

AGATA BORATYŃSKA
KRZYSZTOF KONDRASZUK

Odporność składki kwantylowej na ε -zaburzenie rozkładu liczby szkód

Streszczenie

W pracy rozważana jest odporność składki kwantylowej w modelu ryzyka łącznego ze względu na zaburzenia rozkładu liczby szkód. Przy obliczaniu składki kwantylowej zostały wykorzystane popularne metody aproksymacji: rozkładem normalnym, przesuniętym rozkładem gamma, przybliżonymi formułami Wilsona-Hilferty'ego oraz Fishera-Cornisha (znanymi w literaturze także jako aproksymacje NP_2 oraz NP_3), przesuniętym rozkładem odwrotnym gaussowskim oraz aproksymacja mieszana. Jako miarę odporności zastosowano prawdopodobieństwo przekroczenia składki przez łączną szkodę.

W artykule przedstawione są wyniki przeprowadzonej analizy dokładności składki kwantylowej przy zaburzaniu rozkładu liczby szkód dla portfela ubezpieczyciela opisanego rozkładami złożonymi: Poissona oraz ujemnym dwumianowym. Odstępstwo od założonego w modelu rozkładu liczby szkód definiuje się w formie ε -zaburzenia. W przeprowadzonym badaniu, które zostało wykonane z wykorzystaniem metod symulacyjnych, uwzględniono analizę wrażliwości składki w zależności od przyjętego rozkładu zaburzającego oraz jego wariancji, siły zaburzenia ε , rozkładu wielkości pojedynczej szkody, jego charakterystyk, a także wielkości portfela.

1. Wstęp

Niniejszy artykuł jest poświęcony metodom aproksymacji składki w modelu ryzyka łącznego oraz badaniu jej odporności na ε -zaburzenia rozkładu liczby szkód. Zagadnienie to wpisuje się w dyskusję na temat problemu kalkulacji składki – kluczowego zadania w działalności ubezpieczeniowej. Składka ubezpieczeniowa składa się z kilku składników. Analizowana część, przeznaczona na pokrycie roszczeń, jest wartością funkcjonału określonego na przestrzeni rozkładów prawdopodobieństwa zmiennej losowej S , opisującej łączną wartość roszczeń (łączną szkodę). Na kalkulację tej części składki wpływ mają właśnie rozkład liczby szkód z pojedynczego ryzyka oraz rozkład odpowiadający za wielkość pojedynczej szkody. Istnieje wiele metod kalkulacji składki (por. np. Kaas, 2009). W pracy badana jest składka kwantylowa P_Q , zdefiniowana jako liczba spełniająca dla ustalonego $\eta \in (0, 1)$ warunek $P(S > P_Q) = \eta$. Dokładne wyznaczenie rozkładu zmiennej S jest często trudne lub wręcz niemożliwe, dlatego też do wyznaczenia składki P_Q wykorzystano aproksymacje rozkładu zmiennej S . Składka P_Q

jest zatem kwantylem rzędu $1 - \eta$ rozkładu aproksymującego rozkład zmiennej S . W badaniu zastosowano: aproksymację normalną, przesuniętym rozkładem gamma, przybliżone formuły Wilsona-Hilferty'ego oraz Fishera-Cornisha (znane w literaturze także jako aproksymacje NP_2 oraz NP_3), przesuniętym rozkładem odwrotnym gaussowskim oraz aproksymację mieszaną.

Głównym celem pracy jest prezentacja wyników przeprowadzonej analizy dokładności składki kwantylowej przy zaburzaniu rozkładu liczby szkód w portfelu ubezpieczyciela wynikającego np. z przyjętego przez analityka innego niż pojawiający się w rzeczywistości rozkładu bądź też zmiany rozkładu w badanym okresie ubezpieczeniowym wcześniej nieobserwowanej. Podjęto także próbę porównania skutków wyboru rozkładu odpowiadającego za liczbę szkód w portfelu w kontekście wahania składki kwantylowej przy badanym zaburzeniu.

W zadaniach statystyki matematycznej badanie wpływu odstępstwa od przyjętych założeń modelu probabilistycznego na wyniki wnioskowania nazywa się badaniem odporności rozważanej procedury statystycznej. Ogólne definicje i koncepcje badania odporności przedstawiają Huber (1981), Hampel (1986), Zieliński (1983). W przypadku szacowania składki badanie takie pozwala stwierdzić, jak pewne błędy powstałe w procesie szacowania rozkładu łącznej wartości roszczeń mogą wpłynąć na prawdopodobieństwo pojawienia się stanu niewypłacalności. W pracy odporność składki kwantylowej jest analizowana w zależności nie tylko od wyboru rozkładu opisującego liczbę szkód w przyjętym modelu ryzyka łącznego, ale także od założonego rozkładu wielkości pojedynczej szkody, jego wariancji, współczynnika asymetrii i kurtozy oraz wielkości portfela.

W przeprowadzonym badaniu rozkład liczby szkód poddawano ε -zaburzeniom. Rozkład zmiennej losowej X jest rozkładem ε -zaburzonym, jeżeli jego dystrybuanta F_X ma postać:

$$F_X(x) = (1 - \varepsilon)F_0(x) + \varepsilon G(x), \quad x \in R,$$

gdzie F_0 to dystrybuanta rozkładu modelowego, G – rozkładu zaburzającego, a ε jest liczbą z przedziału $(0, 1)$ i określa siłę zaburzenia (por. Huber, 1981; Zieliński, 1983; Berger, 1990). Jako rozkłady zaburzające wykorzystano nie tylko rozkład Poissona czy ujemny dwumianowy, ale także bardziej skomplikowane rozkłady z ogonem poissonowskim, Poisson-Inverse Gaussian oraz rozkład Poisson-Gamma-Gamma, mający korzenie w bayesowskich modelach hierarchicznych (por. Gómez-Déniz, 2008).

Struktura pracy jest następująca. W paragrafie 2 został opisany model ryzyka łącznego leżący u podstaw przeprowadzonego badania. Część 3 zawiera przegląd metod aproksymacji rozkładu łącznej szkody, które zostały wykorzystane do obliczenia odpowiednich składek kwantylowych. Główną częścią pracy są paragrafy 4 i 5, zawierające dokładny opis przeprowadzonego badania oraz analizę otrzymanych wyników.

Badanie zostało oparte na metodach symulacyjnych, mających obszerne zastosowanie w naukach aktuarialnych. W literaturze symulacje w ubezpieczeniach obecne są już od wielu lat (np. Nørgaard, 1966). Pozwalają one na analizę skutków alternatywnych decyzji podejmowanych przez zakład ubezpieczeniowy. Niezwykle ważne miejsce zajmują one w teorii ruiny, w której są wykorzystywane w analizie metod aproksymacji prawdopodobieństwa ruiny zarówno w czasie skończonym, jak i nieskończonym (np. Burnecki i in., 2005).

W literaturze aktuarialnej nieczęsto porusza się temat odporności składki kwantylowej w modelach statystycznych. Pewnych badań dotyczących tego zagadnienia dotyczy praca Boratyńskiej i Dąbrowskiej (2010), skupiająca się na zaburzeniach rozkładu Poissona jako rozkładu modelowego (przy czym za rozkład zaburzający przyjmuje się tylko rozkład Poissona i ujemny dwumianowy), oraz Wienkego i Filipa (2013), badająca odporność składki kwantylowej na zaburzenia rozkładu wielkości pojedynczej szkody. W obu pracach wykorzystano metody aproksymacji oparte na znajomości trzech pierwszych momentów rozkładu łącznej szkody. Nie analizuje się w nich aproksymacji NP_3 i mieszanej, które korzystają z kurtozy rozważanej zmiennej. Przedstawione aproksymacje bywają natomiast porównywane w kontekście otrzymywanej składki (np. Otto, 2004) i dokładności, w jakiej przybliżają one analizowane rozkłady prawdopodobieństwa (np. Seal, 1977). W przypadku tego drugiego zagadnienia można spotkać zarówno polemiki z innymi artykułami poświęconymi temu problemowi (por. Pentikäinen, 1977), jak i stosunkowo nowe artykuły, poszerzające dotychczasowe spektrum metod o kolejne, zawierające również analizę porównawczą (por. Chaubey i in., 1998).

2. Model ryzyka łącznego

U podstaw wszystkich przeprowadzanych w niniejszej pracy analiz leży model ryzyka łącznego. Jego podstawowym założeniem jest następująca zagregowana wartość szkód na jednostkę ryzyka:

$$X_i = Y_{i,1} + Y_{i,2} + \dots + Y_{i,N_{(i)}},$$

przy czym $X_i = 0$, jeśli $N_{(i)} = 0$, gdzie $Y_{i,j}$ jest zmienną losową opisującą wielkość pojedynczej szkody o dystrybuancie F_Y , $N_{(i)}$ – zmienną losową opisującą liczbę szkód na jedno ryzyko, X_i – wartością szkód na jedno ryzyko.

Łączna wartość roszczeń z portfela zawierającego n -polis jest wówczas równa:

$$S = X_1 + X_2 + \dots + X_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N,$$

przy czym $S = 0$, jeśli $N = 0$, gdzie S jest sumą roszczeń, Y_i – wielkością pojedynczej szkody o dystrybuancie F_Y , a N – łączną liczbą szkód.

W modelu zakłada się, iż zmienne Y_i nie tylko są dane tym samym rozkładem, ale cechują się też niezależnością. Zmienne $N_{(i)}$, wyrażające liczby szkód dla różnych polis w portfelu, również są niezależne. Wartości pojedynczych szkód oraz liczby szkód są niezależne w przypadku zarówno każdej z polis, jak i całego portfela.

3. Metody aproksymacji rozkładu łącznej szkody

Jedną z metod kalkulacji składki jest ustalenie jej na poziomie wybranego kwantyla rozkładu łącznej szkody. Dokładne obliczenie odpowiedniego kwantyla w modelu ryzyka łącznego często nie jest możliwe do wykonania. Pewnym rozwiązaniem tego problemu są metody aproksymacji rozkładu łącznej szkody (por. Otto, 2004).

Najprostszy przykład aproksymacji opiera się na centralnym twierdzeniu granicznym. Dystrybuantę łącznej szkody F_S przybliża się, korzystając z dystrybuanty rozkładu normalnego. Wówczas:

$$F_S(x) \approx \Phi\left(\frac{x - \mu_S}{\sigma_S}\right),$$

gdzie μ_S oraz σ_S to odpowiednio wartość oczekiwana oraz odchylenie standardowe rozkładu łącznej szkody, a Φ to dystrybuanta standardowego rozkładu normalnego.

Składka kwantylowa P_Q^N na poziomie kwantyla rzędu $1 - \eta$ wyznaczona na podstawie tej aproksymacji jest równa:

$$P_Q^N = \mu_S + \sigma_S \Phi^{-1}(1 - \eta) = \mu_S + u_\eta \sigma_S,$$

gdzie $u_\eta = \Phi^{-1}(1 - \eta)$ to kwantyl rzędu $1 - \eta$ standardowego rozkładu normalnego.

Drugą stosowaną metodą aproksymacji rozkładu łącznej szkody jest przybliżenie przesuniętym rozkładem gamma z parametrami (x_0, α, β) . Zwraca się uwagę na fakt, iż w porównaniu z aproksymacją rozkładem normalnym zastosowanie tej metody jest bardziej zasadne w przypadku, gdy skośność rozkładu jest duża. Parametry rozkładu aproksymującego otrzymuje się poprzez przyrównanie wartości oczekiwanej, wariancji oraz skośności γ_S tego rozkładu z wartościami otrzymanymi dla zmiennej S . Rozwiązując odpowiedni układ równań, otrzymuje się:

$$x_0 = \mu_S - 2\frac{\sigma_S}{\gamma_S}, \quad \alpha = \frac{4}{\gamma_S^2}, \quad \beta = \frac{2}{\gamma_S \sigma_S},$$

a składka kwantylowa P_Q^Γ otrzymana przy wykorzystaniu tej aproksymacji spełnia równanie:

$$F_Y(P_Q^\Gamma - x_0) = 1 - \eta,$$

gdzie $F_Y(P_Q^\Gamma - x_0)$ oznacza dystrybuantę zmiennej Y o rozkładzie gamma z parametrami (α, β) w punkcie $(P_Q^\Gamma - x_0)$.

Obliczając składkę kwantylową przy wykorzystaniu aproksymacji przesuniętym rozkładem gamma, konieczne trzeba wykorzystać metody numeryczne. Alternatywnym podejściem jest zastosowanie pewnych przybliżonych formuł na obliczenie odpowiedniego kwantyla (por. Otto, 2004). Pierwsze dwie z nich noszą nazwę formuł Wilsona-Hilferty'ego, a składki wyznaczone przy ich wykorzystaniu mają postać:

$$P_Q^{WH1} = \mu_S + \sigma_S \sqrt{\alpha} \left[\left(1 - \frac{1}{9\alpha} + \frac{u_\eta}{3\sqrt{\alpha}} \right)^3 - 1 \right],$$

$$P_Q = \mu_S + \sigma_S \left(u_\eta + \frac{u_\eta^2 - 1}{6} \gamma_S + \frac{u_\eta^3 - 6u_\eta}{108} \gamma_S^2 \right),$$

gdzie $u_\eta = \Phi^{-1}(1 - \eta)$ to kwantyl rzędu $1 - \eta$ standardowego rozkładu normalnego oraz γ_S – skośność rozkładu łącznej szkody.

Inną metodą aproksymacji, nieodwołującą się do przybliżania rozkładem przesuniętym gamma, są dwie formuły Fishera-Cornisha. Oparte są na aproksymacji rozkładem normalnym, uwzględniają jednak jednocześnie aspekt skośności. W literaturze metody te są nazywane odpowiednio aproksymacjami NP_2 oraz NP_3 (ang. *normal power approximations*). Składki kwantylowe obliczone przy pomocy tych aproksymacji są równe:

$$P_Q^{NP_2} = \mu_S + \sigma_S \left[u_\eta + \frac{\gamma_S}{6} (u_\eta^2 - 1) \right],$$

$$P_Q = \mu_S + \sigma_S \left[u_\eta + \frac{\gamma_S}{6} (u_\eta^2 - 1) + \frac{\gamma_{2,S}}{24} (u_\eta^3 - 3u_\eta) - \frac{\gamma_S^2}{36} (2u_\eta^3 - 5u_\eta) \right],$$

gdzie $\gamma_{2,S}$ to kurtoza rozkładu łącznej szkody, a pozostałe oznaczenia są takie jak poprzednio.

Następna metoda aproksymacji jest analogiczna do przybliżenia łącznego rozkładu wielkości szkód przesuniętym rozkładem gamma, zastępując ten rozkład przesuniętym rozkładem odwrotnym gaussowskim z parametrami (x_0, μ, ϕ) (por. Chaubey i in., 1998). Po przyrównaniu wartości oczekiwanej, wariancji oraz skośności otrzymuje się parametry rozkładu aproksymującego równe:

$$\mu = \frac{3\sigma_S}{\gamma_S}, \quad \phi = \frac{9}{\gamma_S^2}, \quad x_0 = \mu_S - \frac{3\sigma_S}{\gamma_S},$$

a składka kwantylowa P_Q^{IG} otrzymana przy wykorzystaniu tej aproksymacji spełnia równanie:

$$F_Y(P_Q^{IG} - x_0) = 1 - \eta,$$

gdzie $F_Y(P_Q^{IG} - x_0)$ oznacza dystrybuantę zmiennej Y o rozkładzie odwrotnym gaussowskim z parametrami (μ, ϕ) w punkcie $(P_Q^{IG} - x_0)$.

W pracy zastosowano jeszcze jedną metodę aproksymacji korzystającą z przesuniętych rozkładów gamma i odwrotnego gaussowskiego. W literaturze nosi ona nazwę aproksymacji mieszanej (ang. *mixture approximation*) (por. Chaubey i in., 1998).

Niech F_1 oraz F_2 będą odpowiednio aproksymacjami rozkładu łącznej szkody powstałymi przy wykorzystaniu rozkładu gamma oraz odwrotnego gaussowskiego, wówczas następująca aproksymacja zmiennej S cechuje się równością czterech momentów:

$$F_S(x) \approx wF_1(x) + (1-w)F_2(x),$$

gdzie

$$w = \frac{\gamma_{2,S} - \gamma_{2,F_2}}{\gamma_{2,F_1} - \gamma_{2,F_2}}.$$

Przy tej aproksymacji, wyznaczając składkę kwantylową P_Q^M , otrzymuje się następujące równanie do rozwiązania:

$$wF_X(P_Q^M - x_0) + (1-w)F_Y(P_Q^M - y_0) = 1 - \eta,$$

gdzie

$$w = \frac{\gamma_{2,S} - \gamma_{2,Y}}{\gamma_{2,X} - \gamma_{2,Y}},$$

a F_X i F_Y to dystrybuanty aproksymujących rozkładów gamma oraz odwrotnego gaussowskiego, x_0 i y_0 – ich przesunięcia, $\gamma_{2,X}$ i $\gamma_{2,Y}$ – kurtozy.

4. Badanie odporności składki kwantylowej – założenia

Przeprowadzona analiza opierała się na wykorzystaniu modelu ryzyka łącznego w opisie łącznej szkody z portfeli zawierających 1000, 5000 oraz 10 000 niezależnych polis. Poszczególne płaszczyzny badania były jednak analizowane dla portfela 1000 polis i przy takim założeniu są prezentowane kolejne tabele oraz wykresy. Wpływ wielkości portfela na odporność składki kwantylowej jest przedstawiony jako ostatni punkt badania. Jako niezaburzone rozkłady prawdopodobieństwa opisujące łączną liczbę szkód z portfela wykorzystano rozkład Poissona oraz ujemny dwumianowy. Zgodnie z modelem ryzyka łącznego, badany portfel ma wówczas odpowiednio złożony rozkład Poissona i złożony ujemny dwumianowy.

Przyjęto, iż wartość oczekiwana liczby szkód z jednej polisy to 0.15. Założenie to prowadzi do wartości oczekiwanej łącznej liczby szkód z badanych portfeli równej 150, 750 oraz 1500. Mając na uwadze cel analizy, wariancję liczby szkód z pojedynczego ryzyka z rozkładu ujemnego dwumianowego zdecydowano się ustalić na zbliżonym poziomie do wariancji rozkładu Poissona. Założono, że wynosi ona 110% wartości oczekiwanej. Przyjęcie jej na poziomie niewiele wyższym od pierwszego momentu pozwala na próbę porównania otrzymanych wyników z obu przypadków.

Tabela 1. Parametry rozkładów opisujących wielkość pojedynczej szkody

Rozkład	Parametry	$\mu = 10$		
		$\sigma^2 = 100$	$\sigma^2 = 150$	$\sigma^2 = 200$
$\Gamma(\alpha, \beta)$	α	1.00	0.67	0.50
	β	0.10	0.07	0.05
	γ	2.00	2.45	2.83
	γ_2	6.00	9.00	12.00
$Weib(\lambda, c)$	λ	0.10	0.16	0.22
	c	1.00	8.99	8.12
	γ	2.00	2.70	3.33
	γ_2	6.00	11.60	18.43
$IG(m, \phi)$	m	10.00	10.00	10.00
	ϕ	1.00	0.67	0.50
	γ	3.00	3.67	4.24
	γ_2	15.00	22.39	30.00
$LN(m, s^2)$	m	1.96	1.84	1.75
	s^2	0.69	0.92	1.10
	γ	4.00	5.51	7.07
	γ_2	38.00	83.06	156.00
$Par(\alpha, v)$	α	-	6.00	4.00
	v		50.00	30.00
	γ		3.81	7.07
	γ_2		35.67	-

γ – oznacza skośność

γ_2 – oznacza kurtozę

Źródło: opracowanie własne.

Jako rozkłady opisujące wielkość pojedynczej szkody wykorzystano w badaniu rozkład gamma, odwrotny gaussowski, logarytmiczno-normalny, Weibulla oraz Pareto (w tym przypadku bez rozkładu z wariancją równą 100). Wartość oczekiwana wielkości szkody ustalona została na poziomie 10. W celu zbadania wpływu charakterystyk rozkładów na badane zjawisko w symulacjach wykorzystano trzy

wielkości wariancji wielkości pojedynczej szkody: 100, 150 oraz 200. W tabeli 1 podano parametry rozkładów wielkości pojedynczej szkody¹, a w tabeli 2 charakterystyki rozkładu łącznej szkody przy różnych założeniach dotyczących rozkładu wielkości pojedynczej szkody.

W niniejszej pracy zostały zaprezentowane wyniki dla rozkładu gamma i logarytmiczno-normalnego jako reprezentantów dwóch różniących się pod względem wspomnianych charakterystyk grup. W przypadku rozkładu odwrotnego gaussowskiego oraz Weibulla zaobserwowano zbliżone wyniki do tych otrzymanych dla rozkładu gamma. Przyjęcie rozkładu Pareto natomiast prowadziło do otrzymania rezultatów analogicznych do tych dla rozkładu logarytmiczno-normalnego.

We wszystkich badanych przypadkach zmianom poddawano rozkład prawdopodobieństwa opisujący liczbę szkód z jednej polisy, zachowując jednak wartość oczekiwaną. Ogólnie zaburzony rozkład liczby szkód wykorzystany w symulacjach przedstawia się jako: $(1 - \varepsilon)F_0 + \varepsilon F$, gdzie F_0 oznacza rozkład bez zaburzenia, F – rozkład zaburzający o wartości oczekiwanej równej wartości oczekiwanej F_0 , $\varepsilon \in (0, 1)$ określa stałą będącą siłą zaburzenia.

Tabela 2. Charakterystyki rozkładu S przy różnych rozkładach wielkości pojedynczej szkody

Rozkład wielkości pojedynczej szkody	Wariancja wielkości pojedynczej szkody	Liczba szkód – rozkład Poissona				Liczba szkód – rozkład ujemny dwumianowy			
		μ_S	σ_S^2	γ_S	$\gamma_{2,S}$	μ_S	σ_S^2	γ_S	$\gamma_{2,S}$
Γ	100	1500	30000	0.1732	0.0400	1500	31500	0.1776	0.0421
	150	1500	37500	0.2066	0.0587	1500	39000	0.2098	0.0603
	200	1500	45000	0.2357	0.0778	1500	46500	0.2382	0.0791
<i>Weib</i>	100	1500	30000	0.1732	0.0400	1500	31500	0.1776	0.0421
	150	1500	37500	0.2160	0.0669	1500	39000	0.2187	0.0681
	200	1500	45000	0.2580	0.1011	1500	46500	0.2593	0.1013
<i>IG</i>	100	1500	30000	0.2021	0.0617	1500	31500	0.2044	0.0624
	150	1500	37500	0.2530	0.1007	1500	39000	0.2536	0.1001
	200	1500	45000	0.2986	0.1430	1500	46500	0.2980	0.1413
<i>LN</i>	100	1500	30000	0.2309	0.1067	1500	31500	0.2313	0.1038
	150	1500	37500	0.3227	0.2604	1500	39000	0.3193	0.2491
	200	1500	45000	0.4243	0.5400	1500	46500	0.4177	0.5153
<i>Par</i>	100		–	–	–	–	–	–	–
	150	1500	37500	0.2582	0.1333	1500	39000	0.2584	0.1304
	200	1500	45000	0.4243	–	1500	46500	0.4177	–

Źródło: opracowanie własne.

¹ Parametryzacje wykorzystanych rozkładów prawdopodobieństwa zebrane zostały w załączniku.

Jako rozkłady F_0 przyjęto w badaniu rozkład Poissona oraz ujemny dwumianowy. Jako rozkłady zaburzające wykorzystano natomiast w symulacjach rozkłady: ujemny dwumianowy, z ogonem poissonowskim o ustalonym prawdopodobieństwie dla 0, Poisson Inverse Gaussian oraz Poisson-Gamma-Gamma. Rozkłady te zostały oznaczone odpowiednio jako NB_i , ZAP_i , PIG_i , PGG_i . Jako i przyjęto 1, 2 lub 3, oznaczając w ten sposób wariancję rozkładów równą 0.165, 0.18 lub 0.225. Rozkład Poissona oznaczono jako P . W przypadku rozkładu Poisson-Gamma-Gamma ustalenie dwóch pierwszych momentów centralnych na określonym poziomie prowadziło do dowolności wyboru trzeciego parametru charakteryzującego ten rozkład. W pracy przedstawiono wyniki dla parametru $\alpha = 4$. Wówczas skośność rozkładów PGG_i jest większa niż dla pozostałych rozkładów o odpowiadającej wariancji. W tabeli 3 podano parametry wykorzystywanych rozkładów liczby szkód z pojedynczego ryzyka.

Tabela 3. Parametry rozkładów opisujących liczbę szkód z pojedynczego ryzyka

$\mu = 0.15$		$\sigma^2 = 0.15$		
$P(\lambda)$	λ	0.150		
	γ	2.582		
$\mu = 0.15$		$\sigma^2 = 0.165$	$\sigma^2 = 0.18$	$\sigma^2 = 0.225$
$NB_i(r, q)$	r	1.500	0.750	0.300
	q	0.091	0.167	0.333
	γ	2.954	3.300	4.216
$ZAP_i(p_0, \lambda)$	p_0	0.867	0.873	0.890
	λ	0.250	0.350	0.650
	γ	2.898	3.162	3.760
$PIG_i(\mu, \phi)$	μ	0.150	0.150	0.150
	ϕ	1.500	0.750	0.300
	γ	2.977	3.378	4.568
$PGG_i(a, \alpha, \beta)$	a	9.000	1.800	0.529
	α	4.000	4.000	4.000
	β	0.050	0.250	0.850
	γ	3.066	3.575	5.130

Źródło: opracowanie własne.

We wszystkich tabelach oraz wykresach przedstawiających wyniki symulacji wykorzystano informacje o liczbie zdarzeń, w których doszło do przekroczenia składki w ustalonej liczbie symulacji. Jeżeli nie stwierdzono przy opisie tabeli inaczej, wartości w nich przedstawione obliczone są jako:

$$\hat{P}(S > P_Q) = \frac{1}{1000000} \sum_{i=1}^{1000000} \mathbf{1}_{(S_i > P_Q)},$$

gdzie S_i to łączna szkoda z portfela w i -tej symulacji, P_Q to składka kwantylowa obliczona za pomocą odpowiedniej aproksymacji, a 1 000 000 to liczba wykonanych symulacji dla każdego z badanych przypadków.

Analizując wyniki, należy jednak pamiętać, iż składka kwantylowa została określona tak, by przy wykorzystanej aproksymacji prawdopodobieństwo przekroczenia składki było jak najbliższe 5%. Dlatego też dopasowanie do tego poziomu znajdowało się w centrum zainteresowania autorów niniejszego opracowania.

Obserwując ciąg n prób Bernoulliego i konstruując test na poziomie istotności 0.05 dla hipotezy $H_0 : p = 0.05$ wobec $H_1 : p \neq 0.05$, gdzie p to prawdopodobieństwo sukcesu w pojedynczej próbie (w rozważanym problemie to prawdopodobieństwo, że S przekroczy składkę P_Q), przy wykorzystaniu aproksymacji rozkładem normalnym, otrzymuje się obszar odrzucenia hipotezy H_0 postaci

$$K = \left\{ \frac{k}{n} : \frac{\left| \frac{k}{n} - 0.05 \right|}{\sqrt{0.05 \cdot 0.95}} \sqrt{n} > 1.96 \right\} = \\ = \left\{ \frac{k}{n} : \frac{k}{n} \in \left(-\infty, 0.05 - \frac{1.96\sqrt{0.0475}}{\sqrt{n}} \right) \cup \left(0.05 + \frac{1.96\sqrt{0.0475}}{\sqrt{n}}, \infty \right) \right\},$$

gdzie $\frac{k}{n}$ to odsetek prób przekroczonej składki w n symulacjach.

Podstawiając następnie wykonaną liczbę symulacji, stwierdza się, że hipotezę zerową należy odrzucić, gdy odsetek $\frac{k}{n}$ jest mniejszy niż 0.049573 lub większy niż 0.050427. Przyjęto zatem konwencję, iż dopiero różnice w wartościach $|\hat{P}(S > P_Q) - 0.05|$ większe niż 0.0005 komentowano jako istotne. Dodatkowo, aby porównać wahanie odsetka $\hat{P}(S > P_Q)$ przy różnych metodach aproksymacji lub wariantach zaburzenia, przyjęto, że dopiero różnice większe niż 0.001 komentowano jako istotne wahanie.

W celu zachowania przejrzystości w zaprezentowanych wynikach zastosowano oznaczenia przedstawione w paragrafie 2, tj. S to zmienna losowa opisująca łączną szkodę, N – zmienna losowa opisująca liczbę szkód z pojedynczego ryzyka, zaś Y – wielkość pojedynczej szkody. Wartość oczekiwaną, wariancję, skośność i kurtozę standardowo oznaczono jako $\mu, \sigma^2, \gamma, \gamma_2$. Wszystkie symulacje oraz obliczenia wykonano, wykorzystując język programowania R.

5. Wyniki badania

5.1. Model bez zaburzeń

Przed przystąpieniem do analizy wpływu zaburzeń rozkładu liczby szkód na odsetek zdarzeń, w których składka została przekroczona przez łączną szkodę,

zbadano dokładność składek kwantylowych w przypadku braku zaburzeń. Tabela 4 przedstawia wyniki dla portfeli opisanych złożonymi rozkładami Poissona i ujemnym dwumianowym z pojedynczą szkodą daną rozkładem gamma oraz logarytmiczno-normalnym.

Tabela 4. Dokładność składek kwantylowych dla rozkładu Poissona i ujemnego dwumianowego – wielkość pojedynczej szkody – rozkład gamma i logarytmiczno-normalny

$\mu_Y = 10$ $\sigma_Y^2 = 200$	$N \sim P$		$N \sim NB_1$	
	$Y \sim \Gamma$	$Y \sim LN$	$Y \sim \Gamma$	$Y \sim LN$
γ_Y	2.83	7.07	2.83	7.07
$\gamma_{2,Y}$	12	156	12	156
P_Q^N	0.05576	0.05849	0.05673	0.05837
P_Q^Γ	0.04962	0.04859	0.05044	0.04873
P_Q^{WH1}	0.04963	0.04864	0.05046	0.04877
P_Q^{WH2}	0.04962	0.04859	0.05045	0.04873
$P_Q^{NP_2}$	0.04937	0.04781	0.05019	0.04801
$P_Q^{NP_3}$	0.04961	0.04900	0.05042	0.04913
P_Q^{IG}	0.04965	0.04872	0.05048	0.04886
P_Q^M	0.04960	0.04982	0.05041	0.04982

Źródło: opracowanie własne.

Składka obliczona na podstawie rozkładu normalnego okazała się znacznie niedoszacowana, pozostałe metody aproksymacji skutkują zaś bardzo zbliżoną dokładnością składki kwantylowej w przypadku rozkładu gamma. Sytuacja wygląda jednak inaczej w przypadku rozkładu logarytmiczno-normalnego. Otrzymane prawdopodobieństwa przekroczenia składki przez łączną szkodę są dla portfela zarówno opisanego złożonym rozkładem Poissona, jak i opisanego rozkładem ujemnym dwumianowym istotnie niższe od 5%. Oznacza to przeszacowanie składki, związane zapewne z wyższymi wartościami skośności i kurtozy w przypadku rozkładu logarytmiczno-normalnego. Dodatkowo można zauważyć, iż składka kwantylowa wyznaczona metodą aproksymacji mieszanej charakteryzuje się lepszym dopasowaniem w przypadku rozkładu logarytmiczno-normalnego niż składki wyznaczone pozostałymi metodami.

5.2. Model zaburzony

Analiza poszczególnych wariantów zaburzeń została wykonana dla portfela 1000 polis. Dopiero na ostatnim etapie badań założenie to usunięto i zbadano wpływ wielkości portfela na otrzymywane wyniki. Pierwszym rodzajem zaburzeń

było zastosowanie rozkładu ujemnego dwumianowego o różnych wartościach wariancji. Analiza wyników symulacji przy zaburzaniu rozkładu liczby szkód z pojedynczego ryzyka pozwala zaobserwować wzrost prawdopodobieństwa przekroczenia składki przy zwiększaniu wariancji rozkładu zaburzającego. Tabela 5 przedstawia otrzymane wyniki dla portfela opisanego złożonym rozkładem Poissona z wielkością szkód daną rozkładem gamma w zależności od wariancji rozkładu zaburzającego przy różnych wartościach ε . Wartość $\varepsilon = 0$ obrazuje dopasowanie składki kwantylowej przy braku zaburzeń. Natomiast na rysunku 1 zaprezentowano wyniki symulacji dla aproksymacji mieszanej przy różnej sile zaburzeń rozkładem ujemnym dwumianowym o wariancji 0.18 oraz 0.225 dla portfela opisanego złożonym rozkładem ujemnym dwumianowym z wielkością pojedynczej szkody daną rozkładem logarytmiczno-normalnym o wariancji 100 oraz 200. Dla każdego z czterech przedstawionych przypadków dodano trend liniowy.

Tabela 5. Zaburzenia rozkładem ujemnym dwumianowym, liczba szkód – rozkład Poissona, wielkość pojedynczej szkody – rozkład gamma

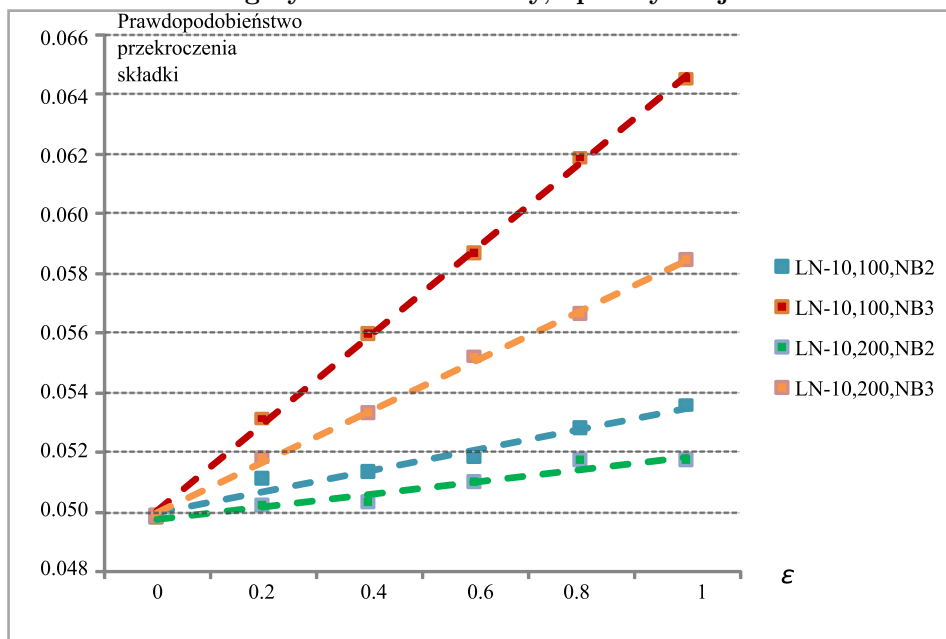
$N \sim (1 - \varepsilon)P + \varepsilon F, Y \sim \Gamma, \mu_Y = 10, \sigma_Y^2 = 200$							
	$\varepsilon = 0$	$F = NB_1$		$F = NB_2$		$F = NB_3$	
		$\varepsilon = 0.5$	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = 0.5$	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = 0.5$	$\varepsilon = 1$
P_Q^N	0.05576	0.05759	0.05864	0.05882	0.06142	0.06330	0.06982
P_Q^Γ	0.04962	0.05139	0.05249	0.05249	0.05505	0.05676	0.06307
P_Q^{WH1}	0.04963	0.05139	0.05250	0.05250	0.05506	0.05677	0.06308
P_Q^{WH2}	0.04962	0.05139	0.05249	0.05249	0.05506	0.05676	0.06307
$P_Q^{NP_2}$	0.04937	0.05112	0.05225	0.05221	0.05475	0.05651	0.06276
$P_Q^{NP_3}$	0.04961	0.05137	0.05248	0.05248	0.05504	0.05676	0.06305
P_Q^{IG}	0.04965	0.05141	0.05253	0.05252	0.05507	0.05680	0.06310
P_Q^M	0.04960	0.05137	0.05248	0.05247	0.05503	0.05675	0.06304

Źródło: opracowanie własne.

Na podstawie przedstawionych wyników wnioskować można, iż wraz ze wzrostem zaburzeń, tj. rosnącym ε , oraz rosnącą wariancją rozkładu zaburzającego następuje wzrost obserwowanych częstości przekroczenia składki, przy czym dla poszczególnych metod aproksymacji, z wyjątkiem aproksymacji rozkładem normalnym, są one dla ustalonych parametrów rozkładu liczby szkód na zbliżonym poziomie. Obliczone odpowiednie wartości są w przypadku rozkładu Poissona jako rozkładu wyjściowego o około 0.001–0.0025 większe niż w przypadku rozkładu ujemnego dwumianowego. Zanalizowane przypadki wskazują, iż na różnicę tę nie ma wpływu rozkład zaburzający – kształtowała się ona na zbliżonym poziomie w przypadku zaburzeń rozkładem NB_2 i NB_3 . Na podstawie danych przedstawionych na rysunku 1 można dodatkowo stwierdzić, iż wzrost ε , będącego siłą

zaburzenia, powoduje liniowy wzrost odsetka przypadków, w których doszło do przekroczenia składki przez szkodę. Wpływ rosnącego ε jest zatem analogiczny do rosnącej wariancji rozkładu zaburzającego.

Rysunek 1. Zaburzenia rozkładem ujemnym dwumianowym, liczba szkód – rozkład ujemny dwumianowy, wielkość pojedynczej szkody – rozkład logarytmiczno-normalny, aproksymacja mieszana



Źródło: opracowanie własne.

Porównując wyniki dla poszczególnych metod aproksymacji, łatwo także zauważyć, iż liczby odnoszące się do aproksymacji przesuniętym rozkładem gamma oraz obu formuł Wilsona-Hilferty’ego są praktycznie identyczne w każdym z przedstawionych przypadków. Wspomniane trzy aproksymacje prowadzą do otrzymania właściwie takich samych składek kwantylowych.

Kolejne warianty zaburzeń, polegające na wykorzystaniu rozkładu z ogonem poissonowskim o ustalonym prawdopodobieństwie dla 0, Poisson Inverse Gaussian oraz Poisson-Gamma-Gamma, prowadziły do otrzymania zbliżonych wyników. Tabela 6 prezentuje zestawienie otrzymanych rezultatów symulacji dla różnych wariantów zaburzeń dla portfela opisanego rozkładem złożonym ujemnym dwumianowym z wielkością szkód daną rozkładem gamma przy parametrze $\varepsilon = 0.5$. W tabeli podane są wielkości

$$P_{\min}^i = \min \left\{ \hat{P}(S > P_Q) : N \sim (1 - \varepsilon) NB_1 + \varepsilon F, F \in Q_i \right\},$$

$$P_{\max}^i = \max \left\{ \hat{P}(S > P_Q) : N \sim (1 - \varepsilon)NB_1 + \varepsilon F, F \in Q_i \right\},$$

$$r^i = P_{\max}^i - P_{\min}^i,$$

gdzie rodzina $Q_i = \{NB_i, ZAP_i, PIG_i, PGG_i\}$ oraz $i = 1, 3$.

Zaburzenie rozkładem o takiej samej wariancji jak rozkład wyjściowy nie powoduje wzrostu prawdopodobieństwa przekroczenia składki przez szkody. Prawdopodobieństwo przekroczenia składki przy zaburzeniach rozkładami różnej postaci, ale z wariancją równą 0.165 kształtuje się około 0.05. Hipoteza $H_0 : p = 0.05$ nie jest odrzucana.

Tabela 6. Wyniki symulacji dla rozkładu ujemnego dwumianowego – wszystkie rozkłady zaburzające, wielkość szkody – rozkład gamma

$Y \sim \Gamma$ $\mu_Y = 10$ $\sigma_Y^2 = 200$	$N \sim (1 - \varepsilon)NB_1 + \varepsilon F, \varepsilon = 0.5$					
	P_{\min}^1	P_{\max}^1	r^1	P_{\min}^3	P_{\max}^3	r^3
P_Q^N	0.05601	0.05673	0.00072	0.06099	0.06164	0.00065
P_Q^Γ	0.04983	0.05044	0.00061	0.05445	0.05516	0.00071
P_Q^{WH1}	0.04985	0.05046	0.00061	0.05446	0.05516	0.00070
P_Q^{WH2}	0.04983	0.05045	0.00061	0.05445	0.05516	0.00071
$P_Q^{NP_2}$	0.04957	0.05019	0.00061	0.05421	0.05490	0.00069
$P_Q^{NP_3}$	0.04981	0.05042	0.00061	0.05442	0.05514	0.00072
P_Q^{IG}	0.04987	0.05048	0.00061	0.05449	0.05520	0.00071
P_Q^M	0.04981	0.05041	0.00060	0.05442	0.05514	0.00072

Źródło: opracowanie własne.

Zaburzenia rozkładami o wyższej wariancji doprowadziły do wzrostu odsetka zdarzeń, w których składka została przekroczona przez szkodę. Zaobserwowane wyniki kształtowały się na zbliżonym poziomie dla różnych rozkładów zaburzających (patrz kolumny odpowiadające oscylacji r^1 oraz r^3 w tabeli 6). Ostatecznie nie stwierdzono podstaw do rozróżnienia odporności składki kwantylowej w zależności od przyjętej postaci rozkładu zaburzającego. Kluczowa w tym aspekcie okazała się wariancja rozkładu zaburzającego.

Analiza wyników symulacji przy zaburzaniu rozkładu liczby szkód z pojedynczego ryzyka pozwala zaobserwować różne wartości prawdopodobieństw przekroczenia przyjętej składki przy założeniu wielkości pojedynczej szkody danej rozkładem gamma oraz logarytmiczno-normalnym w związku ze stwierdzonym przeszacowaniem składki kwantylowej dla rozkładu o wyższej wartości skośności i kurtozy. Przekroczenia składki także zdarzały się częściej, jednak wzrost ten był mniejszy niż w przypadku, gdy wielkość pojedynczej szkody dana była rozkładem

gamma. Tendencję tę ilustruje tabela 7. Dla rozkładu ujemnego dwumianowego jako rozkładu niezaburzonego otrzymane wyniki były analogiczne.

Tabela 7. Wyniki symulacji dla rozkładu Poissona – zaburzenia rozkładem z ogonem poissonowskim, wielkość szkody – rozkład gamma i logarytmiczno-normalny

$N \sim (1 - \varepsilon)P + \varepsilon F, \sigma_{ZAP_1}^2 = 0.165, \sigma_{ZAP_3}^2 = 0.225$						
$\mu_Y = 10$ $\sigma_Y^2 = 150$	$\varepsilon = 0$		$\varepsilon = 1$			
	$Y \sim \Gamma$	$Y \sim LN$	$Y \sim \Gamma$		$Y \sim LN$	
			$F = ZAP_1$	$F = ZAP_3$	$F = ZAP_1$	$F = ZAP_3$
P_Q^N	0.05535	0.05733	0.05892	0.07194	0.06077	0.07289
P_Q^Γ	0.04990	0.04936	0.05325	0.06572	0.05246	0.06385
P_Q^{WH1}	0.04991	0.04938	0.05325	0.06573	0.05247	0.06387
P_Q^{WH2}	0.04990	0.04936	0.05325	0.06572	0.05246	0.06385
$P_Q^{NP_2}$	0.04971	0.04888	0.05306	0.06549	0.05195	0.06336
$P_Q^{NP_3}$	0.04988	0.04952	0.05324	0.06570	0.05265	0.06406
P_Q^{IG}	0.04992	0.04942	0.05327	0.06575	0.05253	0.06392
P_Q^M	0.04988	0.04974	0.05323	0.06569	0.05291	0.06433

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 8. Wyniki symulacji dla rozkładu ujemnego dwumianowego – zaburzenia rozkładem Poisson-Gamma-Gamma, wielkość szkody – rozkład gamma i logarytmiczno-normalny

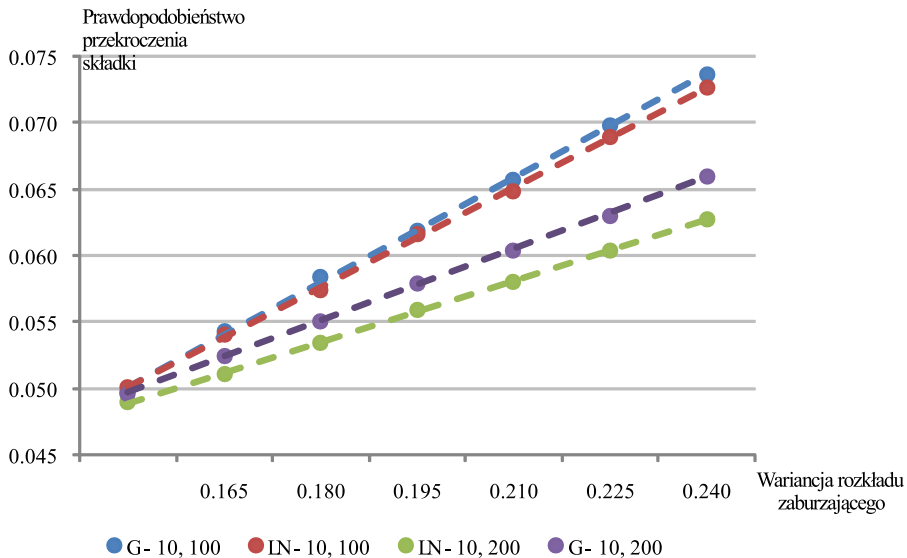
$N \sim (1 - \varepsilon)NB_1 + \varepsilon F, \varepsilon = 1$								
$\mu_Y = 10$	$F = PGG_1, \sigma_{PGG_1}^2 = 0.165$				$F = PGG_3, \sigma_{PGG_3}^2 = 0.225$			
	$Y \sim \Gamma$		$Y \sim LN$		$Y \sim \Gamma$		$Y \sim LN$	
	$\sigma_Y^2=100$	$\sigma_Y^2=200$	$\sigma_Y^2=100$	$\sigma_Y^2=200$	$\sigma_Y^2=100$	$\sigma_Y^2=200$	$\sigma_Y^2=100$	$\sigma_Y^2=200$
P_Q^N	0.05471	0.05638	0.05580	0.05801	0.07098	0.06700	0.07154	0.06823
P_Q^Γ	0.04988	0.05006	0.04974	0.04828	0.06564	0.06020	0.06484	0.05757
P_Q^{WH1}	0.04988	0.05007	0.04974	0.04833	0.06564	0.06022	0.06486	0.05762
P_Q^{WH2}	0.04988	0.05006	0.04974	0.04827	0.06564	0.06021	0.06485	0.05757
$P_Q^{NP_2}$	0.04972	0.04981	0.04951	0.04751	0.06546	0.05992	0.06457	0.05684
$P_Q^{NP_3}$	0.04987	0.05003	0.04977	0.04868	0.06563	0.06019	0.06490	0.05798
P_Q^{IG}	0.04990	0.05009	0.04976	0.04840	0.06566	0.06023	0.06489	0.05772
P_Q^M	0.04986	0.05003	0.04982	0.04939	0.06562	0.06018	0.06495	0.05877

Źródło: opracowanie własne.

Następną płaszczyzną badań było ustalenie wpływu parametrów rozkładu opisującego wielkość pojedynczej szkody na przekroczenie składki kwantylowej przez łączną szkodę przy zaburzeniu rozkładu liczby szkód. Stwierdzono, iż wraz z pojawieniem się zaburzeń w rozkładzie liczby szkód z pojedynczego ryzyka przy ustalonej wartości oczekiwanej rozkładu wielkości pojedynczej szkody wraz ze wzrostem jego wariancji przekroczenie składki zdarza się rzadziej. Fragment materiału badawczego obrazujący to zjawisko został przedstawiony w tabeli 8 oraz na rysunku 2.

Dodatkowo, w kontekście omawianego wcześniej dopasowania składek kwantylowych, warto zwrócić uwagę na większy odsetek przekroczenia składki wyznaczonej aproksymacją mieszaną przez łączną szkodę w przypadku rozkładu logarytmiczno-normalnego z wariancją równą 200, niż ma to miejsce dla innych składek, oprócz P_Q^N . Jeśli pamięta się o lepszej dokładności składki P_Q^M przy braku zaburzeń, ta różnica jest zrozumiała.

Rysunek 2. Wyniki symulacji dla rozkładu Poissona – zaburzenia rozkładem ujemnym dwumianowym, wielkość szkody – rozkład gamma i logarytmiczno-normalny, aproksymacja NP_3



Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 2 przedstawia badane odsetki zdarzeń, gdy składka uzyskana aproksymacją NP_3 została przekroczona przez łączną szkodę dla portfela opisanego złożonym rozkładem Poissona przy maksymalnych zaburzeniach ($\varepsilon = 1$) rozkładem ujemnym dwumianowym o różnych wariancjach oraz dla pojedynczej szkody

danej czterema różnymi rozkładami: rozkładem gamma i logarytmiczno-normalnym o wartości oczekiwanej 10 i wariancji 100 oraz 200. Na podstawie analizy wykresu można stwierdzić, iż wyższa wariancja rozkładu wielkości pojedynczej szkody sprawia, że składka jest bardziej odporna na zaburzenia rozkładu liczby szkód z pojedynczego ryzyka. Zwraca uwagę także liniowy wzrost przekroczeń składki w każdym z przypadków. Dla rozkładu ujemnego dwumianowego otrzymane wyniki charakteryzowały się analogiczną tendencją, co można zaobserwować na wcześniej przedstawionym rysunku 1.

Ostatnią analizowaną płaszczyzną badań był wpływ wielkości portfela na częstotliwość przekraczania składki przy zaburzaniu rozkładu liczby szkód.

Tabela 9. Wyniki symulacji dla rozkładu ujemnego dwumianowego – zaburzenia rozkładem ujemnym dwumianowym, wielkość szkody – rozkład gamma

$N \sim (1 - \varepsilon)NB_1 + \varepsilon NB_3, \sigma_{NB_1}^2 = 0.165, \sigma_{NB_3}^2 = 0.225, Y \sim \Gamma$						
$\mu_Y = 10$ $\sigma_Y^2 =$ 200	$\varepsilon = 0$			$\varepsilon = 1$		
	$LP =$ 1000	$LP =$ 5000	$LP =$ 10000	$LP =$ 1000	$LP =$ 5000	$LP =$ 10000
P_Q^N	0.05673	0.05266	0.05248	0.06759	0.06390	0.06286
P_Q^Γ	0.05044	0.04966	0.05026	0.06078	0.06059	0.06051
P_Q^{WH1}	0.05046	0.04966	0.05026	0.06080	0.06059	0.06051
P_Q^{WH2}	0.05045	0.04966	0.05026	0.06078	0.06059	0.06051
$P_Q^{NP_2}$	0.05019	0.04960	0.05024	0.06052	0.06053	0.06048
$P_Q^{NP_3}$	0.05042	0.04966	0.05026	0.06076	0.06059	0.06051
P_Q^{IG}	0.05048	0.04783	0.04894	0.06081	0.05859	0.05908
P_Q^M	0.05041	0.05088	0.05114	0.06076	0.06198	0.06147

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 9 przedstawia wyniki dla portfela danego złożonym rozkładem ujemnym dwumianowym przy braku zaburzeń oraz przy zaburzeniach rozkładem ujemnym dwumianowym przy największej rozważanej wariancji dla różnej liczby polis w portfelu – parametr LP .

Wraz ze wzrostem liczby polis w portfelu zwiększa się dokładność i odporność składki uzyskanej poprzez aproksymację normalną. Przy zaburzeniach rozkładem ujemnym dwumianowym o wyższej wariancji nie można stwierdzić różnic wynikających z wielkości portfela we wzroście odsetka przekroczeń składki w przypadku pozostałych aproksymacji. Jednakże składka obliczona przy aproksymacji rozkładem odwrotnym gaussowskim wyraźnie różni się od pozostałych – jest przeszacowana.

6. Podsumowanie

Przedstawione badanie dotyczyło odporności składki kwantylowej na zaburzenia rozkładu liczby szkód w modelu ryzyka łącznego. Po przeprowadzeniu symulacji zaobserwowano różne tempo wzrostu prawdopodobieństwa przekroczenia składki w zależności od wartości skośności i kurtozy rozkładu wielkości pojedynczej szkody. Ponadto należy dodać, iż mniejsza wariancja wspomnianego rozkładu powoduje silniejszy wzrost odsetka przypadków przekroczenia przyjętej składki. Otrzymane wyniki prowadzą także do wniosków, iż typ rozkładu zaburzającego nie wpływa na odporność składki kwantylowej. Istotną rolę odgrywa jego wariancja. Wielkość portfela nie wpływa na wzrost odsetka zdarzeń przekroczenia składki przez łączną szkodę w przypadku aproksymacji innych niż normalna, w której to przypadku następuje większa dokładność oraz wzrost odporności. Opracowane wnioski pozwalają stwierdzić, iż składka kwantylowa w modelu ryzyka łącznego przy założeniu rozkładu ujemnego dwumianowego liczby szkód z pojedynczego ryzyka charakteryzuje się większą odpornością na badane założenia niż przy założeniu rozkładu Poissona. Można postulować, iż obawiający się niejednorodności populacji ryzyk przy niskich poziomach wariancji założonego rozkładu wielkości pojedynczej szkody powinien w większym stopniu skłaniać się do wyboru rozkładu ujemnego dwumianowego zamiast rozkładu Poissona, niż mogłoby to mieć miejsce w przypadku wyższej wariancji. Wszystkie rozważane metody aproksymacji, oprócz aproksymacji rozkładem normalnym, która już w modelu niezaburzonym charakteryzuje się znacznym niedoszacowaniem, prowadzą do otrzymania bliskich wyników.

Bibliografia

- [1] Berger J.O. (1990), *Robust Bayesian analysis: sensitivity to the prior*, „J. Statist. Plann. Inference”, vol. 25, s. 303–328.
- [2] Boratyńska A., Dąbrowska A. (2010), *Badanie odporności składki kwantylowej w modelu ryzyka łącznego ze względu na zaburzenia rozkładu liczby szkód*, „Roczniki Kolegium Analiz Ekonomicznych SGH”, z. 21, Oficyna Wydawnicza SGH, Warszawa, s. 55–71.
- [3] Burnecki K., Mišta P., Weron A. (2005), *What is the best approximations of ruin probability in infinite time?*, „Applicationes Mathematicae”, vol. 32, s. 155–176.
- [4] Chaubey Y., Garrido J., Trudeau S. (1998), *On the computation of aggregate claims distributions: some new approximations*, „Insurance: Mathematics and Economics”, vol. 23, s. 215–230.
- [5] Filip A., Wienke M. (2013), *Odporność składki kwantylowej ze względu na zaburzenia rozkładu wielkości pojedynczej szkody w modelu ryzyka łącznego*, „Roczniki Kolegium Analiz Ekonomicznych SGH”, z. 31, Oficyna Wydawnicza SGH, Warszawa, s. 137–155.

- [6] Gómez-Déniz E., Sarabia J.M., Pérez-Sánchez J.M., Vázquez-Polo J. (2008), *Using a Bayesian Hierarchical Model for Fitting Automobile Claim Frequency Data*, „Communications in Statistics – Theory and Methods”, vol. 37, s. 1425–1435.
- [7] Hampel F.R., Ronchetti E.M., Rousseeuw P.J., Stahel W.A. (1986), *Robust statistics: the approach based on influence functions*, Wiley, New York.
- [8] Huber P.J. (1981), *Robust statistics*, Wiley, New York.
- [9] Kaas R., Goovaerts M., Dhaene J., Deniut M. (2009), *Modern Actuarial Risk Theory: Using R*, Springer, Berlin.
- [10] Nørgaard R. (1966), *A Monte Carlo simulation in Insurance Company Portfolio Management*, „The Journal of Risk and Insurance”, vol. 33, s. 459–467.
- [11] Otto W. (2004), *Ubezpieczenia majątkowe, cz. 1, Teoria ryzyka*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.
- [12] Pentikäinen T. (1977), *On the approximation of the total amount of claims*, „ASTIN Bulletin”, vol. 9, s. 281–289.
- [13] Pentikäinen T. (1987), *Approximate Evaluation of the Distribution of Aggregate Claims*, „ASTIN Bulletin”, vol. 17 (1), s. 15–40.
- [14] Seal H. (1977), *Approximations to Risk Theory's $F(x, t)$ by means of the gamma distribution*, „ASTIN Bulletin”, vol. 9, s. 213–218.
- [15] Zieliński R. (1983), *Robust statistical procedures: a general approach*, „Lecture Notes in Mathematics”, no. 982, Springer-Verlag, s. 283–295.

Robustness of the quantile premium with respect to the ε -contamination of the number of claims distribution

Abstract

The problem of the accuracy of the quantile premium in the collective risk model, when the claim number distribution differs from the assumed, is considered. The deviation is defined as the ε -contamination. Several popular approximation methods for the aggregate claims distribution were used to calculate the quantile premium: normal approximation, translated gamma approximation, normal power approximations (NP_2 and NP_3), Wilson-Hilferty approximations, translated inverse Gaussian approximation and mixed approximation. The probability of exceeding the premium by aggregate claims was used to measure the robustness of the premium. The sensitivity analysis regards distributions of the number of claims (Poisson and negative binomial distributions are analyzed), their variance, level of the contamination, the distribution of the individual claim, its characteristics and the size of the portfolio. Monte Carlo simulations were applied to obtain the results.

Autorzy:

Agata Boratyńska, Instytut Ekonometrii, Szkoła Główna Handlowa w Warszawie,
Al. Niepodległości 162, 02-554 Warszawa,
e-mail: aborata@sgh.waw.pl

Krzysztof Kondraszuk, Instytut Ekonometrii, Szkoła Główna Handlowa w Warszawie,
Al. Niepodległości 162, 02-554 Warszawa,
e-mail: krzysztof.kondraszuk@gmail.com

Załącznik

Parametryzacje wykorzystanych rozkładów prawdopodobieństwa

Rozkład	Funkcja prawdopodobieństwa/gęstość
Poissona – $P(\lambda)$	$P(N = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ dla $k = 0, 1, 2, \dots$, gdzie $\lambda > 0$
ujemny dwumianowy – $NB(r, q)$	$P(N = k) = \frac{\Gamma(r+k)}{\Gamma(r)k!} q^k p^r$ dla $k = 0, 1, 2, \dots$, gdzie $q \in (0, 1)$, $p = 1 - q$, $r > 0$
gamma – $\Gamma(\alpha, \beta)$	$g(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \mathbf{1}_{(0, \infty)}(x)$
logarytmiczno-normalny – $LN(m, s^2)$	$f(y) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi s}} e^{-\frac{(\ln y - m)^2}{2s^2}} \mathbf{1}_{(0, \infty)}(y)$
odwrotny gaussowski – $IG(m, \phi)$	$f(y) = \sqrt{\frac{m\phi}{2\pi y^3}} e^{-\frac{\phi}{2} \left(\frac{y}{m} + \frac{m}{y} - 2\right)} \mathbf{1}_{(0, \infty)}(y)$
z ogonem poissonowskim z ustalonym prawdopodobieństwem dla 0 – $ZAP(p_0, \lambda)$	$P(N = 0) = p_0$, $p_0 \in (0, 1)$, $P(N = k) = \frac{1-p_0}{e^\lambda - 1} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$ dla $k = 1, 2, \dots$, gdzie $\lambda > 0$

- Mieszanka rozkładu Poissona z rozkładem odwrotnym gaussowskim (Poisson Inverse Gaussian)

Funkcję prawdopodobieństwa rozkładu Poisson Inverse Gaussian z dodatnimi parametrami (μ, ϕ) można wyznaczyć, korzystając z funkcji generującej prawdopodobieństwo

$$g(z) = e^{\phi \left[1 - \sqrt{1 + 2\frac{\mu}{\phi} \cdot (1-z)} \right]}.$$

- Rozkład Poisson-Gamma-Gamma

Zmienna N ma rozkład Poisson-Gamma-Gamma z parametrami (a, α, β) , jeżeli rozkład warunkowy zmiennej N przy znanym λ jest rozkładem Poissona o wartości oczekiwanej λ , rozkład zmiennej λ przy znanej wartości b jest rozkładem gamma z parametrami (a, b) , a rozkład zmiennej b jest rozkładem gamma z parametrami α oraz β . Model ten można zatem przedstawić jako:

$$\begin{aligned} N|\lambda &\sim Pois(\lambda), \\ \lambda|b &\sim \pi_1(\lambda|a, b) = \Gamma(a, b), \\ b &\sim \pi_2(b|\alpha, \beta) = \Gamma(\alpha, \beta). \end{aligned}$$