Kamil Gala

Ubezpieczeniowy Fundusz Gwarancyjny

Wojciech Bijak

Kolegium Analiz Ekonomicznych
Szkoła Główna Handlowa w Warszawie

Ubezpieczeniowy Fundusz Gwarancyjny

System bonus-malus z korektą składki

Streszczenie

Systemy bonus-malus są powszechnie stosowanym na rynku ubezpieczeń komunikacyjnych narzędziem służącym do indywidualnej oceny ryzyka na podstawie historii szkodowej ubezpieczonego. Mimo ich wielu zalet, w literaturze aktuarialnej można spotkać różne propozycje ich modyfikacji, mające na celu lepszą ocenę ryzyka lub poprawę sytuacji finansowej ubezpieczyciela. Jednocześnie brakuje propozycji uwzględniających potencjalne korzyści dla ubezpieczonych. Fakt ten pokazuje, że jest w tym obszarze miejsce na udoskonalenie funkcjonujących w praktyce rozwiązań.

Praca jest poświęcona modyfikacji klasycznego systemu bonus-malus polegającej na tym, że na końcu okresu ubezpieczenia w zależności od liczby zgłoszonych szkód następuje korekta wysokości należnej składki – dopłata przez ubezpieczonego lub zwrot jej określonej części przez ubezpieczyciela. W pracy została podjęta próba odpowiedzi na pytanie, jak w takim systemie mogą być ustalane wysokość składki początkowej oraz współczynniki korygujące. Do realizacji tego celu przyjęto model odwołujący się do statystyki bayesowskiej i teorii łańcuchów Markowa, a parametry systemu wyznaczono jako rozwiązanie pewnego zadania optymalizacji. Zbadane zostały również własności otrzymanych w ten sposób współczynników.

Słowa kluczowe: ubezpieczenie komunikacyjne OC i AC, system bonus-malus, łańcuch Markowa, mnożnik składki, mnożnik składki z korektą na koniec okresu ubezpieczenia

1. Wstęp

Systemy bonus-malus są powszechnie stosowane na rynku ubezpieczeń komunikacyjnych do oceny ryzyka na podstawie historii szkodowej ubezpieczonego (ang. *experience rating*). Wskazuje się zwykle, że ich wprowadzenie pozwala na realizację dwóch podstawowych celów – lepszą ocenę ryzyka (podział na jednorodne pod względem ryzyka klasy ubezpieczonych) oraz wzmocnienie efektu prewencyjnego ubezpieczeń.

W literaturze aktuarialnej podkreśla się fakt, że systemy bonus-malus stosowane w praktyce mają pewne wady, m.in. nie uwzględniają w taryfikacji wysokości zgłoszonych szkód, a jedynie ich liczbę, a ponadto ubezpieczony po zgłoszeniu szkody może zmienić zakład ubezpieczeń, aby uniknąć przyszłych zwyżek składki. Jako częściowe rozwiązanie tych problemów J. Holtan proponuje wprowadzenie franszyzy redukcyjnej (ang. *deductible*) z wysokim limitem, wspólnym dla wszystkich ubezpieczonych[1], natomiast S. Pitrebois, J.F. Walhin i M. Denuit postulują, by limit ten zależał od klasy taryfowej, w której znajduje się ubezpieczony[2]. Tego rodzaju rozważania pokazują, że pożądane mogą być dalsze modyfikacje systemu bonus-malus, mające na celu poprawę sytuacji finansowej ubezpieczyciela bądź uczynienie go bardziej atrakcyjnym dla klienta.

W niniejszej pracy rozważymy system bonus-malus z mechanizmem korekty składki. W takim systemie ubezpieczający płaci część składki na początku okresu obowiązywania umowy ubezpieczenia, a na końcu tego okresu w zależności od liczby zgłoszonych szkód następuje korekta składki – dopłata lub zwrot jej określonej części.

Zaproponowane modyfikacje mają na celu wzmocnienie prewencyjnej funkcji systemu. W standardowym systemie, umożliwiającym przeprowadzanie taryfikacji *a posteriori*, uwzględnia się historię szkodową z ustalonej liczby okresów. W momencie zawierania ubezpieczenia ubezpieczający nie ma więc wpływu na to, co się wydarzyło. W proponowanym modelu ubezpieczony ma wpływ przez swoje zachowanie na drodze przez cały okres ubezpieczenia na to, jaką ostatecznie zapłaci składkę. Wydaje się, że może to stanowić silny bodziec do wzmocnienia prewencyjnej funkcji systemu bonus-malus.

1 J. Holtan, *Bonus made easy*, „Astin Bulletin" 1994, vol. 24, no. 1, s. 61–74.

2 S. Pitrebois, J.F. Walhin, M. Denuit, *Bonus-Malus Systems with Varying Deductibles*, „Astin Bulletin" 2005, vol. 35, no. 1, s. 261–274.

Dodatkowym efektem proponowanych modyfikacji może być zmiana podejścia do ubezpieczenia OC posiadacza pojazdu lub AC. Często przez ubezpieczonych wyrażany jest pogląd, że ktoś, kto się ubezpiecza od wielu lat i nie ma szkody, nie ma żadnego pożytku z ubezpieczenia. Ubezpieczenie jest traktowane w tym przypadku jak każdy inny produkt finansowy mający przynieść wymierne korzyści, natomiast bezpieczeństwo finansowe może nie być w ten sposób postrzegane przez ubezpieczonych. Zaproponowane w pracy modyfikacje systemu bonus-malus mogą – przez wpływ na zachowanie kierowców w okresie objętym ochroną ubezpieczeniową – przynieść im dodatkowy zysk w postaci zwrotu części składki w przypadku braku szkód lub dodatkowy koszt w formie dopłaty składki w przypadku wystąpienia szkód.

System bonus-malus z korektą składki może być alternatywą dla systemów śledzących zachowanie kierowców na drodze w celu oceny ryzyka (ang. *Usage-Based Insurance* – UBI) w sytuacji, gdy posiadacz (kierowca) nie godzi się na daleko idącą ingerencję zakładu ubezpieczeń w swoją prywatność. Na koniec okresu następuje zbiorcza ocena przebiegu ubezpieczenia i wycena konsekwencji zaistniałych zdarzeń w formie zwrotu lub dopłaty składki.

2. System bonus-malus – model matematyczny

W niniejszej pracy będziemy wykorzystywać matematyczny model systemu bonus-malus odwołujący się do aktuarialnej teorii wiarygodności (ang. *credibility theory*) oraz teorii łańcuchów Markowa. Przyjmujemy następujące założenia dotyczące procesu zgłaszania szkód:

(P1) portfel zakładu ubezpieczeń składa się z M umów ubezpieczenia;

(P2) i-ty ubezpieczony opisany jest przez ciągi $\boldsymbol{N}_i = \left(\Theta_i, N_{i1}, N_{i2}, \ldots\right)$ oraz $\boldsymbol{X}_i = (X_{i1}^{(1)}, X_{i1}^{(2)}, \ldots, X_{i2}^{(1)}, X_{i2}^{(2)}, \ldots)$ dla $i = 1, 2, \ldots, M$, gdzie N_{it} oznacza liczbę szkód zgłoszonych w okresie $\left[t-1, t\right)$, Θ_i wyraża indywidualną skłonność do ryzyka i-tego ubezpieczonego, a $X_{it}^{(j)}$ jest wysokością j-tej szkody zgłoszonej przez i-tego ubezpieczonego w okresie $\left[t-1, t\right)$; łączna wartość szkód dla i-tego ubezpieczonego jest więc równa $S_{it} = \sum_{j=1}^{N_{it}} X_{it}^{(j)}$, przy czym $S_{it} = 0$ gdy $N_{it} = 0$;

(P3) ciągi $\boldsymbol{N}_i$ oraz $\boldsymbol{X}_i$ są stochastycznie niezależne dla każdego $i = 1, \ldots, M$, a pary ($\boldsymbol{N}_i, \boldsymbol{X}_i$) są niezależne dla różnych i; zakładamy ponadto, że zmienne losowe $X_{it}^{(j)}$ mają ten sam rozkład oraz $\mathbb{E}X_{it}^{(j)} = \mu$; przy tych założeniach mamy $\mathbb{E}(S_{it}) = \mathbb{E}\left(N_{it}\right)\mathbb{E}\left(X_{it}^{(1)}\right) = \mu\mathbb{E}\left(N_{it}\right)$;

(P4) zmienne losowe Θ_i są niezależne i mają ten sam rozkład dany dystrybuantą F_Θ; najczęściej zakłada się, że jest to rozkład ciągły o gęstości f_Θ, skoncentrowany na półosi dodatniej, np. gamma, logarytmiczno-normalny bądź odwrotny gaussowski; zakładamy dodatkowo, że $\mathbb{E}\Theta_i = 1$;

(P5) przy ustalonym $\Theta_i = \theta_i$ zmienne N_{it} są stochastycznie niezależne i mają rozkład Poissona z parametrem $\lambda_{it}\theta_i$, oznaczany dalej $Poiss\left(\lambda_{it}\theta_i\right)$; wynika stąd, że rozkład bezwarunkowy zmiennych losowych N_{it} jest rozkładem mieszanym Poissona; wartość parametru λ_{it} odzwierciedla wpływ obserwowalnych czynników (takich jak np. wiek i płeć ubezpieczonego czy moc silnika pojazdu) na częstość szkód i może być oszacowana na podstawie odpowiedniego modelu statystycznego – jest to tzw. taryfikacja *a priori*; zwróćmy uwagę na to, że przy przyjętych założeniach mamy:

$$\frac{\mathbb{E}\left(S_{it} \mid \Theta_i = \theta\right)}{\mathbb{E}\left(S_{it}\right)} = \frac{\mathbb{E}\left(N_{it} \mid \Theta_i = \theta\right)\mathbb{E}\left(X_{it}^{(1)} \mid \Theta_i = \theta\right)}{\mathbb{E}\left(N_{it}\right)\mathbb{E}\left(X_{it}^{(1)}\right)} = \frac{\theta\lambda_{it}\mathbb{E}\left(X_{it}^{(1)}\right)}{\lambda_{it}\mathbb{E}\left(X_{it}^{(1)}\right)} = \theta.$$

Wartość parametru Θ_i można zatem interpretować jako indywidualną skłonność do ryzyka i-tego ubezpieczonego odniesioną do częstości jego szkód określonej na podstawie taryfikacji *a priori*. Uzasadnione jest to tym, że nawet po uwzględnieniu w procesie oceny ryzyka wielu cech obserwowalnych utworzone w ten sposób klasy taryfowe cechują się pewną niejednorodnością. W dalszych rozważaniach dla uproszczenia zapisu przyjmiemy, że $\lambda_{it} \equiv \lambda$ dla każdego i oraz t.

Model spełniający powyższe założenia będziemy nazywać poissonowskim modelem wiarygodności (ang. *Poisson credibility model* – PCM). Na podstawie tego modelu, stosując metody statystyki bayesowskiej, można wyznaczyć wysokość składki jako funkcję liczby szkód zgłoszonych w przeszłości przez ubezpieczonego. Podejście to cechuje się jednak dużą złożonością matematyczną, więc może nie być pożądane w kontekście budowania relacji z klientem. Z tego względu w praktyce stosuje się często łatwiejsze w implementacji systemy bonus-malus.

W systemie bonus-malus kierowca bez historii ubezpieczeniowej w momencie zawarcia pierwszej umowy płaci składkę bazową, najczęściej zależną od zastosowanej metody taryfikacji *a priori*. W kolejnych latach, w rocznicę umowy, kierowca jest zaliczany do jednej z klas taryfowych, przy czym każdej klasie odpowiada określony mnożnik składki (ang. *relativity*), tj. współczynnik korygujący składkę bazową w zależności od historii szkodowej kierowcy.

Przejścia pomiędzy klasami odbywają się według określonych reguł i zależą od liczby szkód zgłoszonych w ciągu okresu objętego umową ubezpieczenia. Formalnie systemem bonus-malus (dalej również SBM) będziemy nazywać system indywidualnej oceny ryzyka określony przez następujące elementy[3]:

(SBM 1) $s+1$ klas taryfowych tworzących zbiór $\mathcal{L}=\{0,\ldots,s\}$, przy czym zgłoszenie szkody skutkuje przypisaniem do klasy o wyższym numerze;

(SBM 2) wektor stawek składki $\boldsymbol{r}=(r_0,\ldots,r_s)$, nazywany taryfą bonus-malus; przy przyjętej numeracji klas zachodzi $r_{j+1}\geq r_j$ dla $j=0,\ldots,s-1$;

(SBM 3) klasę startową, l_0, najczęściej taką, że $r_{l_0}=1$;

(SBM 4) reguły przejścia, które określają obecną klasę taryfową kierowcy na podstawie jego klasy taryfowej w poprzednim okresie oraz liczby zgłoszonych w tym czasie szkód; przejścia te można reprezentować za pomocą macierzy $\boldsymbol{T}(k)=\left[t_{ij}(k)\right]_{(s+1)(s+1)}$, gdzie $t_{ij}(k)=1$, jeśli po zgłoszeniu k szkód ubezpieczony przechodzi z klasy i do klasy j, oraz 0 w przeciwnym przypadku; w konsekwencji macierze $\boldsymbol{T}(k)$ dla dowolnego $k=0,1,\ldots$ są macierzami zero-jedynkowymi o dokładnie jednym niezerowym elemencie w każdym wierszu.

Opisana powyżej konstrukcja SBM oraz przyjęty model powstawania szkód pozwalają wykorzystać w analizie teorię łańcuchów Markowa[4]. Dla ustalonej wartości parametru ryzyka $\Theta=\theta$ zmienne losowe $N_1,N_2,\ldots$, opisujące liczbę szkód w kolejnych okresach, są niezależne i mają rozkład $Poiss(\lambda\theta)$. Klasy taryfowe zajmowane przez ubezpieczonego w kolejnych okresach oznaczamy przez L_t i zgodnie z konstrukcją systemu są one dla każdego t związane relacją $T_{L_t L_{t+1}}(N_{t+1})=1$. Oznacza to, że do wyznaczenia klasy taryfowej w kolejnym okresie wystarczy znać klasę bieżącą oraz liczbę szkód w bieżącym okresie. W konsekwencji wobec warunkowej niezależności liczby szkód w kolejnych okresach proces stochastyczny $\{L_1,L_2,\ldots\}$ opisujący klasę taryfową ubezpieczonego jest (warunkowym) łańcuchem Markowa o przestrzeni stanów $S=\{0,\ldots,s\}$. Dla dowolnych klas $l_1,l_2\in\mathcal{L}$ prawdopodobieństwo przejścia łańcucha z klasy l_1 do klasy l_2 możemy wyznaczyć ze wzoru

[3] Zob. np. J. Lemaire, *Bonus-Malus Systems in Automobile Insurance*, Kluwer Academic Publishers, Boston 1995.

[4] Wprowadzenie do łańcuchów Markowa można znaleźć w pracach: J.G. Kemeny, J.L. Snell, *Finite Markov Chains*, Van Nostrand, Princeton 1960; M. Iosifescu, *Skończone procesy Markowa i ich zastosowania*, PWN, Warszawa 1988.

$$p_{l_1 l_2}(\theta) = \mathbb{P}(L_{t+1} = l_2 | L_t = l_1,\, \Theta = \theta) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j(\theta) t_{l_1 l_2}(j), \tag{1}$$

gdzie $p_j(\theta) = \mathbb{P}(N_{t+1} = j \,|\, \Theta = \theta)$. Macierz przejścia można zapisać jako

$$\boldsymbol{M}(\theta) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j(\theta) \boldsymbol{T}(j). \tag{2}$$

Oznaczając przez $\boldsymbol{e}_0$ wierszowy wektor o $s+1$ współrzędnych 1 na miejscu l_0 i 0 na pozostałych współrzędnych, rozkłady zmiennych L_k można wyznaczyć ze wzoru

$$\boldsymbol{\pi}^{(k)}(\theta) = \boldsymbol{e}_0 \left[\boldsymbol{M}(\theta) \right]^k, \tag{3}$$

gdzie $\pi^{(k)}(\theta) = \left(\pi_0^{(k)}(\theta), \ldots, \pi_s^{(k)}(\theta)\right)$ oraz $\pi_l^{(k)}(\theta) = \mathbb{P}(L_k = l \,|\, \Theta = \theta)$.

Najczęściej reguły przejścia są określone w taki sposób, że w odpowiednio długim czasie możliwe jest przejście między dowolnymi klasami systemu, dzięki czemu badany łańcuch Markowa jest nieprzywiedlny. Ponadto ubezpieczeni w najlepszej klasie taryfowej pozostają w niej po bezszkodowym roku, co implikuje nieokresowość łańcucha, tj. istnienie takiej liczby n_0, że macierze $\left(\boldsymbol{M}(\theta)\right)^n$ mają dla $n > n_0$ wszystkie elementy ściśle dodatnie. Dzięki temu łańcuch jest ergodyczny i jego rozkłady bezwarunkowe są zbieżne do rozkładu stacjonarnego opisanego wektorem

$$\boldsymbol{\pi}(\theta) = \left(\pi_0(\theta), \ldots, \pi_s(\theta)\right) = \lim_{k \to \infty} \boldsymbol{\pi}^{(k)}(\theta),$$

który można wyznaczyć ze wzoru[5]

$$\boldsymbol{\pi}(\theta) = \boldsymbol{e}\left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M}(\theta) + \boldsymbol{E}\right)^{-1}, \tag{4}$$

gdzie $\boldsymbol{e}$ oznacza $(s+1)$-wymiarowy wektor o wszystkich współrzędnych równych 1, $\boldsymbol{I}$ jest macierzą jednostkową wymiaru $(s+1)(s+1)$, a **E** to macierz wymiaru $(s+1)(s+1)$ złożona z jedynek.

[5] T. Rolski, H. Schimdli, V. Schmidt, J. Teugels, *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, Wiley, New York 1999, s. 288.

3. System bonus-malus z korektą składki

Rozważymy teraz system bonus-malus, w którym składka jest płacona w dwóch ratach – na początku oraz na końcu okresu obowiązywania umowy ubezpieczenia. Pierwsza rata, płatna na początku okresu, będzie zależeć od klasy taryfowej systemu bonus-malus, w której znajduje się ubezpieczony. Z kolei wysokość drugiej raty, płatnej na końcu okresu, może zależeć zarówno od klasy taryfowej, jak i od liczby szkód zgłoszonych przez ubezpieczonego w ciągu tego okresu. Przedstawiony system może być więc postrzegany jako uproszczona implementacja koncepcji *pay-as-you-drive*, tj. taryfikacji opartej na sposobie jazdy kierowcy w trakcie okresu ubezpieczenia.

Przejdziemy teraz do problemu wyznaczenia składki w tak skonstruowanym systemie bonus-malus. Mnożnik składki płaconej przez ubezpieczonego losowo wybranego z populacji za okres $\left[t,t+1\right)$, oznaczany dalej przez P_{t+1}, jest postaci

$$P_{t+1}=P_{t+1}\left(L_t,N_{t+1}\right)=p\left(L_t\right)+b\left(L_t,N_{t+1}\right), \tag{5}$$

gdzie L_t jest klasą SBM ubezpieczonego w momencie t, N_{t+1} jest liczbą szkód zgłoszoną w okresie $\left[t,t+1\right)$, a p i b są pewnymi funkcjami o wartościach rzeczywistych. Równanie (5) przedstawia podział całkowitej składki, P_{t+1}, na część płatną na początku okresu, $p\left(L_t\right)$, oraz część płatną na końcu okresu, gdy wartość zmiennej losowej N_{t+1} staje się znana – $b\left(L_t,N_{t+1}\right)$. Pojawia się pytanie, jakie funkcje p oraz b należy przyjąć. W niniejszym punkcie zaproponujemy trzy metody ich wyznaczenia przez rozwiązanie pewnego zadania optymalizacyjnego. Pierwsza z nich, bazująca na asymptotycznym kryterium R. Norberga[6], opiera się na średniokwadratowej aproksymacji indywidualnego parametru ryzyka za pomocą zmiennych losowych L_t i N_{t+1}. Druga metoda odwołuje się do metody V. Gilde i B. Sundta[7], zawężając dopuszczalną klasę funkcji do funkcji liniowych, natomiast w ostatniej metodzie jest rozpatrywany wariant, w którym występuje wyłącznie zwrot części składki w nagrodę za bezszkodową jazdę.

---

[6] R. Norberg, *A Credibility Theory for Automobile Bonus Systems*, „Scandinavian Actuarial Journal" 1976, vol. 36, issue 2, s. 92–107.

[7] V. Gilde, B. Sundt, *On Bonus Systems with Credibility Scales*, „Scandinavian Actuarial Journal" 1989, issue 1, s. 13–22.

3.1. Metoda I – metoda bayesowska

Z przyjętego modelu powstawania szkód wynika, że dla ubezpieczonego o wartości parametru ryzyka θ sprawiedliwa (w sensie wartości oczekiwanej) składka jest równa $\theta\lambda\mu$. Ubezpieczyciel nie zna jednak wartości parametru θ i będzie zainteresowany jego estymacją na podstawie historii szkodowej danego kierowcy lub całego portfela. R. Norberg zaproponował, aby mnożnik składki, traktowany jako zmienna losowa będąca funkcją klasy taryfowej zajmowanej w systemie bonus-malus, minimalizował wartość wyrażenia $\mathbb{E}\left(\Theta - p\left(L_t\right)\right)^2$ (tzw. błąd średniokwadratowy lub ryzyko estymatora), gdzie Θ jest zmienną losową wyrażającą zróżnicowanie skłonności do ryzyka w populacji ubezpieczonych, a L_t jest klasą taryfową zajmowaną w systemie w momencie t przez losowo wybranego ubezpieczonego[8]. Aby wyznaczony w ten sposób mnożnik składki nie zależał od t, zakłada się, że system osiągnął stacjonarność, tzn. $\mathbb{P}\left(L_t = l \mid \Theta = \theta\right) = \pi_l\left(\theta\right)$. Założenie to przyjmiemy również w niniejszej pracy.

W dalszych rozważaniach użyteczny będzie następujący lemat:

Lemat 3.1. Niech Y oraz $\boldsymbol{X} = \left(X_1, \ldots, X_n\right)$ będą zmiennymi losowymi oraz niech $\mathbb{E}Y^2 < +\infty$. Wartość wyrażenia

$$\mathbb{E}\left(Y - \boldsymbol{\Psi}\left(\boldsymbol{X}\right)\right)^2$$

jest minimalizowana w klasie rzeczywistych funkcji mierzalnych $\boldsymbol{\Psi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ przez funkcję

$$\boldsymbol{\Psi}^*\left(X_1, \ldots, X_n\right) = \mathbb{E}(Y \mid X_1, \ldots, X_n).$$

Dowód powyższego lematu można znaleźć w pracy H. Bühlmanna i A. Gislera[9].

Przypuśćmy teraz, że zarówno mnożnik składki początkowej, jak i mnożnik składki całkowitej (traktowane jako funkcje zmiennych losowych L_t oraz L_t i N_{t+1}, odpowiednio) są estymatorami zmiennej losowej Θ o najmniejszym błędzie średniokwadratowym. Rozwiązanie tak postawionego problemu podaje twierdzenie 3.2.

---

[8] R. Norberg, op.cit., s. 96.

[9] H. Bühlmann, A. Gisler, *A Course in Credibility Theory and its Applications*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg 2005, s. 18–19.

Twierdzenie 3.2. Wartość wyrażeń

$$V_1 = \mathbb{E}\left(\Theta - p\left(L_t\right)\right)^2$$

oraz

$$V_2 = \mathbb{E}\left(\Theta - p\left(L_t\right) - b\left(L_t, N_{t+1}\right)\right)^2$$

jest jednocześnie minimalizowana przez

$$p_{bayes}\left(L_t\right) = \mathbb{E}(\Theta \mid L_t) \tag{6}$$

oraz

$$b_{bayes}\left(L_t, N_{t+1}\right) = \mathbb{E}\left(\Theta \middle| L_t, N_{t+1}\right) - \mathbb{E}(\Theta \mid L_t). \tag{7}$$

Dowód. Z lematu 3.1 wynika, że wartość wyrażenia V_1 jest minimalizowana przez $p\left(L_t\right) = \mathbb{E}(\Theta \mid L_t)$, natomiast wartość wyrażenia V_2 osiąga minimum dla $p\left(L_t\right) + b\left(L_t, N_{t+1}\right) = \mathbb{E}\left(\Theta \middle| L_t, N_{t+1}\right)$. Stąd łatwo wynika teza twierdzenia.

Zwróćmy uwagę na to, że minimalizacja wartości wyrażeń V_1 i V_2, o których mowa w powyższym twierdzeniu, jest równoważna z minimalizacją wyrażenia

$$V = \mathbb{E}\left(\Theta - p\left(L_t\right)\right)^2 + \mathbb{E}\left(\Theta - p\left(L_t\right) - b\left(L_t, N_{t+1}\right)\right)^2, \tag{8}$$

które można interpretować następująco: w pierwszym kroku na podstawie dostępnej informacji L_t jest ustalana optymalna (w sensie średniokwadratowym) składka $p\left(L_t\right)$. Z kolei na koniec okresu ubezpieczenia nowa informacja, N_{t+1}, jest wykorzystywana za pośrednictwem wyrażenia $b\left(L_t, N_{t+1}\right)$ do aproksymacji pozostałej niejednorodności, $\Theta - p\left(L_t\right)$. Warto odnotować, że minimalizacja V jest tożsama z rozwiązaniem zadania

$$\mathbb{E}\left\|\left(\Theta,\ \Theta - p\left(L_t\right)\right) - \left(p\left(L_t\right), b\left(L_t, N_{t+1}\right)\right)\right\|_2 \to min, \tag{9}$$

gdzie $\left\|\cdot\right\|_2$ jest standardową normą euklidesową w $\mathbb{R}^2$. Obserwacja ta sugeruje inne metody ustalania mnożników składki, oparte np. na normie $\left\|\cdot\right\|_1$.

Przy przyjętych założeniach optymalne mnożniki składki wyrażają się wzorami

$$p_{bayes}(l)=\frac{\int_0^{\infty}\theta\pi_l(\theta)f_{\Theta}(\theta)d\theta}{\int_0^{\infty}\pi_l(\theta)f_{\Theta}(\theta)d\theta},\quad l=0,\dots,s,$$
$$b_{bayes}(l,k)=\frac{\int_0^{\infty}\theta\pi_l(\theta)p_k(\theta)f_{\Theta}(\theta)d\theta}{\int_0^{\infty}\pi_l(\theta)p_k(\theta)f_{\Theta}(\theta)d\theta}-p_{bayes}(l),\quad l=0,\dots,s\quad k=0,1,\dots, \tag{10}$$

gdzie $p_k(\theta)$ oznacza prawdopodobieństwo, że ubezpieczony o parametrze ryzyka równym θ zgłosi w ciągu okresu k szkód. W przypadku PCM mamy $p_k(\theta)=\exp(-\lambda\theta)\frac{(\lambda\theta)^k}{k!}$. W ogólności powyższe współczynniki trudno wyznaczać analitycznie, m.in. ze względu na skomplikowaną postać $\pi_l(\theta)$, w związku z tym muszą zostać wyznaczone na drodze całkowania numerycznego. Zwróćmy uwagę na fakt, że wyznaczając współczynniki $b_{bayes}(l,k)$, można ograniczyć się do tych k, które pojawiają się w regułach przejścia dla rozważanego systemu. Przykładowo, jeśli wyróżnia się zmianę klasy taryfowej przy 0, 1 i dwóch lub więcej szkodach, wystarczy wyznaczyć tylko $\mathbb{E}(\Theta|L=l,N=0)-\mathbb{E}(\Theta|L=l)$, $\mathbb{E}(\Theta|L=l,N=1)-\mathbb{E}(\Theta|L=l)$ oraz $\mathbb{E}(\Theta|L=l,N\geq 2)-\mathbb{E}(\Theta|L=l)$. W takim przypadku każdemu przejściu między klasami zostaje przypisana jednoznacznie wysokość korekty składki. Obliczenia wymagają wtedy odpowiedniej modyfikacji wzoru (10), polegającej na zastąpieniu dla $k\geq k_0$ prawdopodobieństwa $p_k(\theta)$ przez warunkowe prawdopodobieństwo, że ubezpieczony o parametrze ryzyka równym θ zgłosi k_0 lub więcej szkód, gdzie k_0 oznacza liczbę szkód wyróżnionych w regułach przejścia SBM.

Przejdziemy teraz do analizy własności mnożników składki otrzymanych za pomocą prezentowanej metody. Po pierwsze, SBM o tak wyznaczonych współczynnikach zachowuje pożądaną własność równowagi finansowej. Mamy $\mathbb{E}(p(L_t))=\mathbb{E}(\mathbb{E}(\Theta|L_t))=\mathbb{E}\Theta=1$, co oznacza, że indywidualne zniżki i zwyżki nie wpływają po osiągnięciu stanu stacjonarnego na łączną wartość składki zebranej przez ubezpieczyciela. Ponadto zachodzi

$$\mathbb{E}(b(L_t,N_{t+1})\mid L_t)=\mathbb{E}(\mathbb{E}(\Theta|L_t,N_{t+1})-\mathbb{E}(\Theta\mid L_t)\mid L_t)=0,$$

co wynika bezpośrednio z własności warunkowej wartości oczekiwanej. Powyższa równość oznacza, że po osiągnięciu stanu stacjonarnego średnia korekta składki na końcu okresu jest dla każdej klasy równa 0.

Po drugie, można postulować, aby SBM z korektą składki pozwalał na lepszą (w stosunku do standardowego SBM) ocenę ryzyka. Zauważmy, że zachodzi

$$\mathbb{E}\left(\Theta-\mathbb{E}\left(\Theta|L_t\right)\right)^2 \geq \mathbb{E}\left(\Theta-\mathbb{E}\left(\Theta|L_t,N_{t+1}\right)\right)^2.$$

Powyższa nierówność wynika bezpośrednio z lematu 3.1 – optymalny estymator oparty na zmiennych L_t oraz N_{t+1} nie może być gorszy niż optymalny estymator oparty tylko na zmiennej L_t, gdyż w przeciwnym razie można by było zmniejszyć błąd średniokwadratowy, przyjmując wyjściowy estymator. Wynika stąd, że mnożnik składki całkowitej w omawianej metodzie, równy $\mathbb{E}\left(\Theta|L_t,N_{t+1}\right)$, cechuje się mniejszym błędem oceny ubezpieczonych niż mnożnik składki w systemie standardowym, równy $\mathbb{E}\left(\Theta|L_t\right)$.

Po trzecie, rozsądne wydaje się wymaganie, że dopłata składki na końcu okresu rośnie wraz z liczbą zgłoszonych szkód. Jednocześnie ubezpieczyciel chciałby uniknąć sytuacji, gdy pomimo braku szkody ubezpieczony musi wnieść dodatkową składkę na końcu okresu. Okazuje się, że oba postulaty są spełnione przy naturalnym założeniu, że liczba zgłoszonych szkód rośnie wraz z parametrem ryzyka Θ. Aby sformalizować i udowodnić to stwierdzenie, przedstawimy teraz wybrane fakty dotyczące relacji porządku stochastycznego, natomiast szerokie omówienie tej tematyki można znaleźć m.in. w pracach R. Kaasa i innych[10] oraz M. Denuita i innych[11].

Porządkiem stochastycznym nazwiemy relację dwuargumentową w zbiorze dystrybuant rozkładu prawdopodobieństwa spełniającą warunki częściowego porządku, tj. relację zwrotną, przechodnią i antysymetryczną. W literaturze aktuarialnej i ekonomicznej można spotkać wiele relacji porządku stochastycznego, natomiast w dalszej części pracy zostanie wykorzystany jeden z najpopularniejszych porządków, a mianowicie dominacja stochastyczna pierwszego rzędu. Powiemy, że zmienna losowa Y dominuje stochastycznie nad zmienną losową X, jeśli dla każdego $t \in \mathbb{R}$ zachodzi $F_X\left(t\right) \geq F_Y\left(t\right)$, gdzie F_X i F_Y są dystrybuantami rozkładu prawdopodobieństwa zmiennych odpowiednio X i Y. Stosujemy wtedy oznaczenie $X \preceq_{ST} Y$. Relacja dominacji stochastycznej przenosi się na relację między parametrami rozkładów badanych zmiennych, o czym mówi następne twierdzenie.

Twierdzenie 3.3. Jeśli X i Y są zmiennymi losowymi takimi, że $X \preceq_{ST} Y$, to

(1) dla każdego $p \in \left(0,1\right)$ zachodzi $q_X\left(p\right) \leq q_Y\left(p\right)$, gdzie $q_X\left(p\right)$ oznacza kwantyl rzędu p zmiennej losowej X zdefiniowany jako $q_X\left(p\right) = \inf\{x \in \mathbb{R}: F_X\left(x\right) \geq p\}$;

[10] R. Kaas, M.J. Goovaerts, J. Dhaene, M. Denuit, *Modern Actuarial Risk Theory*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 2001.

[11] M. Denuit, J. Dhaene, M. Goovaerts, R. Kaas, *Actuarial Theory for Dependent Risks: Measures, Orders and Models*, Wiley, New York 2005.

(2) jeśli dodatkowo X i Y są nieujemne i całkowalne, to zachodzi $\mathbb{E}X \le \mathbb{E}Y$. Dowód powyższych faktów można znaleźć w pracy M. Denuita i innych[12].

Drugim porządkiem, który zostanie wykorzystany w dalszych rozważaniach, jest porządek wiarygodności (ang. *likelihood ratio order*). Zdefiniowany jest on następująco:

Definicja 3.2. Niech X oraz Y będą zmiennymi losowymi o gęstościach odpowiednio f_X i f_Y. Mówimy, że Y jest większe niż X według porządku wiarygodności wtedy i tylko wtedy, gdy odwzorowanie $t \mapsto \frac{f_Y(t)}{f_X(t)}$ jest rosnące na zbiorze będącym sumą mnogościową nośników zmiennych losowych X i Y. Stosujemy wtedy oznaczenie $X \preceq_{LR} Y$. W przypadku zmiennych dyskretnych przyjmujących wartości w zbiorze $\mathbb{N} = \{0,1,\ldots\}$ porządek wiarygodności definiujemy analogicznie, zastępując gęstości funkcjami prawdopodobieństwa.

Następne twierdzenie wskazuje, że porządek wiarygodności jest mocniejszy niż relacja dominacji stochastycznej.

Twierdzenie 3.4. Niech X i Y będą ciągłymi lub dyskretnymi zmiennymi losowymi, takimi że $X \preceq_{LR} Y$. Wtedy $X \preceq_{ST} Y$.

Dowód. Podamy teraz dowód tego faktu w przypadku dyskretnym, natomiast dowód w wersji ciągłej można znaleźć w pracy M. Denuita i innych[13]. Z warunku $X \preceq_{LR} Y$ wynika, że dla $n, m \in \mathbb{N}$ takich, że $m \ge n$, zachodzi $\frac{p_Y(m)}{p_X(m)} \ge \frac{p_Y(n)}{p_X(n)}$, gdzie p_X oraz p_Y oznaczają funkcje prawdopodobieństwa odpowiednio zmiennych X i Y. Równoważnie dla $m \ge n$ zachodzi $p_Y(m)p_X(n) \ge p_Y(n)p_X(m)$. Ustalmy teraz $k \in \mathbb{N}$ i zdefiniujmy zbiory $A = \{n \in \mathbb{N} : n > k\}$ oraz $B = \{n \in \mathbb{N} : n \le k\}$. Korzystając z ostatniej nierówności, otrzymujemy

$$\left(\sum_{m \in A} p_Y(m)\right) \cdot \left(\sum_{n \in B} p_X(n)\right) \ge \left(\sum_{n \in B} p_Y(n)\right) \cdot \left(\sum_{m \in A} p_X(m)\right).$$

Wynika stąd, że $\mathbb{P}(Y > k) \cdot \mathbb{P}(X \le k) \ge \mathbb{P}(Y \le k) \cdot \mathbb{P}(X > k)$ i w konsekwencji $\mathbb{P}(X \le k) \ge \mathbb{P}(Y \le k)$. Z dowolności k wynika zatem, że $X \preceq_{ST} Y$.

[12] Ibidem, s. 108–112.
[13] Ibidem, s. 129.

Z twierdzenia 3.4 wynika w szczególności, że dla porządku wiarygodności prawdziwa jest teza twierdzenia 3.3, tj. implikuje on odpowiednie nierówności dla kwantyli oraz wartości oczekiwanych.

Wróćmy do analizy własności współczynników korekty składki w systemie bonus-malus. Udowodnimy teraz, że korekta składki jest rosnącą funkcją liczby zgłoszonych szkód przy założeniu, że liczba szkód rośnie wraz z parametrem ryzyka Θ, przy czym mamy tu na myśli relację $\left[N|\,\Theta=\theta\right]\preceq_{LR}[N\,|\,\Theta=\theta']$ dla $\theta'\geq\theta$, gdzie $[N\,|\,\Theta=\theta]$ oznacza zmienną losową, której rozkład prawdopodobieństwa jest identyczny z rozkładem warunkowym zmiennej N pod warunkiem $\Theta=\theta$.

Twierdzenie 3.5. Rozważmy model wiarygodności z parametrem ryzyka Θ o rozkładzie prawdopodobieństwa danym gęstością f oraz warunkowym (względem parametru ryzyka) rozkładzie liczby szkód N takim, że $\left[N|\,\Theta=\theta\right]\preceq_{LR}[N\,|\,\Theta=\theta']$ dla $\theta'\geq\theta$. Niech

$$p\left(l\right)=\mathbb{E}\left(\Theta|L_t=l\right),\quad l=0,1,2,\ldots,s$$

oraz

$$b\left(l,k\right)=\mathbb{E}\left(\Theta|L_t=l,N_{t+1}=k\right)-\mathbb{E}\left(\Theta|L_t=l\right)$$

będą odpowiednio mnożnikami składki początkowej i korekty w systemie bonus-malus o ustalonej macierzy przejścia. Prawdziwe są wtedy następujące stwierdzenia:

(1) dla każdego $l=0,1,2,\ldots,s$ funkcja $b\left(l,k\right)$ jest rosnąca względem k;

(2) $b\left(l,0\right)<0$ dla każdego $l=0,1,2,\ldots,s$.

Dowód. Aby udowodnić (1), należy pokazać, że przy ustalonym l zachodzi $\mathbb{E}\left(\Theta|L_t=l,N_{t+1}=k\right)\leq\mathbb{E}\left(\Theta|L_t=l,N_{t+1}=k'\right)$ dla $k'\geq k$. Co więcej, na mocy twierdzenia 3.4 wystarczy pokazać, że $\left[\Theta\middle|L_t=l,N_{t+1}=k\right]\preceq_{LR}\left[\Theta\middle|L_t=l,N_{t+1}=k'\right]$. Oznaczmy w tym celu przez $g\left(\theta,l,k\right)$ funkcję prawdopodobieństwa łącznego rozkładu wektora $\left(\Theta,L_t,N_{t+1}\right)$. Dla uproszczenia zapisu tym samym symbolem oznaczymy odpowiednie rozkłady brzegowe i warunkowe, o ile nie doprowadzi to do nieporozumień.

Na mocy definicji 3.2 naszym celem jest wykazanie, że dla $\theta'\geq\theta$ i $k'\geq k$ zachodzi

$$\frac{g(\theta\,|\,l,k')}{g(\theta\,|\,l,k)}<\frac{g(\theta'\,|\,l,k')}{g(\theta'\,|\,l,k)}.$$

Powyższą nierówność możemy zapisać równoważnie jako

$$\frac{g(\theta'\,|\,l,k)}{g(\theta\,|\,l,k)} < \frac{g(\theta'\,|\,l,k')}{g(\theta\,|\,l,k')}.$$

Korzystając z definicji warunkowej gęstości oraz warunkowej niezależności zmiennych L_t i N_{t+1} przy ustalonej wartości $\Theta = \theta$, możemy napisać

$$\frac{g(\theta'\,|\,l,k)}{g(\theta\,|\,l,k)} = \frac{g\left(\theta',l,k\right)}{g\left(\theta,l,k\right)} = \frac{g\left(l,k|\,\theta'\right)f\left(\theta'\right)}{g\left(l,k|\,\theta\right)f\left(\theta\right)} = \frac{p_k\left(\theta'\right)}{p_k\left(\theta\right)}\cdot\frac{\pi_l\left(\theta'\right)}{\pi_l\left(\theta\right)}\cdot\frac{f\left(\theta'\right)}{f\left(\theta\right)}.$$

Skorzystamy teraz z założenia, że $\left[N_{t+1}|\,\Theta = \theta\right] \preceq_{LR} [N_{t+1}\,|\,\Theta = \theta']$ dla $\theta' \geq \theta$. Oznacza to, że dla $k' \geq k$ i $\theta' \geq \theta$ zachodzi

$$\frac{p_k\left(\theta'\right)}{p_k\left(\theta\right)} \leq \frac{p_{k'}\left(\theta'\right)}{p_{k'}\left(\theta\right)},$$

co daje oszacowanie

$$\frac{p_k\left(\theta'\right)}{p_k\left(\theta\right)}\cdot\frac{\pi_l\left(\theta'\right)}{\pi_l\left(\theta\right)}\cdot\frac{f\left(\theta'\right)}{f\left(\theta\right)} \leq \frac{p_{k'}\left(\theta'\right)}{p_{k'}\left(\theta\right)}\cdot\frac{\pi_l\left(\theta'\right)}{\pi_l\left(\theta\right)}\cdot\frac{f\left(\theta'\right)}{f\left(\theta\right)} = \frac{g(\theta'\,|\,l,k')}{g(\theta\,|\,l,k')}.$$

Wynika stąd, że $\left[\Theta\middle|L_t = l, N_{t+1} = k\right] \preceq_{LR} \left[\Theta\middle|L_t = l, N_{t+1} = k'\right]$, a zatem w szczególności $\mathbb{E}\left(\Theta|L_t = l, N_{t+1} = k\right) \leq \mathbb{E}\left(\Theta|L_t = l, N_{t+1} = k'\right)$ dla $k' \geq k$. Wynika stąd, że dla ustalonego l funkcja $b(l,k)$ jest niemalejąca względem k.

Aby udowodnić (2), wystarczy zauważyć, że

$$\sum_k b\left(l,k\right)\mathbb{P}(N_{t+1} = k\,|\,L_t = l) = \mathbb{E}\left(\Theta|L_t = l\right) - \mathbb{E}\left(\Theta|L_t = l\right) = 0,$$

co wobec tego, że nie wszystkie współczynniki są równe 0, oznacza, że co najmniej jeden z nich musi być ujemny. Z (1) wynika, że $b\left(l,0\right) \leq b\left(l,k\right)$ dla każdego $k \geq 0$, a stąd wynika, że $b\left(l,0\right) < 0$.

Uwaga I. Do rozważanej klasy modeli należy w szczególności opisany wcześniej poissonowski model wiarygodności. Jeśli $\left[N_{t+1}|\,\Theta = \theta\right] \sim Poiss\left(\lambda\theta\right)$, to

$$\frac{p_k\left(\theta'\right)}{p_k\left(\theta\right)} = \frac{\exp\left(-\lambda\theta'\right)\dfrac{\left(\lambda\theta'\right)^k}{k!}}{\exp\left(-\lambda\theta\right)\dfrac{\left(\lambda\theta\right)^k}{k!}} = \exp\left(-\lambda\left(\theta'-\theta\right)\right)\left(\frac{\theta'}{\theta}\right)^k,$$

co wobec $\theta' \geq \theta$ oznacza, że powyższe wyrażenie jest rosnącą funkcją k, zatem $\left[N|\,\Theta=\theta\right] \preceq_{LR} [N\,|\,\Theta=\theta']$ dla $\theta' \geq \theta$.

Uwaga II. Wnioski z twierdzenia 3.5 przenoszą się bez istotnych zmian na przypadek, gdy zostanie przyjęta modułowa funkcja straty, tzn. będziemy rozważać wyrażenie

$$V_{mod} = \mathbb{E}\left|\Theta - p\left(L_t\right)\right| + \mathbb{E}\left|\Theta - p\left(L_t\right) - b\left(L_t, N_{t+1}\right)\right|.$$

Można pokazać, że oba składniki powyższej sumy są minimalizowane przez $p\left(L_t\right) = med(\Theta\,|\,L_t)$ oraz $b\left(L_t, N_{t+1}\right) = med\left(\Theta|L_t, N_{t+1}\right) - med(\Theta\,|\,L_t)$, gdzie *med* oznacza medianę rozkładu *a posteriori*. Z twierdzeń 3.4 i 3.5 wynika, że relacja $\left[\Theta\middle|L_t = l, N_{t+1} = k\right] \preceq_{LR} \left[\Theta\middle|L_t = l, N_{t+1} = k'\right]$ implikuje nierówność kwantyli rozkładu zmiennej $[\Theta\,|\,L_t = l, N_{t+1} = k]$, a zatem w szczególności dotyczy to mediany.

3.2. Metoda II – liniowe mnożniki składki

W poprzednim punkcie optymalne mnożniki składki zostały wyznaczone jako wartości funkcji minimalizujących średniokwadratowy błąd estymacji. Otrzymane w ten sposób współczynniki mają dość skomplikowaną postać, a ich wyznaczenie wymaga wykorzystania metod numerycznych. W związku z tym atrakcyjną alternatywą może być ograniczenie klasy dopuszczalnych funkcji do funkcji liniowych. Mnożnik składki całkowitej płaconej przez ubezpieczonego losowo wybranego z populacji przybiera wtedy postać

$$P_{t+1}\left(L_t, N_{t+1}\right) = \alpha + \beta L_t + \gamma N_{t+1}. \tag{11}$$

Korzyści z tej modyfikacji polegają na uproszczeniu obliczeń, a także prowadzą do bardziej przejrzystej dla klienta, liniowej skali bonus-malus, w szczególności wprowadzając stały mnożnik korekty w wysokości γ za każdą zgłoszoną szkodę.

Tak jak w przypadku metody bayesowskiej można postulować, aby zarówno składka płacona na początku okresu, jak i składka łączna minimalizowały błąd średniokwadratowy, co można łącznie ująć w warunku

$$V_{lin} = \mathbb{E}\left(\Theta - p_{lin}\left(L_t\right)\right)^2 + \mathbb{E}\left(\Theta - p_{lin}\left(L_t\right) - b_{lin}\left(L_t, N_{t+1}\right)\right)^2 \to \min, \tag{12}$$

gdzie $p_{lin}\left(L_t\right) = \alpha_0 + \alpha_1 L_t$ oraz $p_{lin}\left(L_t, N_{t+1}\right) + b_{lin}\left(L_t, N_{t+1}\right) = \beta_0 + \beta_1 L_t + \beta_2 N_{t+1}$.

Przed rozwiązaniem zadania (12) zajmiemy się najpierw ogólnym problemem średniokwadratowej aproksymacji zmiennej losowej X za pomocą zmiennych

$Y_1,\ldots,Y_m$. Będziemy zakładać, że rozważane zmienne są całkowalne z kwadratem, i wprowadzimy następujące oznaczenia:

$$\boldsymbol{Y} = \left(Y_1,\ldots,Y_m\right)', \quad \mathbb{E}\boldsymbol{Y} = \left(\mathbb{E}Y_1,\ldots,\mathbb{E}Y_m\right)',$$

$$\Sigma_{X,\boldsymbol{Y}} = \left(Cov\left(X,Y_1\right),\ldots,Cov\left(X,Y_m\right)\right)', \qquad \Sigma_{\boldsymbol{Y}} = \left[Cov\left(Y_i,Y_j\right)\right]_{mm},$$

gdzie Cov oznacza kowariancję, a apostrof oznacza transpozycję wektora. Interesować nas będzie minimalizacja wyrażenia $\mathbb{E}\left(X-Y\right)^2$, gdzie

$$Y \in \mathbb{L} = \left\{Y : Y = \alpha_0 + \alpha' \cdot \boldsymbol{Y}, \quad \alpha_0 \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^m\right\}.$$

Rozwiązanie tak postawionego problemu podaje poniższe twierdzenie, zaczerpnięte z pracy T. Mikoscha[14].

Twierdzenie 3.6. Niech $X,Y_1,Y_2,\ldots,Y_m$ będą zmiennymi losowymi o skończonej wariancji. Prawdziwe są wtedy następujące stwierdzenia:

(i) Jeśli $\left(\alpha_0,\alpha\right)$ jest dowolnym rozwiązaniem układu równań liniowych

$$\alpha_0 = \mathbb{E}X - \alpha' \cdot \mathbb{E}\boldsymbol{Y}, \quad \Sigma'_{X,\boldsymbol{Y}} = \alpha' \cdot \Sigma_{\boldsymbol{Y}}, \tag{13}$$

a $\hat{Y} = \alpha_0 + \alpha' \cdot \boldsymbol{Y}$, to dla każdego $Y \in \mathbb{L}$ zachodzi $\mathbb{E}\left(X-Y\right)^2 \geq \mathbb{E}\left(X-\hat{Y}\right)^2$. Co więcej, wartość wyrażenia $\mathbb{E}\left(X-\hat{Y}\right)^2$ nie zależy od wyboru rozwiązania układu (13). Jednocześnie warunek (13) jest konieczny, aby $\hat{Y}$ minimalizowało błąd średniokwadratowy w klasie $\mathbb{L}$.

(ii) Wprowadzony wyżej estymator $\hat{Y}$ spełnia układ równań

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}\hat{Y}, \quad Cov\left(X,Y_i\right) = Cov\left(\hat{Y},Y_i\right), \quad i=1,\ldots,m. \tag{14}$$

(iii) Jeśli macierz $\Sigma_{\boldsymbol{Y}}$ jest nieosobliwa, to optymalny estymator $\hat{Y}$ zmiennej X w klasie $\mathbb{L}$ jest wyznaczony jednoznacznie i wyraża się wzorem

$$\hat{Y} = \mathbb{E}X + \Sigma'_{X,\boldsymbol{Y}} \cdot \Sigma_{\boldsymbol{Y}}^{-1} \cdot \left(Y - \mathbb{E}\boldsymbol{Y}\right), \tag{15}$$

a ryzyko tego estymatora jest równe $\mathbb{E}\left(X-\hat{Y}\right)^2 = Var\left(X\right) - \Sigma'_{X,\boldsymbol{Y}} \cdot \Sigma_{\boldsymbol{Y}}^{-1} \cdot \Sigma_{X,\boldsymbol{Y}}$.

[14] T. Mikosch, *Non-Life Insurance Mathematics. An Introduction with Stochastic Processes*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg 2005, s. 204–208.

Parametry $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$, o których mowa w powyższym twierdzeniu, będziemy nazywać współczynnikami regresji zmiennej X względem zmiennych $Y_1, \ldots, Y_m$.

Korzystając z twierdzenia 3.6, otrzymujemy, że V_{lin} osiąga minimum dla

$$p_{lin}\left(L_t\right) = \alpha_0^* + \alpha_1^* L_t$$

oraz

$$p_{lin}\left(L_t\right) + b_{lin}\left(L_t, N_{t+1}\right) = \beta_0^* + \beta_1^* L_t + \beta_2^* N_{t+1},$$

gdzie α_0^*, α_1^* oraz $\beta_0^*, \beta_1^*, \beta_2^*$ są współczynnikami regresji odpowiednio zmiennej Θ względem L_t oraz L_t i N_{t+1}. W typowych przypadkach nie występuje liniowa zależność między L_t oraz N_{t+1}, zatem współczynniki te są wyznaczone jednoznacznie. Z powyższych wzorów wynika następująca postać korekty

$$b_{lin}\left(L_t, N_{t+1}\right) = \left(\beta_0^* - \alpha_0^*\right) + \left(\beta_1^* - \alpha_1^*\right) L_t + \beta_2^* N_{t+1}. \tag{16}$$

Przejdziemy teraz do omówienia własności mnożników składki otrzymanych omawianą metodą. Z pierwszej części warunku (14) wynika natychmiast, że

$$\mathbb{E}\left(p_{lin}\left(L_t\right)\right) = \mathbb{E}\left(p_{lin}\left(L_t\right) + b_{lin}\left(L_t, N_{t+1}\right)\right) = \mathbb{E}\Theta = 1$$

i w konsekwencji

$$\mathbb{E}\left(b_{lin}\left(L_t, N_{t+1}\right)\right) = 0.$$

Wynika stąd, że system bonus-malus z liniowymi mnożnikami składki spełnia warunek równowagi finansowej. Jednocześnie

$$\mathbb{E}\left(b_{lin}\left(L_t, N_{t+1}\right) | L_t\right) = \left(\beta_0^* - \alpha_0^*\right) + \left(\beta_1^* - \alpha_1^*\right) L_t + \beta_2^* \mathbb{E}\left(N_{t+1} | L_t\right).$$

Zachodzi $\mathbb{E}\left(N_{t+1} | L_t\right) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(N_{t+1} \mid \Theta, L_t) \mid L_t)) = \mathbb{E}(\lambda\Theta | L_t) = \lambda\mathbb{E}(\Theta \mid L_t)$. Zatem

$$\mathbb{E}\left(b_{lin}\left(L_t, N_{t+1}\right) | L_t\right) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{E}\left(\Theta | L_t\right) = \frac{\left(\alpha_0^* - \beta_0^*\right) + \left(\alpha_1^* - \beta_1^*\right) L_t}{\lambda\beta_2^*}.$$

Wynika stąd, że SBM z liniowymi mnożnikami składki nie będzie lokalnie zrównoważony w obrębie klasy taryfowej poza szczególnym przypadkiem, gdy wartość oczekiwana *a posteriori* parametru ryzyka, $\mathbb{E}\left(\Theta | L_t\right)$, jest afiniczną funkcją zmiennej L_t. Warto zwrócić uwagę na to, że w takim przypadku zachodzi $p_{bayes}\left(L_t\right) = p_{lin}\left(L_t\right)$.

Na podstawie wzoru (15) możemy w omawianym przypadku łatwo wyznaczyć współczynniki regresji. Są one równe:

$$\alpha_1^* = \frac{Cov(\Theta, L_t)}{Var(L_t)},$$

$$\alpha_0^* = \mathbb{E}\Theta - \alpha_1^* \mathbb{E}L_t$$

oraz

$$\beta_1^* = \frac{Cov(\Theta, L_t)Var(N_{t+1}) - Cov(\Theta, N_{t+1})Cov(L_t, N_{t+1})}{Var(N_{t+1})Var(L_t) - Cov(N_{t+1}, L_t)^2},$$

$$\beta_2^* = \frac{Cov(\Theta, N_{t+1})Var(L_t) - Cov(\Theta, L_t)Cov(L_t, N_{t+1})}{Var(N_{t+1})Var(L_t) - Cov(N_{t+1}, L_t)^2},$$

$$\beta_0^* = \mathbb{E}\Theta - \beta_1^* \mathbb{E}L_t - \beta_2^* \mathbb{E}N_{t+1}.$$

Warto zauważyć, że

$$\beta_1^* = \alpha_1^* - \beta_2^* \frac{Cov(L_t, N_{t+1})}{Var(L_t)}$$

oraz

$$\beta_0^* = \alpha_0^* - \beta_2^* \left(\mathbb{E}N_t - \mathbb{E}L_t \frac{Cov(L_t, N_{t+1})}{Var(L_t)} \right).$$

Zwróćmy uwagę na to, że warunkiem praktycznego stosowania omawianej metody jest $\beta_2^* > 0$. Wtedy jeśli $Cov(L_t, N_{t+1}) > 0$, to $\beta_1^* < \alpha_1^*$ i korekta jest malejącą funkcją klasy taryfowej. Może się również zdarzyć, że $\beta_0^* < \alpha_0^*$. Wynika stąd, że łączna składka dla bezszkodowego kierowcy ($N_{t+1} = 0$) może być niższa w SBM z korektą składki niż ta w systemie klasycznym. Sugeruje to, że ubezpieczyciel, kierując się względami marketingowymi, może inaczej podzielić łączną składkę na składkę początkową i korektę. Przykładowo, bezszkodowy kierowca zapłaci na początku okresu niższą składkę (równą $\beta_0^* + \beta_1^* L_t$), natomiast na końcu okresu nie dojdzie do zwrotu składki ($\beta_2^* \cdot 0 = 0$). W ten sposób ubezpieczyciel może próbować przyciągnąć do siebie „dobrych" kierowców lub zachęcić już ubezpieczonych do korzystania ze zmodyfikowanego systemu.

Warto w tym miejscu rozważań zwrócić uwagę na to, że w przypadku ubezpieczeń typu *first-party* (np. popularne autocasco) wprowadzenie SBM z liniową postacią korekty powoduje, że na końcu okresu każda zgłoszona szkoda oznacza dla ubezpieczonego pewien dodatkowy koszt w wysokości określonej w relacji do składki podstawowej. W konsekwencji nieopłacalne jest zgłaszanie szkód, które nie przekraczają tego progu, a odszkodowania za szkody zgłoszone są o tę kwotę pomniejszane. Widać tu analogię do systemu z udziałem własnym o zmiennej wysokości, zaproponowanym w pracy S. Pitrebois, J.F. Walhina i M. Denuita[15]. W tym ujęciu przedstawiona metoda stanowi alternatywny sposób konstrukcji tego rodzaju systemu, nieodwołujący się do preferencji ubezpieczonego.

3.3. Metoda III – zwrot składki

Opisane wcześniej metody zakładały, że w przypadku zgłoszenia szkody ubezpieczony jest zobowiązany do wniesienia dodatkowej składki. Z marketingowego punktu widzenia bardziej atrakcyjny może być natomiast system, w którym kierowcy nie są dodatkowo karani za szkody, natomiast bezszkodowy kierowca zostanie nagrodzony zwrotem części składki. System taki może być również łatwiejszy w implementacji, jeśli weźmie się pod uwagę możliwe problemy z egzekwowaniem dodatkowej części składki od ubezpieczającego.

W systemie ze zwrotem mnożnik składki podstawowej dla losowo wybranego kierowcy będzie równy

$$P_{t+1} = p\left(L_t\right) + \alpha\left(L_t\right)\mathbf{1}\left(N_{t+1} = 0\right), \tag{17}$$

gdzie $\alpha\left(L_t\right)$ wyraża wysokość zwracanej części składki, zależną od klasy SBM, w której znajduje się ubezpieczony, a $\mathbf{1}\left(N_{t+1} = 0\right) = \begin{cases} 1 \text{ gdy } N_{t+1} = 0 \\ 0 \text{ gdy } N_{t+1} \neq 0 \end{cases}$. Będziemy zainteresowani minimalizacją ryzyka estymatora danego wzorem (17). Ryzyko to jest równe

$$V_{zwrot} = \mathbb{E}\left(\Theta - p\left(L_t\right) - \alpha\left(L_t\right)\mathbf{1}\left(N_{t+1} = 0\right)\right)^2. \tag{18}$$

Zmienne losowe $p\left(L_t\right)$ oraz $\alpha\left(L_t\right)\mathbf{1}\left(N_{t+1} = 0\right)$ można zapisać w postaci

[15] S. Pitrebois, J.F. Walhin, M. Denuit, op.cit.

$$p\left(L_t\right)=\sum_{l=0}^{s}p_l\mathbf{1}\left(L_t=l\right),\quad \alpha\left(L_t\right)\mathbf{1}\left(N_{t+1}=0\right)=\sum_{l=0}^{s}\alpha_l\mathbf{1}\left(L_t=l,N_{t+1}=0\right),$$

gdzie $p_l=p\left(l\right)$ oraz $\alpha_l=\alpha\left(l\right)$ dla $l=0,\ldots,s$. Obliczenie pochodnych cząstkowych V_{zwrot} względem $p_0,\ldots,p_s,\alpha_0,\ldots,\alpha_s$ i przyrównanie ich do zera prowadzi do następującego układu równań:

$$\frac{\partial V_{zwrot}}{\partial p_l}=-2\left(\mathbb{E}\Theta 1\left(L_t=l\right)-p_l\mathbb{P}\left(L_t=l\right)-\alpha_l\mathbb{P}\left(L_t=l,N_{t+1}=0\right)\right)=0,$$

$$\frac{\partial V_{zwrot}}{\partial \alpha_l}=-2\left(\mathbb{E}\Theta 1\left(L_t=l,N_{t+1}=0\right)-p_l\mathbb{P}\left(L_t=l,N_{t+1}=0\right)-\alpha_l\mathbb{P}\left(L_t=l,N_{t+1}=0\right)\right)=0$$

dla $l=0,\ldots,s$. Rozwiązując ten układ, otrzymujemy

$$\alpha_l=\frac{\mathbb{E}\left(\Theta|L_t=l,N_{t+1}=0\right)-\mathbb{E}(\Theta\mid L_t=l)}{1-\mathbb{P}(N_{t+1}=0\mid L_t=l)} \tag{19}$$

oraz

$$p_l=\frac{\mathbb{E}\left(\Theta|L_t=l\right)-\mathbb{P}\left(N_{t+1}=0|L_t=l\right)\cdot\mathbb{E}\left(\Theta|L_t=l,N_{t+1}=0\right)}{1-\mathbb{P}(N_{t+1}=0\mid L_t=l)} \tag{20}$$

dla $l=0,\ldots,s$.

Pozostaje wykazać, że znalezione rozwiązanie w istocie minimalizuje wyrażenie V_{zwrot}. W tym celu przepiszmy (14) jako

$$V_{zwrot}=\mathbb{E}\left(\Theta-p_0-\sum_{l=1}^{s}\left(p_l-p_0\right)1\left(L_t=l\right)-\sum_{l=0}^{s}\alpha_l 1\left(L_t=l,N_{t+1}=0\right)\right)^2. \tag{21}$$

Wynika stąd, że rozważany problem jest równoważny z regresją liniową z wyrazem wolnym zmiennej losowej Θ względem wektora

$$\boldsymbol{Y}=\left(\mathbf{1}\left(L_t=1\right),\ldots,\mathbf{1}\left(L_t=s\right),\mathbf{1}\left(L_t=0,N_{t+1}=0\right),\ldots,\mathbf{1}\left(L_t=s,N_{t+1}=0\right)\right).$$

Współrzędne wektora $\boldsymbol{Y}$ nie są liniowo zależne, zatem macierz $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{Y}}$ jest nieosobliwa. Z twierdzenia 3.6 wynika więc, że współczynniki regresji minimalizujące (21) istnieją i są wyznaczone jednoznacznie, a zatem muszą wyrażać się wzorami (19) i (20).

Omówimy teraz własności otrzymanych współczynników. Po pierwsze, zauważmy, że $\alpha_l = \frac{b_{bayes}(l,0)}{1-\mathbb{P}(N_{t+1}=0|L_t=l)}$, więc na mocy twierdzenia 3.5 $\alpha_l < 0$, zatem w istocie brak szkód prowadzi do zwrotu części składki. Jednocześnie $p_l + \alpha_l = p_{bayes}(l) + b_{bayes}(l,0)$, więc składka płacona przez bezszkodowego kierowcę jest identyczna jak składka w metodzie I. Po drugie, zwróćmy uwagę na to, że α_l jest rosnącą funkcją $\mathbb{P}(N_{t+1}=0|L_t=l)$. Oznacza to, że mniej szkodowemu kierowcy można zaproponować większy zwrot składki niż temu o większym prawdopodobieństwie zgłoszenia szkody. Po trzecie, z warunku $\frac{\partial V_{zwrot}}{\partial p_l} = 0$ wynika, że $p_{bayes}(l) - p_l = \alpha_l \mathbb{P}(N_{t+1}=0|L_t=l) < 0$. Oznacza to, że wprowadzenie systemu ze zwrotem składki wymaga podniesienia składki początkowej w stosunku do systemu, w którym funkcjonują również dopłaty. Wynika to z faktu, że koszty zwrotu składki są przenoszone na kierowców szkodowych, którzy płacą wyższą składkę na początku okresu, a potem jej wysokość się nie zmienia. Różnica jest tym większa, im większe jest prawdopodobieństwo, że kierowca znajdujący się we wskazanej klasie systemu bonus-malus nie zgłosi szkody. Wreszcie, dla ustalonego $l \in \mathcal{L}$ mamy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(p(L_t) + \alpha(L_t)\cdot 1(N_{t+1}=0)|L_t=l\Big) &= p_l + \alpha_l \cdot \mathbb{P}(N_{t+1}=0|L_t=l) = \\ &= p_l + \alpha_l - \big(1-\mathbb{P}(N_{t+1}=0|L_t=l)\big)\cdot\alpha_l = \\ &= p_{bayes}(l) + p_{bayes}(l,0) - p_{bayes}(l,0) = p_{bayes}(l).\end{aligned}$$

Mamy zatem $\mathbb{E}(P_{t+1}|L_t) = p_{bayes}(L_t)$, więc średnia składka w obrębie klasy systemu bonus-malus nie ulega zmianie w stosunku do systemu opisanego w metodzie I. W szczególności oznacza to, że $\mathbb{E}(P_{t+1}) = \mathbb{E}p_{bayes}(L_t) = 1$, zatem system ma własność globalnej równowagi finansowej.

Z powyższych rozważań płynie wniosek, że opisana metoda ma wiele pożądanych z aktuarialnego punktu widzenia własności. Jednocześnie, jeśli weźmie się pod uwagę relacje z klientem, metoda ta może być przedkładana nad wcześniej opisane metody, gdyż ubezpieczony w przypadku zgłoszenia szkody nie jest karany podwójnie – raz przez dopłatę składki, a drugi raz przez zakwalifikowanie do klasy taryfowej o wyższej składce początkowej. Zwróćmy również uwagę na fakt, że metoda ta może być stosowana przez zakłady ubezpieczeń o niskim poziomie składki czystej, dla których wzrost początkowej składki netto nie musi prowadzić do wzrostu składki taryfowej, a ten mógłby zagrozić konkurencyjności zakładu.

4. Przykłady numeryczne

W tej części pracy przedstawione metody wyznaczania parametrów SBM z korektą składki zostaną zilustrowane przykładami numerycznymi. Będziemy rozważać system bonus-malus o regułach przejścia opisanych w tabeli 1.

Tabela 1. Reguły przejścia analizowanego systemu bonus-malus

	Liczba szkód			
Klasa	0	1	2	≥3
5	4	5	5	5
4	3	5	5	5
3	2	5	5	5
2	1	4	5	5
1	0	3	5	5
0	0	2	4	5

Źródło: M. Denuit, X. Maréchal, S. Pitrebois, J. Walhin, *Actuarial Modelling of Claim Counts: Risk Classification, Credibility and Bonus-Malus Systems*, Wiley, New York 2007, s. 169.

System ten będziemy dalej oznaczać jako –1/+2. Przyjęty zostanie opisany wcześniej poissonowski model powstawania szkód z rozkładem $Poiss(\lambda\theta)$ jako rozkładem warunkowym oraz rozkładem parametru ryzyka $Gamma(a,a)$ o gęstości

$$f_{\Theta}(\theta) = \frac{a^a}{\Gamma(a)}\theta^{a-1}e^{-a\theta} \qquad \text{dla } \theta > 0,$$

gdzie $\Gamma(a) = \int_0^{\infty} t^{a-1}e^{-t}dt$ oznacza funkcję gamma.

Dla przyjętego rozkładu mamy więc $\mathbb{E}\Theta = 1$, $Var(\Theta) = \frac{1}{a}$ oraz $CV = \frac{1}{\sqrt{a}}$, gdzie Var oznacza wariancję, a $CV = \frac{\sqrt{Var(\Theta)}}{\mathbb{E}\Theta}$ jest współczynnikiem zmienności losowej. Do obliczeń przyjęto $\lambda = 0{,}1$ oraz wartości parametru $a \in \{1, 4, 25\}$.

Odpowiadają one współczynnikowi zmienności rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej Θ równemu odpowiednio 100%, 50% oraz 20%.

W tabeli 2 przedstawiono mnożniki składki początkowej oraz mnożniki korekty w metodzie bayesowskiej, obliczone za pomocą wzoru (10).

Tabela 2. Współczynniki SBM – metoda I

Parametr	Współczynnik	Klasa taryfowa (l)					
		0	1	2	3	4	5
$a = 1$	$p(l)$	0,7500	1,4899	1,5967	2,2966	2,5760	3,2415
	$b(l,0)$	–0,0486	–0,0941	–0,1068	–0,1491	–0,1810	–0,2272
	$b(l,1)$	0,6016	0,5396	0,5647	0,5011	0,5229	0,4720
	$b(l,2)$	1,2168	1,1514	1,2133	1,1437	1,2176	1,1784
	$b(l,\geq 3)$	1,8501	1,8045	1,9114	1,8605	2,0022	2,0053
$a = 4$	$p(l)$	0,9282	1,1677	1,1948	1,4212	1,4814	1,6910
	$b(l,0)$	–0,0205	–0,0259	–0,0270	–0,0318	–0,0343	–0,0385
	$b(l,1)$	0,2008	0,1958	0,1994	0,1923	0,1972	0,1894
	$b(l,2)$	0,4201	0,4157	0,4240	0,4149	0,4266	0,4160
	$b(l,\geq 3)$	0,6463	0,6440	0,6573	0,6478	0,6668	0,6552
$a = 25$	$p(l)$	0,9883	1,0297	1,0338	1,0726	1,0807	1,1168
	$b(l,0)$	–0,0039	–0,0040	–0,0041	–0,0042	–0,0043	–0,0044
	$b(l,1)$	0,0353	0,0352	0,0354	0,0352	0,0354	0,0351
	$b(l,2)$	0,0745	0,0745	0,0748	0,0746	0,0750	0,0747
	$b(l,\geq 3)$	0,1148	0,1149	0,1153	0,1151	0,1159	0,1155

Źródło: opracowanie własne.

Uzyskane wyniki wskazują, że składka początkowa jest rosnącą funkcją klasy taryfowej, co jest pożądaną cechą systemu. Warto zwrócić uwagę na to, że w mniej zróżnicowanej populacji taryfa bonus-malus staje się bardziej płaska – rozpiętość stawek składki zmniejsza się wraz ze spadkiem współczynnika zmienności parametru ryzyka. Analogiczne są własności współczynników korekty składki – rosną one wraz z klasą taryfową, przy czym w bardziej jednorodnej populacji zakres korekty jest mniejszy i nawet dla dużej liczby szkód dopłata nie przekracza 12% składki podstawowej. W szczególności małe zróżnicowanie parametru ryzyka powoduje, że zwrot składki jest praktycznie nieodczuwalny dla ubezpieczonego.

Przejdziemy teraz do wyników obliczeń dla metody liniowej. W tabeli 3 przedstawiono wartości współczynników regresji liniowej wyznaczone na podstawie wzoru (15).

Tabela 3. Współczynniki regresji liniowej

$a = 1$	α_0^*	0,7595	β_0^*	0,7094
	α_1^*	0,4818	β_1^*	0,4500
			β_2^*	0,6591
$a = 4$	α_0^*	0,9328	β_0^*	0,9120
	α_1^*	0,1492	β_1^*	0,1459
			β_2^*	0,2229
$a = 25$	α_0^*	0,9892	β_0^*	0,9853
	α_1^*	0,0253	β_1^*	0,0252
			β_2^*	0,0393

Źródło: opracowanie własne.

Widzimy, że w badanym systemie zachodzi $\beta_0^* \leq \alpha_0^*$ oraz $\beta_1^* \leq \alpha_1^*$ – zmniejsza to część składki całkowitej niezależną od N_{t+1}. Na mocy wzoru (16) oznacza to, że brak zgłoszonych szkód prowadzi do zwrotu części składki, a także, zgodnie z wcześniejszymi rozważaniami, daje ubezpieczycielowi możliwość obniżenia składki początkowej przez modyfikację postaci korekty. W tabeli 4 przedstawiono mnożniki składki i korekty wyznaczone na podstawie powyższych współczynników regresji.

Tabela 4. Współczynniki SBM – metoda II

Parametr	Mnożnik		Klasa taryfowa					
			0	1	2	3	4	5
$a = 1$	składka początkowa		0,7595	1,2412	1,7230	2,2048	2,6866	3,1684
	korekta dla k zgłoszonych szkód	0	–0,0501	–0,0818	–0,1136	–0,1453	–0,1771	–0,2088
		1	0,6090	0,5773	0,5455	0,5138	0,4820	0,4503
		2	1,2681	1,2364	1,2046	1,1729	1,1411	1,1094
		3	1,9272	1,8955	1,8637	1,8320	1,8002	1,7685

Parametr	Mnożnik		Klasa taryfowa 0	1	2	3	4	5
$a = 4$	składka początkowa		0,9328	1,0820	1,2313	1,3805	1,5297	1,6789
	korekta dla k zgłoszonych szkód	0	–0,0208	–0,0241	–0,0274	–0,0308	–0,0341	–0,0374
		1	0,2021	0,1988	0,1955	0,1921	0,1888	0,1855
		2	0,4250	0,4217	0,4184	0,4150	0,4117	0,4084
		3	0,6479	0,6446	0,6413	0,6380	0,6346	0,6313
$a = 25$	składka początkowa		0,9892	1,0145	1,0399	1,0652	1,0906	1,1159
	korekta dla k zgłoszonych szkód	0	–0,0039	–0,0040	–0,0041	–0,0042	–0,0043	–0,0044
		1	0,0354	0,0353	0,0352	0,0351	0,0350	0,0349
		2	0,0747	0,0746	0,0745	0,0744	0,0743	0,0742
		3	0,1140	0,1139	0,1138	0,1137	0,1136	0,1135

Źródło: opracowanie własne.

Otrzymane mnożniki składki cechują się mniejszą rozpiętością niż te uzyskane za pomocą metody bayesowskiej, przy czym w rozważanym systemie oba podejścia prowadzą do bardzo zbliżonych wyników. W szczególności w mocy pozostają wnioski dotyczące relacji między zróżnicowaniem ryzyka w populacji a parametrami systemu.

Na koniec tej części pracy omówimy wyniki obliczeń dla metody III. Parametry systemu wyznaczone na podstawie wzorów (19) oraz (20) są przedstawione w tabeli 5.

Tabela 5. Współczynniki SBM – metoda III

Parametr	Współczynnik	Klasa taryfowa 0	1	2	3	4	5
$a = 1$	p_l	1,3958	2,0965	2,2374	2,8964	3,2181	3,8607
	α_l	–0,6945	–0,7006	–0,7475	–0,7488	–0,8230	–0,8464
$a = 4$	p_l	1,1418	1,3791	1,4104	1,6322	1,6987	1,9027
	α_l	–0,2341	–0,2373	–0,2427	–0,2429	–0,2515	–0,2503
$a = 25$	p_l	1,0257	1,0671	1,0713	1,1100	1,1183	1,1542
	α_l	–0,0413	–0,0414	–0,0416	–0,0416	–0,0419	–0,0419

Źródło: opracowanie własne.

Powyższe wyniki wskazują, że metoda III prowadzi do wyraźnego zwiększenia składki początkowej w zamian za możliwość uzyskania większego zwrotu składki.

W tym przypadku nawet dla mało zróżnicowanej populacji zwracana część składki wynosi ok. 4%, czyli wielokrotnie więcej niż otrzymywana przy wykorzystaniu dwóch pierwszych metod. Tak jak dla poprzednich metod, w bardziej jednorodnych populacjach rozpiętość taryfy bonus-malus jest mniejsza, przy czym niezależnie od zmienności parametru ryzyka mnożniki zwrotu składki są mniej zróżnicowane niż mnożniki składki początkowej. Co więcej, w populacjach takich mnożniki składki początkowej są bliższe mnożnikom bayesowskim; różnice względne dla współczynnika zmienności równego 50% są z przedziału 12,5–25%, co oznacza, że wzrost składki początkowej w omawianej metodzie jest umiarkowany.

Na zakończenie tego fragmentu rozważań warto zwrócić uwagę na jeszcze jedną cechę omawianego systemu – wysokość składki po korekcie nie jest równa składce początkowej w kolejnym okresie. Wynika to z faktu, że klasyczny SBM stanowi uproszczoną wersję liniowych estymatorów *credibility*, w której pełna informacja o liczbie przeszłych szkód jest zastąpiona informacją wyłącznie o klasie taryfowej. W konsekwencji uwzględnienie w taryfikacji klasy taryfowej oraz liczby szkód w bieżącym okresie jest krokiem w stronę liniowych estymatorów bayesowskich, który – przy zachowaniu zrozumiałości reguł systemu – może poprawić efektywność taryfikacji.

5. Podsumowanie

W niniejszej pracy przedstawiono system bonus-malus, w którym wysokość składki jest uzależniona od liczby szkód zgłoszonych w ciągu okresu ubezpieczenia. Modyfikacja ta ma na celu lepszą ocenę ryzyka w porównaniu z systemem standardowym przy jednoczesnym zachowaniu prostoty reguł rządzących systemem. Najpierw został omówiony matematyczny model systemu bonus-malus oparty na warunkowych łańcuchach Markowa. Następnie przedstawiono trzy propozycje konstrukcji systemu z mechanizmem korekty składki, odwołujące się do metod estymacji bayesowskiej. Dla każdego wariantu systemu została przeprowadzona teoretyczna analiza jego własności, a także został przedstawiony przykład numeryczny.

Wydaje się, że zaproponowana modyfikacja systemu bonus-malus może być korzystna z kilku powodów. Po pierwsze, omawiana konstrukcja systemu może pozwalać na lepszą ocenę ryzyka, stanowiąc rozwiązanie pośrednie między standardowym SBM i liniowymi predyktorami *credibility*. Porównanie efektywności taryfikacyjnej tych metod może stanowić kierunek dalszych badań.

Ponadto system z korektą składki może stanowić alternatywę dla systemu UBI bez narażania się na zarzut nieetycznego działania i dużej ingerencji w prywatność. Po drugie, wprowadzenie tego rodzaju modyfikacji może świadczyć o innowacyjności zakładu i wyróżniać go pozytywnie na tle konkurencji, a także umożliwić wyjście z atrakcyjną ofertą naprzeciw oczekiwaniom klientów. Jednocześnie proponowany system może być wykorzystany jako element odstraszania szkodowych klientów i umożliwić kształtowanie w elastyczny sposób portfela ubezpieczeniowego. Z kolei wśród korzyści dla klienta należy wymienić uzyskanie wpływu na wysokość płaconej składki, a także otrzymanie produktu, który można traktować jak umowę z udziałem w zyskach z ubezpieczenia. Wreszcie przedstawiony wariant systemu bonus-malus, wzmacniając prewencyjną funkcję ubezpieczeń, może przyczynić się do zwiększenia bezpieczeństwa na drogach.

Bibliografia

Bühlmann H., Gisler A., *A Course in Credibility Theory and its Applications*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg 2005.

Denuit M., Dhaene J., Goovaerts M., Kaas R., *Actuarial Theory for Dependent Risks: Measures, Orders and Models*, Wiley, New York 2005.

Denuit M., Maréchal X., Pitrebois S., Walhin J., *Actuarial Modelling of Claim Counts: Risk Classification, Credibility and Bonus-Malus Systems*, Wiley, New York 2007.

Gilde V., Sundt B., *On Bonus Systems with Credibility Scales*, „Scandinavian Actuarial Journal" 1989, issue 1, s. 92–107.

Holtan J., *Bonus made easy*, „Astin Bulletin" 1994, vol. 24, no. 1, s. 61–74.

Iosifescu M., *Skończone procesy Markowa i ich zastosowania*, PWN, Warszawa 1988.

Kaas R., Goovaerts M.J., Dhaene J., Denuit M., *Modern Actuarial Risk Theory*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 2001.

Kemeny J., Snell J., *Finite Markov Chains*, Van Nostrand, Princeton 1960.

Lemaire J., *Bonus-Malus Systems in Automobile Insurance*, Kluwer Academic Publishers, Boston 1995.

Mikosch T., *Non-Life Insurance Mathematics. An Introduction with Stochastic Processes*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg 2004.

Norberg R., *A Credibility Theory for Automobile Bonus Systems*, „Scandinavian Actuarial Journal" 1976, vol. 36, issue 2, s. 92–107.

Pitrebois S., Walhin J.F., Denuit M., *Bonus-Malus Systems with Varying Deductibles*, „Astin Bulletin" 2005, vol. 35, no. 1, s. 261–274.

Rolski T., Schimdli H., Schmidt V., Teugels J., *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, Wiley, New York 1999.

* * *

Bonus-malus system with premium adjustment

Summary

Bonus-malus systems are a widely used method for pricing automobile insurance on the basis of individual claim history. Despite their popularity and many advantages, several modifications were proposed in the actuarial literature, but none of them, however, takes into consideration the benefit for the insured. This paper analyses the bonus-malus system, in which at the end of the insurance period the premium is adjusted according to the number of reported claims. We describe such a system using Markov chains and the credibility theory framework. Furthermore, we show how premium relativities may be derived under certain optimality criteria and we investigate their properties.

Keywords: automobile insurance, bonus-malus system, Markov chain, premium relativity, premium relativity with adjustment