

HELENA JASIULEWICZ

Przestrzeń stanów i filtr Kalmana w teorii ubezpieczeń¹

Streszczenie

W pracy przedstawiono elastyczne narzędzie służące do wyznaczania optymalnych estymatorów i predyktorów, jakim jest filtr Kalmana. Skupiono się na klasycznym algorytmie Kalmana związanym z liniową przestrzenią stanów zakłócanych szumem gaussowskim. Następnie przedstawiono zastosowanie filtra Kalmana do optymalnego prognozowania przyszłych rezerw szkodowych. Podano przykład wskazujący zalety filtra Kalmana w porównaniu z tradycyjnymi technikami typu chain-ladder wyznaczania rezerw szkodowych.

1. Wstęp

Artykuł ma charakter przeglądowy i przedstawia zastosowania filtra Kalmana do szacowania rezerw szkodowych. Kalman (1960) wprowadził rekurencyjny algorytm estymacji parametrów zmieniających się w czasie metodą najmniejszych kwadratów. Algorytmy związane z filtrem Kalmana miały ogromny wpływ na przetwarzanie danych w ostatnich 40 latach. Znalazły zastosowanie w różnych dziedzinach nauki i techniki, np. w przetwarzaniu sygnałów naprowadzania promów kosmicznych (nawigacja Apollo II), w systemach nawigacji GPS, w automatach i robotyce, kontroli jakości, w teorii sterowania, w statystyce, w szeregach czasowych. Nieco później zaczęto intensywnie wykorzystywać liniową przestrzeń stanów i filtr Kalmana w ubezpieczeniach i finansach. Z tego zakresu powstało bardzo wiele prac w języku angielskim. Niestety w polskim piśmiennictwie aktuarialnym liczba prac na ten temat jest znikoma (Otto, 2006; Krzemiński, 2007).

W światowej literaturze zastosowanie filtra Kalmana do problemów ubezpieczeniowych odnosi się głównie do rezerw szkodowych (rezerw IBNR) oraz składek zaufania w klasycznych modelach zaufania (Bühlmann, Bühlmann-Strauba i Hachemeistera) i odpornych modelach zaufania (Künscha, Gislera i Reinharda oraz Kremiera).

Pionierską pracą adaptującą filtr Kalmana do szacowania i prognozowania rezerw szkodowych na podstawie danych w postaci trójkąta szkód jest praca de Jonga i Zehnwirtha (1983a). Kontynuację i poszerzenie tych badań stanowią

¹ Projekt został sfinansowany ze środków Narodowego Centrum Nauki.

prace: Kremera (1984), Renshawa (1989), Verralla (1994; 1989a; 1989b). Zehnwirth (1996) rozważa modele rezerwy szkodowej, w których parametry zmieniają się w trzech kierunkach: roku zdarzenia, roku opóźnienia i roku kalendarzowego. Zastosowanie filtru Kalmana pozwoliło pokonać problemy nadmiaru parametrów, spotykane w tradycyjnych technikach *chain-ladder*. De Jong (2006) w badanych modelach rezerwy szkodowej uwzględnia różne zależności wewnątrz trójkątów szkodowych i pomiędzy nimi. Każdy model zapisuje w postaci przestrzeni stanów, co pozwala zastosować filtr Kalmana. Dzięki filtrowi nie trzeba za każdym razem przystosowywać wzorów lub oprogramowania komputerowego wraz z rozszerzanymi modelami. Filtr Kalmana jest wykorzystany jako narzędzie obliczeniowe do wyznaczania estymacji metodą najmniejszych kwadratów, rekurencyjnie aktualizowanej na podstawie nowych informacji. Istotna modyfikacja ujęcia i rozwiązania problemów rozważanych w wymienionych pracach znajduje się w pracy Atherino i in. (2010).

Wyniki teoretyczne uzyskane za pomocą dynamicznych modeli liniowych znajdują zastosowanie w działalności kanadyjskich i amerykańskich towarzystw ubezpieczeniowych. Oczywiście jest wiele innych prac, które zostały tu pominięte na podstawie subiektywnej oceny autorki.

Mehra (1975) pokazał, że estymacja i predykcja w teorii zaufania są podobne do zagadnień rozważanych w teorii filtracji Kalmana. De Jong i Zehnwirth (1983b), Zehnwirth (1985), Ledorter, Klugman, Lee (1991) prowadzili badania klasycznych modeli zaufania za pomocą filtru Kalmana. W swej pracy Cipra i Romera (1991) po raz pierwszy wykorzystali odporny filtr Kalmana do uzyskania odpornej składki zaufania. Rozważania te kontynuowali Kremer (1994) i Tam (1998).

Zastosowanie dynamicznych modeli liniowych w ubezpieczeniach wykracza poza wskazane obszary badawcze. Mogą być wykorzystywane w monitoringu umieralności populacji ludzkiej (de Jong, 2006). Teoria filtracji Kalmana znalazła również szerokie zastosowanie w finansach (Wells, 1996; Sommacampagna, 2005).

2. Liniowa przestrzeń stanów i filtr Kalmana

Niech y_1, y_2, \dots będzie szeregiem czasowym, którego wyrazy są liczbami lub wektorami. Obserwacje y_t zależą od nieobserwowanego parametru θ_t , zwanego stanem lub wektorem parametrów. Liniowy model przestrzeni stanów opisany jest przez dwa zbiory równań:

- równanie obserwacji

$$y_t = Z_t \theta_t + d_t + S_t \varepsilon_t,$$

- równanie stanu (równanie przejścia między stanami)

$$\theta_t = T_t \theta_{t-1} + c_t + R_t \eta_t,$$

gdzie:

Z_t, S_t, T_t, R_t – macierze projektowane,
 d_t, c_t – wektory wejścia o znanych średnich i wariancjach,
 ε_t – nieskorelowane zaburzenia losowe obserwacji, $\varepsilon_t \sim N(0, H_t)$,
 η_t – nieskorelowane zaburzenia losowe stanów, $\eta_t \sim N(0, Q_t)$,
 ciągi $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ i η_1, η_2, \dots są niezależne.

Wymiar przestrzeni stanów może zmieniać się w czasie. Operator przejścia T_t ze stanu θ_{t-1} do stanu θ_t jest operatorem liniowym. Dlatego też przestrzeń stanów nazywa się przestrzenią liniową.

Macierze Z_t i S_t są znane w każdej chwili t . Ich postacię wynikają z analizy danych i wybranego modelu dopasowanego do danych. Również macierze T_t i R_t są znane w każdej chwili t i wynikają z przyjętych zasad przechodzenia ze stanu systemu w chwili $t - 1$ do stanu systemu w chwili t . Na podstawie analizy danych badacz ustala macierz wariancji H_t składnika losowego obserwacji i macierz wariancji Q_t losowego zaburzenia stanu systemu. Filtr Kalmana (1960) jest rekurencyjną metodą szacowania stanu θ_t na podstawie obserwacji dynamicznego systemu liniowego.

Wprowadzimy następujące oznaczenia dla $t \geq s$:

$$\begin{aligned} \theta_{t|s} &= E(\theta_t | y_1, \dots, y_s), \\ \Sigma_{t|s} &= \text{Cov}(\theta_t | y_1, \dots, y_s), \\ y_{t|s} &= E(y_t | y_1, \dots, y_s), \\ F_{t|s} &= \text{Cov}(y_t | y_1, \dots, y_s). \end{aligned}$$

W szczególności

$$\theta_{t|t} = \hat{\theta}_t - \text{oszacowanie stanu}, \quad \Sigma_{t|t} = \Sigma_t - \text{błąd oszacowania stanu}.$$

Stan inicjujący rekurencję θ_0 dany jest przez jego średnią i macierz kowariancji:

$$\begin{aligned} \theta_{0|0} &= E(\theta_0), \\ \Sigma_{0|0} &= \text{Cov}(\theta_0). \end{aligned}$$

Można pokazać (zob. np. Krzemiński, 2007; Verrall, 1989a), że rekurencyjny algorytm estymacji stanu θ_t jest następujący. W chwili $t - 1$ mamy oszacowany stan θ_{t-1} i znamy macierz kowariancji błędu oszacowania Σ_{t-1} . Na podstawie obserwacji do chwili $t - 1$ włącznie wyznaczamy:

- prognozę stanu na moment t i błąd tej prognozy

$$\begin{aligned}\theta_{t|t-1} &= T_t \theta_{t-1|t-1} + \bar{c}_t, & \bar{c}_t &= E c_t, \\ \Sigma_{t|t-1} &= T_t \Sigma_{t-1|t-1} T_t' + R_t Q_t R_t',\end{aligned}$$

- prognozę obserwacji na moment t i błąd tej prognozy

$$\begin{aligned}y_{t|t-1} &= Z_t \theta_{t|t-1} + \bar{d}_t, & \bar{d}_t &= E d_t, \\ F_{t|t-1} &= Z_t \Sigma_{t|t-1} Z_t' + S_t H_t S_t',\end{aligned}$$

- filtr Kalmana (wygładzenie)

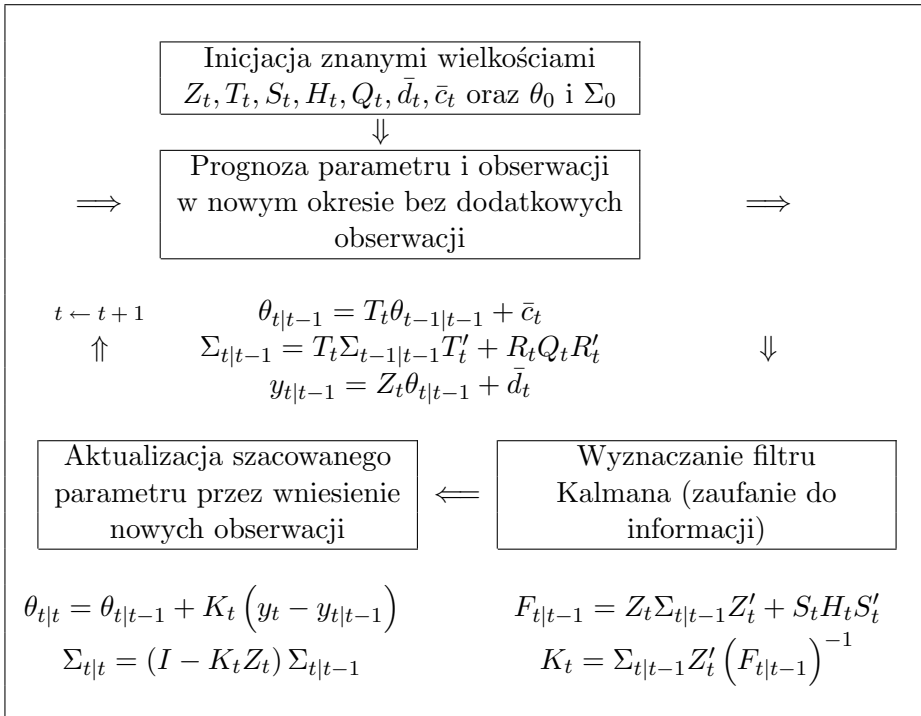
$$K_t = \Sigma_{t|t-1} Z_t' F_{t|t-1}^{-1},$$

- aktualizację prognozy stanu $\theta_{t|t-1}$ i błędu tej prognozy $\Sigma_{t|t-1}$ za pomocą filtru Kalmana K_t i dodatkowej informacji y_t

$$\begin{aligned}\theta_{t|t} &= \theta_{t|t-1} + K_t (y_t - y_{t|t-1}), \\ \Sigma_{t|t} &= \Sigma_{t|t-1} - K_t Z_t \Sigma_{t|t-1}.\end{aligned}$$

W chwili t znamy oszacowanie $\hat{\theta}_t = \theta_{t|t}$ stanu θ_t i macierz kowariancji błędu oszacowania Σ_t .

Rysunek 1. Schemat algorytmu



Filtr Kalmana działa on-line, tzn.:

- 1) uaktualnia estymację stanu w czasie realnym,
- 2) każda iteracja wykorzystuje dodatkowe informacje z bieżącego okresu.

Opisany algorytm można przedstawić za pomocą schematu przedstawionego na rysunku 1.

Po przetworzeniu wszystkich n obserwacji y_1, \dots, y_n filtr Kalmana produkuje optymalne estymatory stanu na moment n i $n + 1$, tzn.

$$\theta_{n|n}, \theta_{n+1|n}$$

wraz z macierzami kowariancji błędów estymacji

$$\Sigma_{n|n}, \Sigma_{n+1|n}$$

oraz prognozę przyszłej obserwacji $y_{n+1|n}$.

Przyjmując $\theta_{n|n}$ i $\Sigma_{n|n}$ za stan inicjujący algorytm Kalmana, dostajemy prognozę i kowariancję błędu prognozy:

$$\begin{aligned} \hat{y}_{n+k} &= Z_{n+k} \hat{\theta}_{n+k} + d_{n+k}, \\ F_{n+k|n} &= \text{Cov}(\hat{y}_{n+k} - y_{n+k|n} | y_1, \dots, y_n) \end{aligned}$$

dla $k = 1, 2, \dots$

Uwagi o algorytmie

1. Estymatory otrzymane za pomocą filtru Kalmana są liniowe o minimalnym błędzie średniokwadratowym.
2. Algorytm filtru Kalmana może być zastosowany do rekurencji wstecznej. Wsteczną rekurencję wykorzystuje się w celu poprawy stanu inicjującego algorytm.
3. Algorytm filtru Kalmana wymaga założenia, że wektor obserwacji ma rozkład normalny (zaburzenia $\varepsilon_t \sim \text{IID } N(\cdot, \cdot)$).

Istnieje wiele rozszerzeń filtru Kalmana na niegaussowskie rozkłady błędów obserwacji. West, Harrison i Migan (1985) rozszerzyli filtr Kalmana na przypadek, gdy zaburzenia obserwacji ε_t mają rozkład z wykładniczej rodziny dyspersyjnej. Dalsze uogólnienia filtru Kalmana ze względu na rozkład ε_t znajdują się w pracy Naik-Nimbalkar, Rajarshi (1995).

Rozszerzony filtr Kalmana na nieliniowe systemy

$$\begin{aligned} y_t &= f(\theta_t, d_t, \varepsilon_t), \quad \varepsilon_t \sim N(\cdot, \cdot), \\ \theta_t &= g(\theta_{t-1}, C_{t-1}, \eta_{t-1}), \quad \eta_t \sim N(\cdot, \cdot) \end{aligned}$$

jest w pracy Nørgaard (2002).

W pracy Kalmana i Bucy'ego (1961) rozważany jest filtr Kalmana-Bucy'ego dla ciągłego w czasie modelu przestrzeni stanów:

$$y_i = Z(t_i, \psi), \theta(t_i) + d(t_i, \psi) + \varepsilon_i,$$

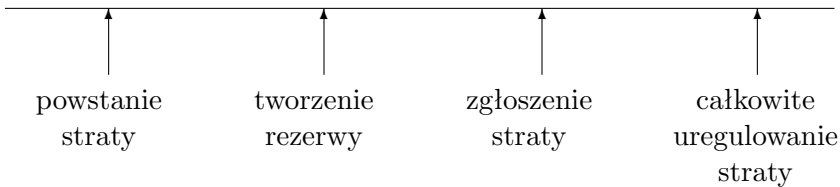
$$d\theta(t) = (T(t, \psi)\theta(t) + c(t, \psi))dt + R(t, W)dW(d),$$

gdzie $W(t)$ – proces Wienera i zakłócenie $\varepsilon_i \sim N(0, Q(t_i, \psi))$. Odpornymi filtrami Kalmana zajmowali się w swoich pracach Masreliez i Martin (1977) oraz Meinhold i Singpurwalla (1989).

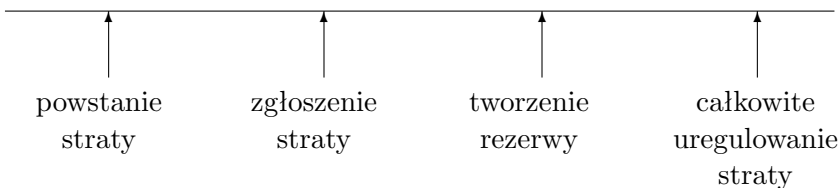
3. Przestrzeń stanów dla trójkąta szkód

Potrzeba tworzenia rezerw szkodowych wynika z opóźnień, które powstają z powodu:

- zgłoszenia straty po momencie utworzenia rezerwy,

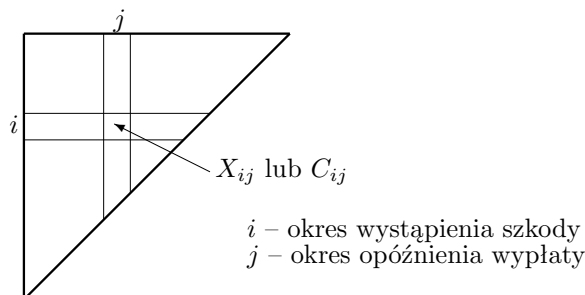


- zgłoszenia straty przed momentem utworzenia rezerwy, ale bez dostatecznego zapasu na całkowite uregulowanie straty.



Rezerwy tworzone na niezgłoszone straty nazywane są rezerwami IBNR (ang. *Incurred But Not Reported*). Rezerwy tworzone na szkody zgłoszone, ale nie zlikwidowane określa się rezerwami RBNP (ang. *Reported But Not Payed*). Te dwie rezerwy łącznie noszą nazwę rezerw szkodowych. Dane dotyczące rezerw szkodowych zorganizowane w postaci trójkąta szkód są nieskumulowane X_{ij} lub skumulowane C_{ij} .

Rysunek 2. Trójkąt szkód



Na podstawie danych w trójkącie szkód (rysunek 2) należy prognozować szkody \hat{x}_{ij} , jak podaje tabela 1.

Tabela 1. Rezerwy prognozowane

$i \setminus j$	0	1	2	...	$n-2$	$n-1$	Rezerwa
1	x_{10}	x_{11}	x_{12}	...	$x_{1,n-2}$	$x_{1,n-1}$	
2	x_{20}	x_{21}	x_{22}	...	$x_{2,n-2}$	$\hat{x}_{2,n-1}$	\hat{R}_2
3	x_{30}	x_{31}	x_{32}	...	$\hat{x}_{3,n-2}$	$\hat{x}_{3,n-1}$	\hat{R}_3
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots	\vdots	\vdots
$n-1$	$x_{n-1,0}$	$x_{n-1,1}$	$\hat{x}_{n-1,2}$...	$\hat{x}_{n-1,n-2}$	$\hat{x}_{n-1,n-1}$	\hat{R}_{n-1}
n	$x_{n,0}$	$\hat{x}_{n,1}$	$\hat{x}_{n,2}$...	$\hat{x}_{n,n-1}$	$\hat{x}_{n,n-1}$	\hat{R}_n

Prognozowane rezerwy \hat{R}_i na szkody z roku zdarzenia i są sumą wyrazów \hat{x}_{ij} stojących w wierszu i :

$$\hat{R}_2 = \hat{x}_{2,n-1}, \quad \hat{R}_3 = \hat{x}_{3,n-2} + \hat{x}_{3,n-1}, \quad \hat{R}_n = \hat{x}_{n,1} + \hat{x}_{n,2} + \dots + \hat{x}_{n,n-1}.$$

Właściwym oszacowaniem rezerw szkodowych zainteresowani są: ubezpieczeni (otrzymanie należnego roszczenia), akcjonariusze (otrzymanie dywidendy), nadzór ubezpieczeniowy, organa podatkowe.

Tworzenie rezerw szkodowych w ubezpieczeniach majątkowych jest obowiązkowe. Stanowią one najważniejszą rezerwę spośród dziewięciu rezerw wymaganych ustawą.

Szkody z tytułu ubezpieczenia OC i NW mogą być wypłacane przez wiele lat. Ustawa z 2007 r. stanowi, że od 1 stycznia 2012 r. szkody mogą być wypłacane do 25 lat od roku zajścia.

Środki zgromadzone na wypłaty z tego typu roszczeń muszą pochodzić ze składek zebranych w roku zajścia szkody. Oznacza to, że nominalna wielkość szkody ustalona w roku jej zajścia musi być powiązana z jej wypłatami opóźnionymi. Suma zdyskontowanych wypłat z opóźnieniem na rok zajścia szkody musi dać wartość nominalną szkody ustaloną w roku zdarzenia.

Jest bardzo wiele metod deterministycznych i stochastycznych oszacowania rezerw. Od 1 stycznia 2012 r., zgodnie z projektem Solvency II, w krajach UE rezerwy muszą być oszacowane najlepiej oraz z podanym błędem oszacowań. Zgodnie z projektem Solvency II, nie mogą być stosowane modele deterministyczne. Mimo istnienia obszernej literatury z tego zakresu, rozwiązanie problemu właściwego określenia poziomu rezerw jest wciąż niezadowalające. W ostatnich latach do praktyki ubezpieczeniowej w USA i w Kanadzie weszły metody dynamiczne z zastosowaniem filtru Kalmana.

Dla obserwacji nieskumulowanych w trójkącie szkód wprowadzimy oznaczenia:

- x_{ij} – nieskumulowana wypłata z opóźnieniem j lat w stosunku do roku zdarzenia i ,
- y_{ij} – transformacja obserwacji x_{ij} , np. $y_{ij} = \ln x_{ij}$,
- y_t – wektor obserwacji w roku kalendarzowym t , tzn.

$$y_t = [y_{t,0}, y_{t-1,1}, y_{t-2,2}, \dots, y_{2,t-2}, y_{1,t-1}]'$$

gdzie $y_{t-j,j}$ jest zagregowaną płatnością w roku kalendarzowym t opóźnioną o j lat względem roku zdarzenia $i = t - j$. Współrzędne wektora y_t leżą na przekątnej szkód trójkąta z dołu do góry:

$$\begin{aligned} y_1 &= [y_{10}], \\ y_2 &= [y_{20}, y_{11}]', \\ y_3 &= [y_{3,0}, y_{21}, y_{12}]' \text{ itd.} \end{aligned}$$

Wówczas $\sum_{j=0}^t y_{t-j,j}$ jest całkowitą płatnością w roku kalendarzowym t .

Modelowanie płatności

Niech model strumienia płatności w roku kalendarzowym t będzie postaci:

$$y_{t-j,j} = m(t-j, j) + \varepsilon_{t-j,j},$$

gdzie $m(t-j, j)$ jest przeciętną wypłatą, a $\varepsilon_{t-j,j}$ jest błędem o średniej zero i znanej lub oszacowanej wariancji. Na podstawie analizy danych dopasowuje się do nich model $m(t-j, j)$ np. postaci

$$m(t-j, j) = \mu + \alpha_{t-j} + \beta_j,$$

gdzie nieznanne parametry μ , α_{t-j} , β_j szacowane są na podstawie danych do momentu t włącznie. Estymator

$$\hat{m}(t-j, j) = \hat{\mu} + \hat{\alpha}_{t-j} + \hat{\beta}_j$$

posłuży do prognozowania przyszłych płatności.

Zwykle oprócz danych w trójkącie szkód dostępne są dodatkowe informacje wpływające na przyszłe wypłaty, np. ekspozycja dla roku zdarzenia (np. zebrana składka), indeks cen stosowany do płatności w roku kalendarzowym t . Należy te informacje wykorzystać w modelowaniu płatności. Niech

$n(1), n(2), \dots, n(t)$ będą indeksami ekspozycji w kolejnych latach zdarzeń, $\lambda(1), \lambda(2), \dots, \lambda(t)$ będą indeksami cen w kolejnych latach kalendarzowych.

Te informacje wpływają na prognozowane wypłaty i model należy rozszerzyć do postaci:

$$m(t-j, j) \rightarrow n(t-j) \lambda(t) m(t-j, j),$$

czyli

$$y_{t-j, j} = n(t-j) \lambda(t) m(t-j, j) + \varepsilon_{t-j, j},$$

gdzie $m(t-j, j)$ jest znaną kombinacją liniową nieznanymi współrzędnymi wektora θ_t .

Zapiszmy rozważany model za pomocą liniowej przestrzeni stanów (de Jong, Zehnwirth, 1983a). Najpierw zapiszmy równanie obserwacji. Dla roku kalendarzowego t

$$y_t = Z_t \theta_t + \varepsilon_t,$$

gdzie

$$y_t = \begin{bmatrix} y_{t0} \\ y_{t-1,1} \\ y_{t-2,2} \\ \vdots \\ y_{2,t-2} \\ y_{1,t-1} \end{bmatrix}, \quad \theta_t = \begin{bmatrix} \theta_{t,1} \\ \theta_{t,2} \\ \theta_{t,3} \\ \vdots \\ \theta_{t,t-1} \\ \theta_{tt} \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_{t,0} \\ \varepsilon_{t-1,1} \\ \varepsilon_{t-2,2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{2,t-2} \\ \varepsilon_{1,t-1} \end{bmatrix},$$

a Z_t jest znaną macierzą, gdy znany jest model na $m(t-j, j)$. W tym przypadku $d_t = 0$ i $S_t = I_t$.

Zgodnie z przywoływaną pracą de Jonga i Zehnwirtha (1983a), stan θ_t ewoluuje w czasie według wzoru

$$\theta_t = T_t \theta_{t-1} + R_t \eta_t,$$

gdzie macierze T_t i R_t są zaprojektowane na podstawie analizy danych, η_t jest błędem losowym o średniej zero i znanej wariancji. W tym przypadku $c_t = 0$.

Filtr Kalmana jest metodą estymacji wektora parametrów θ_t w sposób optymalny na podstawie wszystkich obserwacji do czasu t włącznie. Mając $\hat{\theta}_t$, prognozuje się obserwacje na okres $t+1$ w sposób optymalny.

Dla $\varepsilon_t \sim N(0, H_t)$ i $\eta_t \sim N(0, Q_t)$ rekurencyjny algorytm estymacji stanu przestrzeni liniowej dla trójkąta szkód jest następujący:

$$\begin{aligned}\hat{y}_{t+1} &= Z_{t+1}T_{t+1}\hat{\theta}_t, \\ \hat{\theta}_t &= \theta_{t|t-1} + K_t(y_t - y_{t|t-1}), \\ \Sigma_{t|t-1} &= T_t\Sigma_{t-1}T_t' + R_tQ_tR_t', \\ F_{t|t-1} &= Z_t\Sigma_{t|t-1}Z_t' + H_t, \\ K_t &= \Sigma_{t|t-1}Z_t'(F_{t|t-1})^{-1}, \\ \Sigma_t &= \Sigma_{t|t-1} - K_tZ_t\Sigma_{t|t-1}.\end{aligned}$$

4. Przykład

Klasyczny model *chain-ladder* IBNR (Verrall, 1989a):

$$X_{ij} = m \cdot U_i \cdot V_j \cdot R_i$$

\uparrow przeciętna \uparrow efekt roku zdarzenia \uparrow efekt opóźnienia wypłaty \uparrow multiplikatywny błąd losowy

$$Y_{ij} = \ln X_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij},$$

gdzie $\varepsilon_{ij} \sim \text{IID}N(0, \sigma)$ zapiszemy za pomocą liniowej przestrzeni stanów przy założeniu, że $\alpha_1 = \beta_1 = 0$. Równania stanu

$$y_t = F_t\theta_t + \varepsilon_t$$

dla kolejnych t podane są poniżej:

dla $t = 1$

$$y_1 = y_{11} = \mu + \varepsilon_{11} = F_1\theta_1 + \varepsilon_1,$$

gdzie

$$F_1 = [1], \theta_1 = [\mu], \varepsilon_1 = [\varepsilon_{11}];$$

dla $t = 2$

$$y_2 = \begin{bmatrix} y_{12} \\ y_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu + \beta_2 + \varepsilon_{12} \\ \mu + \alpha_2 + \varepsilon_{21} \end{bmatrix} = F_2\theta_2 + \varepsilon_2,$$

gdzie

$$F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \theta_2 = \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_2 = \begin{bmatrix} \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} \end{bmatrix};$$

dla $t = 3$

$$y_3 = \begin{bmatrix} y_{13} \\ y_{22} \\ y_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu + \beta_2 + \varepsilon_{13} \\ \mu + \alpha_2 + \varepsilon_{23} \\ \mu + \alpha_3 + \varepsilon_{31} \end{bmatrix} = F_3 \theta_3 + \varepsilon_3,$$

gdzie

$$F_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \theta_3 = \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \alpha_3 \\ \beta_3 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_3 = \begin{bmatrix} \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{31} \end{bmatrix}.$$

Wektor stanu w chwili t jest postaci

$$\theta_t = [\mu, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3, \dots, \alpha_t, \beta_t]'$$

Równania przejścia stanu dla metody *chain-ladder* są statyczne, bez składnika losowego, tzn.

$$\theta_t = T_t \theta_{t-1} + H_t u_t,$$

gdzie

$$T_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dots & \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad u_t = \begin{bmatrix} \alpha_t \\ \beta_t \end{bmatrix}.$$

Wektor u_t zawiera nowe parametry, które nie wchodziły w skład stanu θ_{t-1} . Równanie stanu mówi, że parametry istniejące nie zmieniają się w czasie, natomiast nowe parametry traktowane są jako wejście stochastyczne do systemu $c_t = H_t u_t$. Jeżeli $\text{Var}(e_{ij}) = \sigma^2$ jest znana, to obie metody, najmniejszych kwadratów i z wykorzystaniem filtru Kalmana, dają identyczne rozwiązania.

Przestrzeń stanów i filtr Kalmana pozwalają na zmianę modelu bez zmiany wzorów i oprogramowania komputerowego. Zostaną przedstawione trzy warianty przejścia ze stanu θ_{t+1} do θ_t (Krzemiński, 2007; Verrall, 1994).

1. Dynamiczny efekt wiersza.

Efekt wierszowy α_i ewoluuje w czasie według wzoru

$$\alpha_{i+1} = \alpha_i + v_i, \quad v_i \sim \text{IID } N(0, \sigma_v^2),$$

czyli równanie przejścia stanu jest postaci:

$$\theta_{t+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \theta_t + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \beta_{t+1} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} v_t.$$

Wówczas przykładowe rozszczenia mają postać:

$$\begin{aligned} y_{22} &= \mu + \alpha_2 + \beta_2 + \varepsilon_{22}, \\ y_{23} &= \mu + \alpha_2 + \beta_3 + \varepsilon_{23}, \\ y_{34} &= \mu + \alpha_2 + \beta_4 + \varepsilon_{34} + v_2, \\ y_{44} &= \mu + \alpha_2 + \beta_4 + \varepsilon_{44} + v_2 + v_3. \end{aligned}$$

2. Dynamiczny indywidualny efekt kolumnowy.

Efekt kolumnowy zależy od roku zdarzenia według relacji

$$\beta_{i+1,j} = \beta_{ij} + \eta_{ij},$$

czyli równanie stanu jest postaci

$$\theta_{t+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \theta_t + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \alpha_{t+1} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \eta_t.$$

Wówczas przykładowe rozszczenia są postaci:

$$\begin{aligned} y_{22} &= \mu + \alpha_2 + \beta_{22} + \varepsilon_{22}, \\ y_{23} &= \mu + \alpha_2 + \beta_{23} + \varepsilon_{23}, \\ y_{34} &= \mu + \alpha_3 + \beta_{24} + \varepsilon_{34} + \eta_{24}, \\ y_{44} &= \mu + \alpha_4 + \beta_{24} + \varepsilon_{44} + \eta_{24} + \eta_{34}. \end{aligned}$$

3. Dynamiczny efekt wiersza i kolumny.

Równanie przejścia jest postaci

$$\theta_{t+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \theta_t + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_t \\ \eta_t \end{bmatrix}.$$

Składniki losowe v_t i η_t są niezależne o rozkładach normalnych ze średnią zero. Wówczas przykładowe wypłaty są postaci

$$\begin{aligned} y_{22} &= \mu + \alpha_2 + \beta_2 + \varepsilon_{22}, \\ y_{23} &= \mu + \alpha_2 + \beta_2 + \varepsilon_{23} + \eta_2, \\ y_{34} &= \mu + \alpha_2 + \beta_2 + \varepsilon_{34} + \eta_2 + \eta_3 + v_2, \\ y_{44} &= \mu + \alpha_2 + \beta_2 + \varepsilon_{44} + \eta_2 + \eta_3 + v_2 + v_3. \end{aligned}$$

W podanych wariantach wypłaty różnią się, a o sile różnicy decydują wariancje składników losowych: ε_i , v_i , η_i .

Dla danych nieskumulowanych (tabela 2) pochodzących z pracy Taylora i Ashego (1983) oszacowane rezerwy metodami dynamicznymi i modelem Macka są podane w tabeli 3. Wyniki estymacji nieznanymi parametrów za pomocą filtru Kalmana pochodzą z prac Verralla (1989a; 1994) dla $\text{Var}(\varepsilon_{ij}) = 0.116$, $\text{Var}(v_i) = 0.0289$ oraz $\text{Var}(\eta_j) = 0.01$.

Zalety filtru Kalmana w porównaniu z tradycyjnymi technikami typu *chain-ladder* wyznaczania rezerw szkodowych są następujące:

1. W technikach *chain-ladder* obserwacje nie są ważone. Pierwszy wiersz ma taki sam wpływ na oszacowanie parametrów jak ostatni wiersz. Modele dynamiczne przykładają większą wagę do ostatnich obserwacji przez ewoluowanie parametrów w czasie.
2. Modele przestrzeni stanów nie są ograniczone mocnymi założeniami, tak jak modele technik *chain-ladder*.
3. Prognozy rezerw R_i są bardziej stabilne przy zastosowaniu filtru Kalmana niż przy metodach *chain-ladder*.
4. Modele dynamiczne są elastyczne i można w nich wykorzystywać dodatkowe informacje wpływające na szkody w dowolnym momencie estymacji.

Tabela 2. Trójkąt szkodowy

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	357848	766940	610542	482940	527326	574398	146342	139950	227229	67948
2	352118	884021	933894	1183289	445745	320996	527804	266172	425046	
3	290507	1001799	926219	1016654	750816	146923	495992	280405		
4	310608	1108250	776189	1562400	272482	352053	206286			
5	443160	693190	991983	769488	504851	470639				
6	396132	937085	847498	805037	705960					
7	440832	847631	1131398	1063269						
8	359480	1061648	1443370							
9	376686	986606								
10	344014									

Tabela 3. Rezerwy szkodowe w różnych modelach

R_i	Dynamika wierszy	Błąd	Dynamika wierszy i kolumn	Błąd	Model Macka	Błąd
R_2	109955	59278	143834	72675	94634	75535
R_3	491787	187134	465847	166438	469511	121699
R_4	686441	206954	673175	194229	709638	133549
R_5	1076957	277762	1060794	266268	984889	261406
R_6	1486691	347441	1479407	339755	1419459	411010
R_7	2217311	491998	2218738	487975	2177641	558317
R_8	3309887	744931	3287633	735669	3920301	875328
R_9	4545466	1048855	4517179	1040596	4278972	971258
R_{10}	4591188	1164469	4570683	1167068	4625811	1363155
Suma	18515983		18417290		18680856	

5. Podsumowanie

W pracy rozważa się liniowe modele przestrzeni stanów zakłóconych składnikiem losowym. Wskazuje się na elastyczność i uniwersalność tych metod. Wielką zaletą rekurencyjnego filtru Kalmana jest uwzględnienie zmian zachodzących w badanej rzeczywistości. Ponadto podany algorytm dostarcza optymalnych estymatorów i predyktorów w sensie najmniejszego błędu średniokwadratowego przy założeniu gaussowskich zakłóceń obserwacji i stanów. To założenie jest istotnym ograniczeniem stosowania algorytmu Kalmana.

Wydaje się, że przedstawiony w pracy filtr Kalmana znajdzie szerokie zastosowanie w badaniu dyskretnych nadwyżek finansowych firm ubezpieczeniowych,

a filtr Bucy'ego-Kalmana w ciągłych procesach ryzyka. Prace dotyczące prawdopodobieństwa ruiny i rozkładów związanych z ruiną nie w pełni uwzględniają rzeczywistą dynamikę nadwyżki finansowej firm ubezpieczeniowych. W pracach tych na ogół zakłada się niezmienniczość parametrów rozkładu całkowitych roszczeń, składki, poziomów retencji przy reasekuracji lub modelu inwestycji. W rzeczywistości finanse firm ubezpieczeniowych muszą uwzględniać interwencje nadzoru, wypłaty dywidend, zmiany umów reasekuracyjnych oraz zmieniające się stopy zwrotu z inwestycji. Uwzględnienie powyższych czynników i ich aktualizacja w czasie rzeczywistym w procesie ryzyka mogą umożliwić modele przestrzeni stanów. Jest to problem otwarty.

Bibliografia

- [1] Atherino R., Pizzinga A., Fernandes C. (2010), *A row-wise stacking of the runoff triangle: State space alternatives for IBNR reserve prediction*, „Astin Bull.”, vol. 40, s. 917–946.
- [2] Cipra T., Romera R. (1991), *Robust Kalman filter and its application in time series analysis*, „Kybernetika (Prague)”, vol. 27, s. 481–494.
- [3] de Jong P. (2005), *State space models in actuarial science*, Research Paper 2005/02, Macquarie University.
- [4] de Jong P. (2006), *Forecasting runoff triangles*, „North American Act. J.”, vol. 10, s. 28–38.
- [5] de Jong P., Zehnwirth B. (1983a), *Claims reserving, state-space models and the Kalman filter*, „J. Inst. of Actuaries”, vol. 110, s. 110–151.
- [6] de Jong P., Zehnwirth B. (1983b), *Credibility theory and the Kalman filter*, „Insurance Math. Econom.”, vol. 2, s. 281–286.
- [7] Kalman R., Bucy R. (1961), *New results in linear filtering and prediction theory*, „Trans. Amer. Soc. Mech. Eng., J. Basic Engineering”, vol. 83, s. 95–108.
- [8] Kalman R.E. (1960), *A new approach to linear filtering and prediction problems*, „Trans. Amer. Soc. Mech. Eng., J. Basic Engineering”, vol. 82, s. 35–45.
- [9] Kremer E. (1984), *A class of autoregressive models for predicting the final claim amount*, „Insurance Math. Econom.”, vol. 3, s. 111–119.
- [10] Kremer E. (1994), *Robust credibility via robust kalman filtering*, „Astin Bull.”, vol. 24, s. 221–233.
- [11] Krzemiński R. (2007), *Zastosowanie filtru Kalmana do wyznaczania rezerw ubezpieczeń majątkowych*, Praca magisterska, Politechnika Wrocławska.
- [12] Ledorter J., Klugman S.A., Lee C.S. (1991), *Credibility models with time-varying trend components*, „Astin Bull.”, vol. 21, s. 73–91.
- [13] Masreliez C.J., Martin R.D. (1977), *Robust Bayesian estimation for the linear model and robustifying the kalman filter*, „IEEE Trans. Automatic Control”, vol. 22, s. 479–486.
- [14] Mehra R.K. (1975), *Credibility theory and Kalman filtering with extension*, Research Memorandum RM-75-64, International Institute for Applied Systems Analysis.
- [15] Meinhold R.J., Singpurwalla N.D. (1989), *Robustification of Kalman filter models*, „J. Amer. Statist. Assoc.”, vol. 84.

- [16] Naik-Nimbalkar U.V., Rajarshi M.B. (1995), *Filtering and smoothing via estimating functions*, „J. Amer. Statist. Assoc.”, vol. 90, s. 301–306.
- [17] Nørgaard M. (2002), *Kalmtree for use with matlab: State estimation for nonlinear systems*, Raport instytutowy, Technical University of Denmark.
- [18] Otto W. (2006), *Insurer’s surplus model with varying risk parameter and delayed reporting*, „Prace Naukowe AE we Wrocławiu”, nr 1108, s. 66–90.
- [19] Renshaw A.E. (1989), *Chain ladder and interactive modelling (claims reserving and GLIM)*, „J. Inst. of Actuaries”, vol. 116, s. 559–587.
- [20] Sommacampagna C. (2005), *Estimating value at risk with the kalman filter*, Raport instytutowy, University of California, Berkeley.
- [21] Tam M. (1998), *Robust credibility and Kalman filtering*, Praca doktorska, Concordia University.
- [22] Taylor G.C., Ashe F.R. (1983), *Second moment of estimates of outstanding claims*, „J. Econom.”, vol. 23, s. 37–61.
- [23] Verrall R.J. (1989a), *A state space representation of the chain ladder linear model*, „J. Inst. of Actuaries”, vol. 116, s. 589–609.
- [24] Verrall R.J. (1989b), *Modelling claims runoff triangles with two-dimensional time series*, „Scand. Actuar. J.”, issue 3, s. 129–138.
- [25] Verrall R.J. (1994), *A method for modelling varying run-off evolution in claims reserving*, „Astin Bull.”, vol. 24, s. 325–332.
- [26] Wells C. (1996), *The Kalman filter in finance*, Kluwer, Dordrecht.
- [27] West M.P., Harrison P.J., Migon H.S. (1985), *Dynamic generalized linear models and Bayesian filtering*, „J. Amer. Statist. Assoc.”, s. 73–96.
- [28] Zehnwirth B. (1985), *Linear filtering and recursive credibility estimation*, „Astin Bull.”, vol. 15, s. 19–35.
- [29] Zehnwirth B. (1996), *Kalman filters with applications to loss reserving*, Research Paper 35, The University of Melbourne.

State space and the Kalman filter in the insurance theory

Abstract

In the paper we give an exposition of a flexible tool serving to determine of optimal estimators and predictors, which the Kalman filter is. We focus the attention on the classical Kalman algorithm connected with a linear space of spaces disrupted by a gaussian noise. Next we present an application of Kalman filter to optimal forecasting of a future claims reserving. We give an example which points out the merit of Kalman filter in comparison with traditional technique of a type chain-ladder to determine of claims reserving.

Autor:

Helena Jasiulewicz, Instytut Nauk Ekonomicznych i Społecznych, Uniwersytet Przyrodniczy we Wrocławiu, pl. Grunwaldzki 24 A, 50-363 Wrocław,

e-mail: helena.jasiulewicz@up.wroc.pl