of time...*, op.cit.

<sup>12</sup> A.P. Dempster, N.M. Laird, D.B. Rubin, op.cit.

funkcji wiarygodności. Przy dużej liczbie obserwacji startowych algorytm EM oferuje znaczne udoskonalenie efektywności estymacji modeli przełącznikowych. Wykorzystanie modeli Markowa w literaturze, oprócz badań makroekonomicznych, następuje w analizie szeregów rynku finansowego. J.D. Hamilton i G. Lin<sup>13</sup> analizowali powiązania faz aktywności rynku finansowego z poszczególnymi fazami cyklu gospodarczego Stanów Zjednoczonych Ameryki Północnej. Autorzy zbudowali podwójny model przełącznikowy: pierwsze równanie dla produkcji przemysłowej USA – MSM(2)-AR, drugie równanie reprezentuje model zmienności rynku akcji – SWARCH-L(2, q). Analiza dowodzi, że zmienność stóp zwrotu akcji w USA jest w dużym stopniu kierowana aktywnością gospodarczą. H.-M. Krolzig<sup>14</sup> porównał modele MS z różną liczbą stanów o różnej specyfikacji, badając niemiecki cykl koniunkturalny oraz cykle innych gospodarek wolnorynkowych. Model MS z dwoma stanami dla polskiego PKB przedstawiono w pracy T. Fic<sup>15</sup>. Jednym z zastosowań jest wykorzystanie struktury łańcuchów modeli przełącznikowych do określenia faz i punktów zwrotnych cykli koniunkturalnych oraz prognozowania punktów zwrotnych cyklu na podstawie szeregów PKB, które wykorzystuje się jako miarę aktywności gospodarczej. Idea wielorównaniowej struktury przełącznikowej najczęściej jest stosowana w badaniach nad cyklami koniunkturalnymi kilku krajów. Badania nad cyklami z wykorzystaniem modeli MS-VAR zostały zapoczątkowane przez H.-M. Krolziga<sup>16</sup>. W ekonometrii finansowej J.D. Hamilton i R. Susmel<sup>17</sup> oraz J. Cai<sup>18</sup> wprowadzili model warunkowej wariancji z przełączeniem typu Markowa MS(r)-ARCH(p) – model SWARCH(r,p). Praca stanowi poszerzenie idei modeli przełącznikowych o model warunkowej wariancji, w którym przełączeniu między stanami podlega wariancja warunkowa. Specyfikacja modelu

---

<sup>13</sup> J.D. Hamilton, G. Lin, *Stock market volatility and the business cycle*, University of California at San Diego, Economics Working Paper Series 96-18, Department of Economics, UC San Diego 1996.

<sup>14</sup> H.-M. Krolzig, *Markov-Switching Vector Autoregression. Modelling statistical inference and application to business cycle analysis*, Springer Verlag Edition, Berlin 1997.

<sup>15</sup> T. Fic, *Cykl koniunkturalny w Polsce. Wnioski z modeli Markowa*, w: *Metody ilościowe w naukach ekonomicznych*, red. A. Welfe, Oficyna Wydawnicza SGH, Warszawa 2007.

<sup>16</sup> H.-M. Krolzig, *Markov-Switching Vector...*, op.cit.

<sup>17</sup> J.D. Hamilton, R. Susmel, *Autoregressive conditional heteroskedasticity and changes in regime*, „Journal of Econometrics” 1994, vol. 64, s. 307–333.

<sup>18</sup> J. Cai, *A Markov model of unconditional variance in ARCH*, „Journal of Business and Economic Statistics” 1994, vol. 12, s. 309–316.

MS(r)-GARCH(p) została wprowadzona przez S.F. Graya<sup>19</sup>, a następnie przez M.J. Duekera<sup>20</sup>, F. Klassena<sup>21</sup> i J. Davidsona<sup>22</sup>.

Wśród polskich autorów J. Stawicki<sup>23</sup> omówił wykorzystanie łańcuchów Markowa oraz przełącznikowych modeli MS w analizie rynku kapitałowego. M. Doman i R. Doman<sup>24</sup> analizowali dopasowanie oraz własności prognoz zwrotów i zmienności na podstawie modeli MS(2)-AR-GARCH dla wybranych indeksów i spółek GPW, kursów walut, stóp procentowych oraz kontraktów terminowych. A. Włodarczyk i M. Zawada modelowali<sup>25</sup> wybrane kursy walut względem złotego oraz rynkowe ceny energii elektrycznej w Polsce za pomocą modeli SWARCH oraz SWARCH-L<sup>26</sup>. M. Bartkowiak<sup>27</sup> do wyceny opcji wykorzystał modele GARCH z przełączeniami reżimów. W pracy F. Chen, F.X. Diebold, F. Schorfheide<sup>28</sup> jest proponowany model MSMD (*Markov-switching multifractal duration*), wykorzystywany do analizy szeregów występujących na rynkach finansowych. Modele przełącznikowe Markowa w ostatnich latach zostały również wykorzystane przez polskich autorów w pracach *Pricing electricity derivatives within a Markov regime-switching model* J. Janczury<sup>29</sup> oraz *An empirical comparison of alternate regime-switching models for electricity spot prices* i *Efficient estimation of Markov regime-switching models: An application to electricity*

---

<sup>19</sup> S.F. Gray, *Modeling the conditional distribution of interest rates as a regime-switching process*, „Journal of Finance Economics” 1996, vol. 42, s. 27–62.

<sup>20</sup> M.J. Dueker, *Markov Switching in GARCH Processes and Mean Reverting Stock Market Volatility*, „Journal of Business and Economic Statistics”, 1997, vol. 15, s. 26–34.

<sup>21</sup> F. Klassen, *Improving GARCH Volatility Forecasts with Regime-Switching GARCH*, „Empirical economics” 2002, vol. 27, s. 363–394.

<sup>22</sup> J. Davidson, *Forecasting Markov-switching dynamic, conditionally heteroscedastic processes*, „Statistic and Probability Letters” 2004, vol. 68, s. 137–147.

<sup>23</sup> J. Stawicki, *Wykorzystanie łańcuchów Markowa w analizie rynku kapitałowego*, Wydawnictwo UMK, Toruń 2004.

<sup>24</sup> M. Doman, R. Doman, *Ekonometryczne modelowanie dynamiki polskiego rynku finansowego*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Poznań 2004.

<sup>25</sup> A. Włodarczyk, M. Zawada, *Przełącznikowe modele Markowa jako przykład niestacjonarnego modelu kursu walutowego*, IX Ogólnopolskie Seminarium Naukowe DME, UMK w Toruniu, Toruń 2005.

<sup>26</sup> A. Włodarczyk, M. Zawada, *Przełącznikowe modele Markowa dla cen energii elektrycznej na giełdzie energii w Polsce*, X Ogólnopolskie Seminarium Naukowe DME, UMK w Toruniu, Toruń 2007.

<sup>27</sup> M. Bartkowiak, *Wycena opcji na indeks WIG20 na podstawie modeli GARCH z przełączeniami reżimów*, „Acta Universitatis Nicolai Copernici” 2009, vol. 39, s. 197–206.

<sup>28</sup> F. Chen, F.X. Diebold, F. Schorfheide, *A Markov-switching multifractal inter-trade duration model, with application to US equities*, „Journal of Econometrics” 2013, vol. 177, s. 320–342.

<sup>29</sup> J. Janczura, *Pricing electricity derivatives within a Markov regime-switching model*, „Mathematical Methods of Operations Research” 2014, vol. 79(1), s. 1–30.



*wholesale market prices* J. Janczury i R. Weron<sup>30</sup>. Badania przeprowadzono na podstawie odsezonowanych danych rynkowych Europejskiej Giełdy Energii. Autorzy zbudowali 3-stanowy model dla energii elektrycznej, który pozwala na modelowanie skoków i spadków w bardzo naturalny sposób. W pierwszej z wymienionych prac J. Janczury i R. Weron<sup>31</sup> można zauważyć wykorzystanie zmieniającej się w czasie macierzy prawdopodobieństw przejścia.

Modele Markowa MS są powszechnie wykorzystywane w analizie cykli koniunkturalnych i analizie szeregów finansowych, w których występują stany odmiennie pod względem zmienności; coraz szersze zastosowanie obserwujemy również w pracach polskich autorów. Modele MS są praktycznym narzędziem identyfikującym stany oraz służącym do budowy prognozy zarówno szeregu, jak i stanu, w którym się znajduje. Jednym z ostatnich kierunków badań jest zastosowanie modeli Markowa w połączeniu z innymi modelami w celu coraz lepszego modelowania.

## Bibliografia

- Bartkowiak M., *Wycena opcji na indeks WIG20 na podstawie modeli GARCH z przełączaniami reżimów*, „Acta Universitatis Nicolai Copernici” 2009, vol. 39, s. 197–206.
- Baum L.E., Petrie T., Soules G., Weiss N., *A maximization technique occurring in the statistical analysis of probabilistic functions of Markov chains*, „Annals of Mathematical Statistics” 1970, vol. 41, s. 164–171.
- Broyden C.G., *The Convergence of a Class of Double-rank Minimization Algorithms*, „Journal of the Institute of Mathematics and Its Applications” 1970, vol. 6, s. 76–90.
- Burns A.F., Mitchell W.C., *Measuring Business Cycles*, NBER, New York 1946.
- Cai J., *A Markov model of unconditional variance in ARCH*, „Journal of Business and Economic Statistics” 1994, vol. 12, s. 309–316.
- Chen F., Diebold F.X., Schorfheide F., *A Markov-switching multifractal inter-trade duration model, with application to US equities*, „Journal of Econometrics” 2013, vol. 177, s. 320–342.
- Coslett S.R., Lee L.-F., *Serial correlation in discrete variable models*, „Journal of Econometrics” 1985, vol. 27, s. 79–97.

---

<sup>30</sup> J. Janczura, R. Weron, *An empirical comparison of alternate regime-switching models for electricity spot prices*, „Energy Economics” 2010, vol. 32(5), s. 1059–1073; J. Janczura, R. Weron, *Efficient estimation of Markov regime-switching models: An application to electricity wholesale market prices*, „Advances in Statistical Analysis” 2012, vol. 96(3), s. 385–407.

<sup>31</sup> J. Janczura, R. Weron, *An empirical comparison...*, op.cit.

- Davidson J., *Forecasting Markov-switching dynamic, conditionally heteroscedastic processes*, „Statistic and Probability Letters” 2004, vol. 68, s. 137–147.
- Dempster A.P., Laird N.M., Rubin D.B., *Maximum Likelihood from incomplete data via the EM Algorithm*, „Journal of the Royal Statistical Society” 1977, vol. 39.
- Doman M., Doman R., *Ekonometryczne modelowanie dynamiki polskiego rynku finansowego*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Poznań 2004.
- Dueker M.J., *Markov Switching in GARCH Processes and Mean Reverting Stock Market Volatility*, „Journal of Business and Economic Statistics”, 1997, vol. 15, s. 26–34.
- Evans M.K., *Macroeconomic activity: Theory, Forecasting and Control*, Harper Collins, New York 1969.
- Fic T., *Cykl koniunkturalny w Polsce. Wnioski z modeli Markowa*, w: *Metody ilościowe w naukach ekonomicznych*, red. A. Welfe, Oficyna Wydawnicza SGH, Warszawa 2007.
- Fletcher R., *Practical Methods of Optimization*, John Wiley & Sons, New York 1987.
- Goldfeld S.M., Quandt R.E., *A Markov model for switching regressions*, „Journal of Econometrics” 1973, vol. 1, s. 3–16.
- Gray S.F., *Modeling the conditional distribution of interest rates as a regime-switching process*, „Journal of Finance Economics” 1996, vol. 42, s. 27–62.
- Hamilton J.D., *A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle*, „Econometrica” 1989, vol. 57, s. 357–384.
- Hamilton J.D., *Analysis of time series subject to changes in regime*, „Journal of Econometrics” 1990, vol. 45, s. 39–70.
- Hamilton J.D., *Rational-expectations econometric analysis of change in regime: An investigation of the term structure of interest rates*, „Journal of Economic” 1988, vol. 12, s. 385–423.
- Hamilton J.D., *Time Series Analysis*, Princeton University Press, New Jersey 1994.
- Hamilton J.D., *What’s Real About the Business Cycle?*, NBER Working Paper 2005, vol. 11161.
- Hamilton J.D., Lin G., *Stock market volatility and the business cycle*, University of California at San Diego, Economics Working Paper Series 96-18, Department of Economics, UC San Diego 1996.
- Hamilton J.D., Susmel R., *Autoregressive conditional heteroskedasticity and changes in regime*, „Journal of Econometrics” 1994, vol. 64, s. 307–333.
- Janczura J., *Pricing electricity derivatives within a Markov regime-switching model*, „Mathematical Methods of Operations Research” 2014, vol. 79(1), s. 1–30.
- Janczura J., Weron R., *An empirical comparison of alternate regime-switching models for electricity spot prices*, „Energy Economics” 2010, vol. 32(5), s. 1059–1073.
- Janczura J., Weron R., *Efficient estimation of Markov regime-switching models: An application to electricity wholesale market prices*, „Advances in Statistical Analysis” 2012, vol. 96(3), s. 385–407.

- Kim Ch.-J., *Dynamic linear models with Markov-switching*, „Journal of Econometrics” 1994, vol. 60, s. 1–20.
- Klassen F., *Improving GARCH Volatility Forecasts with Regime-Switching GARCH*, „Empirical economics” 2002, vol. 27, s. 363–394.
- Koško M., *Modelowanie polskiego cyklu koniunkturalnego z wykorzystaniem przełącznikowego modelu typu Markowa (Markov switching). Modelowanie i prognozowanie gospodarki narodowej*, „Prace i Materiały” Wydziału Zarządzania Uniwersytetu Gdańskiego, z. 4/2, Sopot 2009.
- Koško M., *Przełącznikowe modele typu Markowa w analizie procesów makroekonomicznych i finansowych w Polsce*, praca doktorska, UMK w Toruniu, 2008.
- Krolzig H.-M., *Econometric Modelling of Markov-Switching Vector Autoregressions using MSVAR for Ox*, Institute of Economics and Statistics and Nuffield College, Oxford 1998.
- Krolzig H.-M., *Markov-switching procedures for dating the Euro-zone business cycle*, „Quarterly Journal of Economic Research” 2001, vol. 3, s. 339–351.
- Krolzig H.-M., *Markov-Switching Vector Autoregression. Modelling statistical inference and application to business cycle analysis*, Springer Verlag Edition, Berlin 1997.
- Lindgren G., *Markov regime models for mixed distributions and switching regressions*, „Scandinavian Journal of Statistics” 1978, vol. 5, s. 81–91.
- Neftci S.N., *Are economic time series asymmetries over the business cycle?*, „Journal of Political Economy” 1982, vol. 92, no. 2, s. 307–328.
- Podgórska M., Śliwa P., Tobolewski M., Wrzosek M., *Łańcuchy Markowa w teorii i w zastosowaniach*, Oficyna Wydawnicza SGH, Warszawa 2002.
- Sclove S.L., *Time-series segmentation: A model and a method*, „Information Sciences” 1983, vol. 29, s. 7–25.
- Shanno D.F., *Conditioning of Quasi-Newton Methods for Function Minimization*, „Mathematics of Computation” 1970, vol. 24, s. 647–656.
- Sichel D.E., *Inventories and the three phases of the business cycle*, „Journal of Business and Economic Statistics” 1994, vol. 12, s. 269–278.
- Stawicki J., *Wykorzystanie łańcuchów Markowa w analizie rynku kapitałowego*, Wydawnictwo UMK, Toruń 2004.
- Włodarczyk A., Zawada M., *Przełącznikowe modele Markowa dla cen energii elektrycznej na giełdzie energii w Polsce*, X Ogólnopolskie Seminarium Naukowe DME, UMK w Toruniu, Toruń 2007.
- Włodarczyk A., Zawada M., *Przełącznikowy model Markowa jako przykład niestacjonarnego modelu kursu walutowego*, IX Ogólnopolskie Seminarium Naukowe DME, UMK w Toruniu, Toruń 2005.

\* \* \*

## **Markov switching models MS – characteristics and methods of application in economic research**

### **Summary**

The paper presents the characteristics of Markov switching models (MS), their types, estimation method, and various methods of their application in economic research. MS models are a practical tool that is used in the analysis of economic processes characterised by the occurrence of certain states (regimes). MS models allow to describe series characterised by regular volatility over time, for example series in which there are periods of increased and decreased variability or faster and slower growth. The purpose of this article is to draw attention to the fact that Markov switching models are essential tools in modelling and forecasting such important economic issues as business cycles and time series of the financial market.

**Keywords:** Markov switching models, Markov chain, business cycle