

SEBASTIAN BARAN  
ZBIGNIEW PALMOWSKI

## Problem optymalizacji oczekiwanej użyteczności wypłat dywidend w modelu Craméra-Lundberga<sup>1</sup>

### Streszczenie

W niniejszej pracy rozważamy problem maksymalizacji oczekiwanej zdyskontowanej użyteczności wypłat dywidend przez firmę ubezpieczeniową, której rezerwy modelowane są przez klasyczny proces Craméra-Lundberga. Na wstępie analizujemy sytuację, gdy wielkość szkód opisana jest rozkładem Erlanga, funkcja użyteczności zaś spełnia warunki Inady. Przy takich założeniach, zgodnie z klasycznym podejściem weryfikacyjnym, wyprowadzamy równanie Hamiltona-Jacobiego-Bellmana. W dalszej części pracy analizujemy asymptotyczne zachowanie funkcji wartości oraz identyfikujemy optymalną strategię w przypadku wykładniczych roszczeń oraz potęgowej funkcji użyteczności. Na zakończenie proponujemy numeryczną procedurę wyznaczania funkcji wartości.

### 1. Wstęp

Rezerwy firmy ubezpieczeniowej modelujemy zwykle przez proces Craméra-Lundberga:

$$R_t = x + \mu t - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \quad (1)$$

gdzie  $x > 0$  jest kapitałem początkowym,  $\mu \in \mathbb{R}$  oznacza intensywność wpłaty składki,  $Y_1, Y_2, \dots$  są zaś niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie, reprezentującymi wielkość roszczeń, które są zgłaszane do firmy ubezpieczeniowej zgodnie z niezależnym procesem Poissona  $N_t$  ze stałą intensywnością  $\lambda > 0$ . Jak zazwyczaj zakładamy, że spełniony jest warunek *net profit*:  $\mu > \lambda \mathbb{E}(Y_i)$ , który pozwala na nieograniczony wzrost rezerw firmy ubezpieczeniowej.

Obok rezerw firmy ubezpieczeniowej drugim składnikiem naszego modelu będą wypłacane dywidendy. Pojęcie to zostało zaproponowane przez B. de Finettiego (1957) już w 1957 roku celem ograniczenia wzrostu rezerw firmy ubezpieczeniowej w klasycznym modelu ryzyka w czasie dyskretnym. W pracy tej

---

<sup>1</sup> Praca została sfinansowana ze środków Narodowego Centrum Nauki przyznanych na podstawie decyzji nr 2011/01/B/HS4/00982.

będziemy maksymalizować zysk z wypłat dywidend, a więc skoncentrujemy się na optymalizacji wypłat dywidend z punktu widzenia akcjonariusza.

Matematycznie rzecz ujmując, definiujemy proces sterowany jako:

$$X_t = R_t - C_t, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

gdzie  $C_t$  oznacza nieujemny, adaptowany oraz niemalejący proces reprezentujący łączną ilość dywidend wypłaconych do czasu  $t$ . Proces  $X_t$  obserwujemy do czasu ruiny:

$$\tau = \inf\{t > 0: X_t < 0\}.$$

Problem optymalizacji wypłacanych dywidend był wielokrotnie rozważany w matematyce ubezpieczeniowej. W klasycznym podejściu jako funkcjonal celu rozważano średnie zdyskontowane łączne dywidendy wypłacone do czasu ruiny:

$$v(x) = \mathbb{E}_x \left( \int_0^\tau e^{-\beta t} dC_t \right),$$

gdzie  $\beta$  to stopa dyskonta w czasie ciągłym, dolny indeks zaś przy wartości oczekiwanej oznacza, że proces nadwyżki finansowej startuje z kapitału początkowego  $X_0 = x$ . Wówczas szukano optymalnej strategii  $C^*$ , która maksymalizuje  $v(x)$ .

W 2004 roku F. Hubalek oraz W. Schachermayer (2004) zaproponowali pewną wariację klasycznego podejścia, opierającą się na funkcji użyteczności. Otóż założyli oni, że  $C_t$  jest absolutnie ciągle względem miary Lebesgue'a. Wówczas

$$C_t = \int_0^t c_s ds \quad \text{p.n.}$$

W tym przypadku funkcjonal celu jest równy:

$$v(x) = \mathbb{E}_x \left( \int_0^\tau e^{-\beta t} U(c_t) dt \right),$$

gdzie  $U(x)$  jest pewną z góry ustaloną funkcją użyteczności. Głównym celem jest znalezienie optymalnej strategii  $c^*$ , która maksymalizuje funkcję wartości  $v(x)$  spośród wszystkich strategii dopuszczalnych, przy czym dopuszczalna strategia  $c_t$  jest nieujemnym, adaptowanym procesem takim, że  $c_t = 0$  dla  $t \geq \tau$ .

F. Hubalek oraz W. Schachermayer zaproponowali więc, aby zamiast maksymalizacji oczekiwanego zysku z samych tylko wypłat dywidend rozważać sytuację, gdy maksymalizujemy oczekiwaną użyteczność wypłat tych dywidend dla pewnej funkcji użyteczności  $U: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Podobnie jak oni będziemy wymagać, aby funkcja użyteczności była monotoniczna, gładka i wklęsła oraz aby spełniała warunki Inady, tzn.  $\lim_{x \rightarrow 0} U'(x) = \infty$  oraz  $\lim_{x \rightarrow \infty} U'(x) = 0$ . Dodatkowo będziemy zakładać, że

$$\lim_{x \rightarrow \infty} U(x) = \infty.$$

Przy rozważaniu strategii przybliżających jednorazową wypłatę na samym początku (czyli  $c_t \rightarrow \infty$  jak  $t \downarrow 0$ ) warunek powyższy implikuje to, że

$$\lim_{x \rightarrow \infty} v(x) = +\infty. \quad (3)$$

W odróżnieniu od F. Hubalka oraz W. Schachermayera, którzy rozważali sytuację, gdy proces nadwyżki finansowej jest ruchem Browna  $W_t$  z dryfem, tj.

$$R_t = x + \mu t + \sigma W_t, \quad (4)$$

w naszej pracy będziemy rozważać sytuację, gdy procesem ryzyka jest klasyczny proces Craméra-Lundberga (1). Dla niego też, zgodnie z klasycznym podejściem weryfikacyjnym, utworzymy równanie Hamiltona-Jacobiego-Bellmana (HJB), które rozwiązuje jednoznacznie optymalną funkcję użyteczności. Skoncentrujemy się jednak na roszczeniach o rozkładzie Erlanga, który – jak wiadomo – służy do przybliżania innych rozkładów. Jest też jednym z najczęściej stosowanych rozkładów w praktyce aktuarialnej. Szczególnym przypadkiem tego rozkładu jest rozkład wykładniczy, dla którego przeprowadzamy analizę numeryczną. Wtedy też wybieramy jedną z bardziej znanych funkcji użyteczności:

$$U(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}, \quad x \geq 0, \quad \alpha \in (0, 1). \quad (5)$$

Analiza numeryczna jest tym bardziej wartościowa, że w tym przypadku jawne rozwiązanie równania HJB nie jest znane. W przeciwieństwie do procesu (4), który startując z zera, od razu przyjmuje wartość ujemną, proces (1) powoduje dodatkowe trudności. Przejawiają się one w identyfikacji wartości  $v(0)$ , do znalezienia której opracowaliśmy nową technikę numeryczną opartą na obserwacji „optymalnego” sterowanego procesu ryzyka do czasu pojawienia się pierwszego roszczenia. Okazuje się, że zaproponowany nowatorski sposób bardzo dobrze się sprawdza w praktyce numerycznej.

Ze względu na fakt, że firmy ubezpieczeniowo-finansowe dysponują dużymi kapitałami, wyjątkowo wartościowa wydaje się wiedza o wyborze optymalnej strategii dla  $x \rightarrow \infty$ . W twierdzeniu 1 pokazujemy, że przy powyższych założeniach optymalna intensywność wypłat dywidend  $c^*$  zależy liniowo od obecnego stanu rezerw, tzn.:

$$c^*(x) \sim \frac{\beta}{1 - \alpha} x,$$

gdzie  $\sim$  oznacza asymptotyczną równoważność.

Praca jest zbudowana w następujący sposób. W paragrafie 2 wyprowadzamy równanie różniczkowe Hamiltona-Bellmana-Jacobiego. Następnie w paragrafie 3 analizujemy asymptotycznie optymalną strategię dla dużego kapitału. W paragrafie 4 zajmujemy się analizą numeryczną, kiedy roszczenia mają wykładniczy rozkład. W podsumowaniu przedstawiamy dalsze możliwe kierunki badań zdemontowanego modelu.

## 2. Równanie HJB dla erlangowskiego rozkładu roszczeń

ZałóŜmy teraz, Ŝe wielkość szkód jest modelowana rozkładem Erlanga, tzn.  $Y_i \stackrel{\mathcal{D}}{=} \text{Erlang}(k, \xi)$ . Wówczas, posługując się klasycznym podejściem weryfikacyjnym (por. Hubalek, Schachermayer, 2004), gdzie zostały zaprezentowane wymagane szczegóły, moŜna pokazać, Ŝe optymalna funkcja celu rozwiązuje równanie Hamiltona-Jacobiego-Bellmana, które dla wyŜej sformułowanego problemu ma następującą postać:

$$-\beta v + \sup_{c \geq 0} \left\{ (\mu - c)v_x + \frac{\lambda \xi^k}{(k-1)!} \int_0^\infty [v(x-y) - v(x)] y^{k-1} e^{-\xi y} dy + U(c) \right\} = 0. \quad (6)$$

Oczywiœcie supremum w równaniu powyŜej jestosiągane, gdy

$$c^*(x) = (U')^{-1}(v_x). \quad (7)$$

Wstawiając (7) do równania (6), otrzymujemy:

$$\mu v_x - c^* v_x - \beta v + U(c^*) + \frac{\lambda \xi^k}{(k-1)!} \int_0^\infty [v(x-y) - v(x)] y^{k-1} e^{-\xi y} dy = 0,$$

co moŜna zaprezentować jako:

$$\mu v_x - c^* v_x - (\beta + \lambda)v + U(c^*) + \frac{\lambda \xi^k}{(k-1)!} \int_0^x v(x-y) y^{k-1} e^{-\xi y} dy = 0.$$

Zamiana zmiennych w całce w równaniu powyŜej prowadzi do następującego równania różniczkowo-całkowego:

$$\mu v_x - c^* v_x - (\beta + \lambda)v + U(c^*) + \frac{\lambda \xi^k e^{-\xi x}}{(k-1)!} \int_0^x v(z)(x-z)^{k-1} e^{\xi z} dz = 0. \quad (8)$$

Wynika stąd, Ŝe  $v$  jest klasy  $\mathcal{C}^2(R_{\geq 0})$ . Różniczkując powyŜsze równanie po  $x$ , otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \mu v_{xx} - c_x^* v_x - c^* v_{xx} - (\beta + \lambda)v_x + U_x(c^*) - \xi \frac{\lambda \xi^k e^{-\xi x}}{(k-1)!} \int_0^x v(z)(x-z)^{k-1} e^{\xi z} dz \\ + \frac{\lambda \xi^k e^{-\xi x}}{(k-1)!} (k-1) \int_0^x v(z)(x-z)^{k-2} e^{\xi z} dz = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Wówczas, wyliczając całkę z równania (8) i wstawiając ją do równania (9), uzyskujemy:

$$\begin{aligned} \mu v_{xx} - c_x^* v_x - c^* v_{xx} - (\beta + \lambda)v_x + U_x(c^*) + \xi(\mu v_x - c^* v_x - (\beta + \lambda)v + U(c^*)) \\ + \frac{\lambda \xi^k e^{-\xi x}}{(k-2)!} \int_0^x v(z)(x-z)^{k-2} e^{\xi z} dz = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Jeśli powtórzmy tę procedurę jeszcze  $k-1$  razy, to wyeliminujemy całkę z naszego równania i otrzymamy równanie różniczkowe w postaci:

$$\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \xi^i \left( \mu v^{(k+1-i)} - (\beta + \lambda) v^{(k-i)} - (c^* v_x)^{(k-i)} + U^{(k-i)}(c^*) \right) + \lambda \xi^k v = 0,$$

gdzie  $f^{(k)}$  oznacza  $\frac{d^k f}{dx^k}$ . Wówczas, zmieniając granice sumowania i stosując wzór Leibniza, po prostych przekształceniach otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mu v^{(k+1)} + \sum_{j=0}^{k-1} \xi^j \left( \xi \mu \binom{k}{j+1} - \binom{k}{j} (\beta + \lambda) \right) v^{(k-j)} + \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \xi^i U^{(k-i)}(c^*) \\ - \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \xi^i \sum_{l=0}^{k-i} \binom{k-i}{l} c^{*(l)} v^{(k-i-l+1)} - \xi^k \beta v = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Jest to nieliniowe równanie różniczkowe rzędu  $k+1$ . Ponieważ jak na razie trudno coś wnioskować na temat rozwiązań równania (11), w następnym paragrafie zajmujemy się szczególnym przypadkiem tego równania, mianowicie będziemy rozważać sytuację, gdy roszczenia mają rozkład wykładniczy, funkcja użyteczności jest zaś potęgową funkcją użyteczności.

### 3. Asymptotyka rozwiązań równania HJB dla wykładniczego rozkładu roszczeń

Zakładamy teraz, że roszczenia mają rozkład wykładniczy, tzn.  $Y_i \stackrel{D}{=} \text{Exp}(\xi)$ , natomiast funkcja użyteczności dana jest wzorem (5). Wówczas:

$$c^* = (U')^{-1}(v_x) = v_x^{\frac{-1}{1-\alpha}}, \quad (12)$$

równanie różniczkowe (11) przyjmuje zaś postać:

$$\mu v_{xx} + (\xi \mu - \beta - \lambda) v_x - \xi \beta v + \xi \frac{1-\alpha}{\alpha} v_x^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}} - v_x^{\frac{-1}{1-\alpha}} v_{xx} = 0, \quad (13)$$

z wyliczonym z równania (8) warunkiem początkowym

$$v(0) = \frac{\mu}{\beta + \lambda} v_x(0) + \frac{1-\alpha}{\alpha(\beta + \lambda)} v_x(0)^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}. \quad (14)$$

Jest to nieliniowe równanie różniczkowe drugiego rzędu. Stosując podstawienie Riccatiego, możemy przekształcić równanie (13) w nieliniowe równanie różniczkowe pierwszego rzędu. Niech  $v_x(x) = y(v)$ , wówczas  $v_{xx} = y_x(v) = y_v v_x = y_v y$ . Wstawiając to do równania (13), otrzymujemy:

$$\mu y_v y + (\xi \mu - \beta - \lambda) y - \xi \beta v + \xi \frac{1-\alpha}{\alpha} y^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}} - y^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}} y_v = 0. \quad (15)$$

Wyliczając  $y_v$ , dostajemy:

$$y_v = \frac{(\xi\mu - \beta - \lambda)y - \xi\beta v + \xi \frac{1-\alpha}{\alpha} y^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}}{\mu y - y^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}}. \quad (16)$$

Niestety, według wszelkich dostępnych źródeł, rozwiązanie takiego równania nie wyraża się zamkniętym wzorem algebraicznym. Możemy natomiast sformułować pewne wnioski dotyczące asymptotyki rozwiązań tego równania. Jednak zanim przejdziemy do twierdzenia będącego głównym rezultatem naszej pracy, udowodnimy następujący fakt niezbędny do przeprowadzenia dowodu twierdzenia.

**Lemat 1.** *Zachodzi następująca zbieżność:*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} v_x(x) = 0.$$

*Dowód.* Pokażemy najpierw, że  $\lim_{x \rightarrow \infty} c(x) = \infty$ . Dla dowodu nie wprost załóżmy, że istnieje  $K > 0$  takie, że dla dowolnego  $x \geq 0$  mamy  $c(x) < K$ . Jednak wówczas

$$\begin{aligned} v(x) &= \sup \mathbb{E}_x \left( \int_0^\tau e^{-\beta t} U(c_t) dt \right) \leq \mathbb{E}_x \left( \int_0^\tau e^{-\beta t} U(K) dt \right) \\ &\leq \mathbb{E}_x \left( \int_0^\infty e^{-\beta t} U(K) dt \right) \leq \frac{U(K)}{\beta} < \infty. \end{aligned}$$

To zaś oznacza, że  $v(x)$  jest ograniczone, co jest sprzeczne z (3). Zatem istotnie  $c(x) \rightarrow \infty$  przy  $x \rightarrow \infty$ . Skoro tak, to zauważmy, że z równości (7) wynika, że

$$\lim_{x \rightarrow \infty} v_x(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} U'(c^*(x)) = 0,$$

przy czym ostatnia równość wynika z warunku Inady  $\lim_{x \rightarrow \infty} U'(x) = 0$ , który narzuciliśmy na funkcję użyteczności.  $\square$

Możemy teraz sformułować główne twierdzenie podające optymalną strategię wypłat dywidend dla dużego kapitału. Będziemy pisać  $f(x) \sim g(x)$ , jeśli  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ .

**Twierdzenie 1.** *Jeżeli  $\alpha = \frac{p}{q} \in (0, 1)$ , gdzie  $p, q \in \mathbb{N}_1$ ,  $p < q$ , to asymptotyczne zachowania rozwiązania  $v(x)$  równania (13), jego pochodnej  $v_x(x)$  oraz procesu wypłat dywidend  $c(x)$ , przy  $x \rightarrow \infty$ , dane są następująco:*

$$\begin{aligned} v(x) &\sim \left( \frac{1-\alpha}{\beta} \right)^{1-\alpha} \frac{x^\alpha}{\alpha}, \\ v_x(x) &\sim \left( \frac{1-\alpha}{\beta} \right)^{1-\alpha} x^{\alpha-1}, \\ c^*(x) &\sim \frac{\beta}{1-\alpha} x. \end{aligned}$$

**Uwaga 1.** Zauważmy, że założenie, że  $\alpha$  jest wymierna, nie jest szczególnie restrykcyjne, ponieważ zbiór liczb wymiernych w zupełności wystarczy do modelowania różnych kształtów krzywej użyteczności.

*Dowód.* Gdy  $\alpha = \frac{p}{q}$ , to wówczas równanie (15) jest postaci:

$$\mu y_v y + (\xi \mu - \beta - \lambda) y - \xi \beta v + \xi \frac{q-p}{p} y^{\frac{p}{p-q}} - y^{\frac{p}{p-q}} y_v = 0.$$

Jeśli wykonamy podstawienie  $z = y^{\frac{1}{p-q}}$ , wówczas  $z_v = \frac{1}{p-q} y_v z z^{q-p}$ . Wstawiając to do równania powyżej, otrzymujemy:

$$(\xi \mu - \beta - \lambda) z - \xi \beta v z^{q-p+1} + \xi \frac{q-p}{p} z^{q+1} - z_v (q-p) (\mu z^{p-q} - z^p) = 0.$$

Mnożąc obustronnie przez  $z^{q-p}$ , uzyskujemy:

$$(\xi \mu - \beta - \lambda) z^{q-p+1} - \xi \beta v z^{2q-2p+1} + \xi \frac{q-p}{p} z^{2q-p+1} - (q-p) \mu z_v - (p-q) z^q z_v = 0. \quad (17)$$

Jest to równanie w postaci:

$$P(v, z) - z_v Q(v, z) = 0, \quad (18)$$

gdzie  $P, Q$  są wielomianami ze względu na  $z$ . Każdy składnik lewej strony tego równania przyjmuje jedną z dwóch postaci: albo  $z^m a_m(v)$ , albo  $z_v z^n a_n(v)$ . V. Marić w swojej pracy (1972) udowodnił, że w sytuacji gdy  $m, n$  są całkowite oraz  $a_m, a_n \in \mathcal{H}$  (gdzie  $\mathcal{H}$  oznacza klasę funkcji Hardy'ego<sup>2</sup>), to wówczas zbiór wszystkich składników lewej strony równania

$$P(v, z) - z_v Q(v, z) = 0$$

jest uporządkowany względem relacji  $\succeq$ , przy czym  $a \succeq b$  przy  $v \rightarrow \infty$  oznacza, że albo  $\frac{a}{b} \rightarrow \infty$ , albo  $\frac{a}{b} \rightarrow l (\neq 0)$  przy  $v \rightarrow \infty$ . Co więcej, V. Marić udowodnił, że w zbiorze tym istnieją dwa elementy tego samego rzędu, tzn. których stosunek dąży do pewnej granicy  $l \neq 0$  przy  $v \rightarrow \infty$ , co pozwala wyznaczyć asymptotyczne zachowanie rozwiązania równania typu  $P(v, z) - z_v Q(v, z) = 0$ , gdy  $v \rightarrow \infty$ .

Zauważmy, że ponieważ  $y \rightarrow 0$  przy  $v \rightarrow \infty$  oraz  $p < q$ , zatem  $z \rightarrow \infty$ . Łatwo zatem zauważyć, że w równaniu (17) składnik  $(q-p) \mu z_v$  jest niższego rzędu

<sup>2</sup> Funkcją logarytmiczno-wykładniczą Hardy'ego nazywamy funkcję rzeczywistą jednej zmiennej, określoną dla wszystkich wartości  $x$  większych od pewnej ustalonej wartości, zdefiniowaną jako skończona kombinacja symboli operacji algebraicznych  $(+, -, \cdot, \div, \sqrt{\phantom{x}}, (\dots)^n)$  oraz symboli funkcji  $\ln(\dots)$  oraz  $e^{(\dots)}$ , określonych na zmiennej  $x$  lub rzeczywistych stałych (por. Hardy, 1910).

niż drugi składnik zawierający  $z_v$ . Podobnie składnik  $(\xi\mu - \beta - \lambda)z^{q-p+1}$  jest niższego rzędu niż pozostałe dwa niezawierające  $z_v$ . Zatem asymptotyki rozwiązań będziemy poszukiwać pomiędzy dwuelementowymi kombinacjami każdego z trzech pozostałych składników, tzn. możemy wyróżnić trzy przypadki, które mogą wyznaczyć nam asymptotykę rozwiązań:

- a)  $\xi\beta v z^{2q-2p+1}$  oraz  $\xi \frac{q-p}{p} z^{2q-p+1}$ ,
- b)  $\xi \frac{q-p}{p} z^{2q-p+1}$  oraz  $(p-q) z^q z_v$ ,
- c)  $\xi\beta v z^{2q-2p+1}$  oraz  $(q-p) z^q z_v$ .

Rozważymy teraz kolejno każdy z przypadków. W sytuacji a), skoro oba składniki są tego samego rzędu, mamy:

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\xi\beta v z^{2q-2p+1}}{\xi \frac{q-p}{p} z^{2q-p+1}} = l (\neq 0),$$

co oznacza, że zachowanie asymptotyczne  $z$  dane jest następująco:

$$z(v) \sim \left( \frac{\beta p}{l(q-p)} \right)^{\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{p}}.$$

Wstawiając powyższe wyrażenie asymptotyczne do równania (17) i dzieląc obustronnie równanie przez  $v^{\frac{2q-p+1}{p}}$ , otrzymujemy, że  $l = 1$ . Otrzymujemy więc ostatecznie następujące przedstawienie asymptotyczne  $z$ :

$$z(v) \sim \left( \frac{\beta p}{q-p} \right)^{\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{p}}. \quad (19)$$

Oczywiście w powyższym przypadku  $z \rightarrow \infty$ , gdy  $v \rightarrow \infty$ , czego wymagaliśmy od funkcji  $z$ .

Prześledźmy teraz przypadek b). Wówczas, podobnie jak wyżej:

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{(p-q) z^q z_v}{\xi \frac{q-p}{p} z^{2q-p+1}} = l (\neq 0),$$

co sprowadza się do równania różniczkowego:

$$-z^{p-q-1} z_v = \frac{l\xi}{p},$$

które jest równaniem o zmiennych rozdzielonych. Rozwiązując to równanie, otrzymujemy wyrażenie asymptotyczne dla  $z$  w postaci:

$$z(v) \sim \left( \frac{l\xi(q-p)}{p} \right)^{\frac{1}{p-q}} (v+c)^{\frac{1}{p-q}}.$$



Jednakże  $p - q < 0$ , zatem w powyższym równaniu  $z \rightarrow 0$ , gdy  $v \rightarrow \infty$ , co daje nam sprzeczność z założeniem  $z \rightarrow \infty$  przy  $v \rightarrow \infty$ .

W przypadku c) mamy:

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{(q-p)z^q z_v}{\xi \beta v z^{2q-2p+1}} = l (\neq 0),$$

co sprowadza się do równania różniczkowego:

$$z^{2p-q-1} z_v = \frac{l \xi \beta}{q-p} v.$$

Ponownie jest to równanie różniczkowe o zmiennych rozdzielonych. Rozwiązując je, otrzymujemy wyrażenie asymptotyczne dla  $z$ . Jednak możemy tutaj wyróżnić dwa przypadki:

I. Jeśli  $q \neq 2p$ , to

$$z(v) \sim \left( \frac{l \xi \beta (2p-q)}{q-p} \right)^{\frac{1}{2p-q}} \left( \frac{v^2}{2} + c \right)^{\frac{1}{2p-q}}.$$

II. Jeśli  $q = 2p$ , to

$$z(v) \sim e^{\frac{l \xi \beta}{p} \left( \frac{v^2}{2} + c \right)}.$$

Zauważmy, że w przypadku I przedstawienie asymptotyczne  $z$  ma sens tylko, gdy  $q < 2p$ , bo w przeciwnym wypadku  $z \rightarrow 0$  przy  $v \rightarrow \infty$  i otrzymujemy sprzeczność.

Zarówno w przypadku I, jak i II po wstawieniu wyrażenia asymptotycznego dla  $z$  do równania (17) okazuje się, że składnik powstały ze wstawienia do  $\xi \frac{q-p}{p} z^{2q-p+1}$  przedstawienia asymptotycznego  $z$  jest największy względem relacji  $\succeq$ , tzn. granica ilorazu  $\xi \frac{q-p}{p} z^{2q-p+1}$  przez dowolny inny składnik lewej strony równania (17) dąży do nieskończoności przy  $v \rightarrow \infty$ . Wówczas, dzieląc równanie (17) przez ten największy składnik, otrzymujemy sprzeczność  $1 = 0$ .

Po przeanalizowaniu wszystkich przypadków otrzymujemy więc, że zachowanie asymptotyczne  $z$  dane jest równaniem (19). Przypomnijmy, że  $y = z^{p-q}$ , zatem wyrażenie asymptotyczne dla  $y(v)$  ma postać:

$$y(v) \sim \left( \frac{\beta p}{q-p} \right)^{\frac{p-q}{p}} v^{\frac{p-q}{p}},$$

co po powrocie do stałej  $\alpha$  daje nam:

$$y(v) \sim \left( \frac{1-\alpha}{\alpha \beta} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} v^{\frac{-(1-\alpha)}{\alpha}}.$$

Wykonaliśmy wcześniej podstawienie  $y(v) = v_x(x)$ , dlatego mamy tu do czynienia z równaniem różniczkowym w postaci:

$$v_x(x) = \left( \frac{1 - \alpha}{\alpha\beta} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} v(x)^{\frac{-(1-\alpha)}{\alpha}}.$$

Jest to równanie różniczkowe o zmiennych rozdzielonych. Rozwiązując je, otrzymujemy wyrażenie asymptotyczne dla  $v(x)$ :

$$v(x) \sim \left( \frac{1 - \alpha}{\beta} \right)^{1-\alpha} \frac{x^\alpha}{\alpha}.$$

Różniczkując wyrażenie asymptotyczne powyżej względem  $x$ , otrzymujemy przedstawienie asymptotyczne  $v_x(x)$ :

$$v_x(x) \sim \left( \frac{1 - \alpha}{\beta} \right)^{1-\alpha} x^{\alpha-1},$$

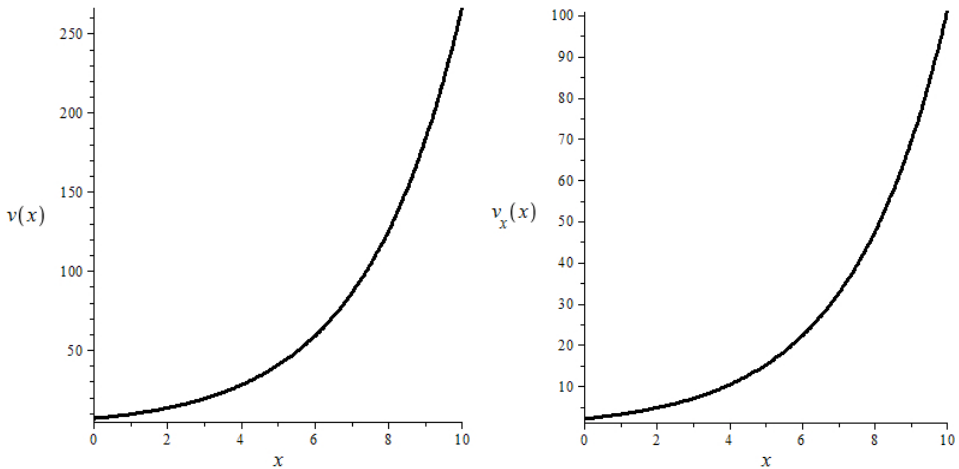
natomiast korzystając z równości (12), uzyskujemy zachowanie asymptotyczne dla  $c^*(x)$ . □

#### 4. Analiza numeryczna dla wykładniczego rozkładu roszczeń

Zajmiemy się teraz analizą numeryczną w przypadku, gdy roszczenia mają rozkład wykładniczy z parametrem  $\xi$ . Będziemy szukać rozwiązania numerycznego równania (13). Zauważmy, że do uzyskania rozwiązania numerycznego potrzebujemy warunku początkowego na  $v(0)$  oraz  $v_x(0)$ . Równość (14) daje nam warunek na obliczanie  $v(0)$  w zależności od wartości  $v_x(0)$ . Należy więc wyznaczyć jeszcze wartość  $v_x(0)$ .

Okazuje się, że wybór  $v_x(0)$  jest bardzo istotny dla samego zagadnienia optymalności rozwiązania równania HJB. Istotnie, jeśli wybierzemy  $v_x(0)$  za duże, jak na rysunku 1, to wówczas  $v(x)$  oraz  $v_x(x)$  dążą do nieskończoności, gdy  $x \rightarrow \infty$ . Jednak wtedy, ze względu na zależność (12), dywidendy dążą do zera (por. tabela 1). Sytuacja ta odpowiada ekonomicznemu pojęciu bańki finansowej – rosnąca wartość firmy nie jest materializowana w wypłatach dywidend. Dlatego w takiej sytuacji nie możemy mówić o optymalnym rozwiązaniu.

**Rysunek 1. Funkcje  $v(x)$  oraz  $v_x(x)$  dla  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 0.05$ ,  $\mu = 0.26$ ,  
 $\xi = 0.4$ ,  $\lambda = 0.1$  oraz  $v_x(0) = 1.9$ ,  $v(0) = 6.8021$**



(a) Funkcja  $v(x)$

(b) Funkcja  $v_x(x)$

Źródło: opracowanie własne.

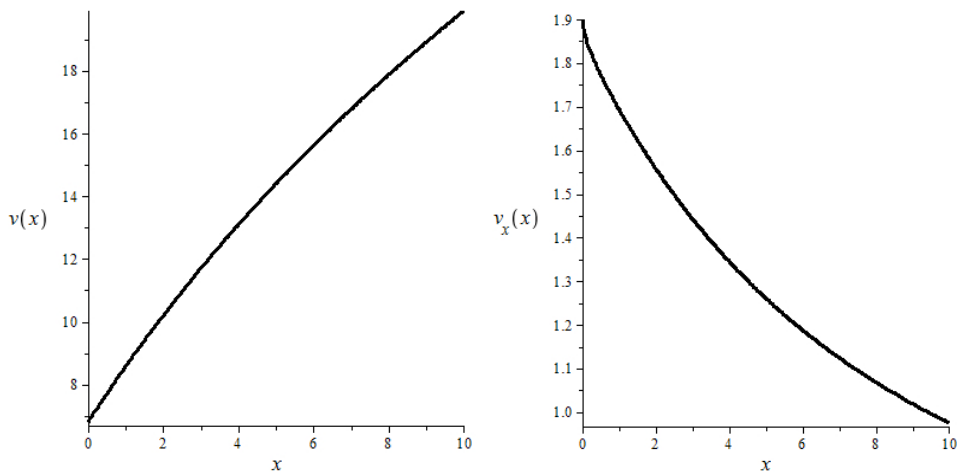
W sytuacji, gdy  $v_x(0)$  jest odpowiednio mniejsze, jak na rysunku 2, funkcja  $v(x)$  jest wklęsła,  $v_x(x)$  zaś dąży do 0, gdy  $x \rightarrow \infty$ , pozwalając na wzrost dywidend (por. tabela 2). Jest to więc sytuacja nam odpowiadająca.

**Tabela 1. Funkcje  $v(x)$ ,  $v_x(x)$  oraz  $c(x)$  dla  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 0.05$ ,  
 $\mu = 0.26$ ,  $\xi = 0.4$ ,  $\lambda = 0.1$  oraz  $v_x(0) = 2$ ,  $v(0) = 6.8$**

$x$	$v(x)$	$v_x(x)$	$c(x)$
0	6,8000	2,0000	0,2500
1	9,4022	3,1941	0,0980
2	13,3275	4,7502	0,0443
3	19,1343	7,0039	0,0204
4	27,6771	10,2878	0,0094
5	40,2103	15,0801	0,0044
6	58,5692	22,0787	0,0021
7	85,4378	32,3029	0,0010
8	124,7394	47,2425	0,0004
9	182,2094	69,0750	0,0002
10	266,2320	100,9833	0,0001

Źródło: opracowanie własne.

**Rysunek 2.** Funkcje  $v(x)$  oraz  $v_x(x)$  dla  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 0.05$ ,  $\mu = 0.26$ ,  
 $\xi = 0.4$ ,  $\lambda = 0.1$  oraz  $v_x(0) = 1.9$ ,  $v(0) = 6.8021$



(a) Funkcja  $v(x)$

(b) Funkcja  $v_x(x)$

Źródło: opracowanie własne.

**Tabela 2.** Funkcje  $v(x)$ ,  $v_x(x)$  oraz  $c(x)$  dla  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 0.05$ ,  
 $\mu = 0.26$ ,  $\xi = 0.4$ ,  $\lambda = 0.1$  oraz  $v_x(0) = 1.9$ ,  $v(0) = 6.8021$

$x$	$v(x)$	$v_x(x)$	$c(x)$
0	6,8021	1,9000	0,2770
1	8,5790	1,6929	0,3489
2	10,2022	1,5575	0,4122
3	11,7010	1,4431	0,4802
4	13,0940	1,3454	0,5525
5	14,3963	1,2613	0,6286
6	15,6203	1,1884	0,7081
7	16,7762	1,1247	0,7905
8	17,8723	1,0687	0,8755
9	18,9158	1,0192	0,9626
10	19,9126	0,9752	1,0515

Źródło: opracowanie własne.

Widać więc, że wybór odpowiedniej wartości  $v_x(0)$  jest bardzo istotny dla zagadnienia optymalności rozwiązania równania (13). Poniżej proponujemy pewną procedurę wyznaczania  $v_x(0)$ , która opiera się na znajomości zachowania asymptotycznego rozwiązań równania (13) udowodnionego w twierdzeniu 1. Aby znaleźć  $v_x(0)$ , należy:

- zadać wartość początkową  $v_x(0) =: b$ ,

- z warunku:

$$v(0) = \frac{\mu}{\beta + \lambda} v_x(0) + \frac{1 - \alpha}{\alpha(\beta + \lambda)} v_x(0)^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}$$

wyznaczyć wartość początkową  $v(0) =: a$ ,

- rozwiązać numerycznie, przy zadanych warunkach początkowych, równanie różniczkowe:

$$\mu v_{xx} + (\xi\mu - \beta - \lambda)v_x - \xi\beta v + \xi \frac{1 - \alpha}{\alpha} v_x^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}} - v_x^{\frac{-1}{1-\alpha}} v_{xx} = 0,$$

- wyznaczyć  $c(x)$  ze wzoru  $c(x) = v_x(x)^{\frac{-1}{1-\alpha}}$ ,
- metodą najmniejszych kwadratów dopasować do  $c(x)$  funkcję liniową  $\hat{c}(x) = a_1x + b_1$ ,
- wyznaczyć  $X(t)$ , rozwiązując zagadnienie początkowe:

$$\mu - \hat{c}(X(t)) = X'(t), \quad X(0) = 0, \quad (20)$$

czyli

$$X(t) = \frac{\mu - b_1}{a_1} - \frac{\mu - b_1}{a_1} e^{-a_1 t},$$

- metodą najmniejszych kwadratów dopasować do  $v(x)$  funkcję postaci  $\hat{v}(x) = a_2x^\alpha + b_2$ ,
- wyznaczyć  $A := v(0)$  ze wzoru:

$$A = v(0) = \mathbb{E} \left[ e^{-\beta S} \hat{v}(X(S) - T) \right] + \mathbb{E} \left[ \int_0^S e^{-\beta s} U(\hat{c}(X(s))) ds \right], \quad (21)$$

gdzie  $S \sim Exp(\lambda)$ ,  $T \sim Exp(\xi)$ ,

- wyznaczyć różnicę  $a - A$ , będącą błędem procedury.

Oczywiście będziemy szukać takiego  $b$ , aby  $|a - A| < \epsilon$  dla pewnego  $\epsilon > 0$ .

Warto zaznaczyć, że metoda najmniejszych kwadratów wykorzystana w powyższej procedurze opiera się na punktach, w których wcześniej numerycznie obliczono wartości  $c(x)$  i  $v(x)$ .

Równanie (20) opisuje deterministyczną trajektorię  $X(t)$  sterowanego procesu (2) startującego z zera do czasu pojawienia się pierwszego rozszczenia. Podobnie równanie (21) jest konsekwencją obserwacji procesu sterowanego zaraz po pierwszym skoku. Oczywiście jest tylko jedna poszukiwana wartość  $v(0)$ , która jest w otoczeniu epsilonowym  $a$  po zakończeniu powyższej procedury.

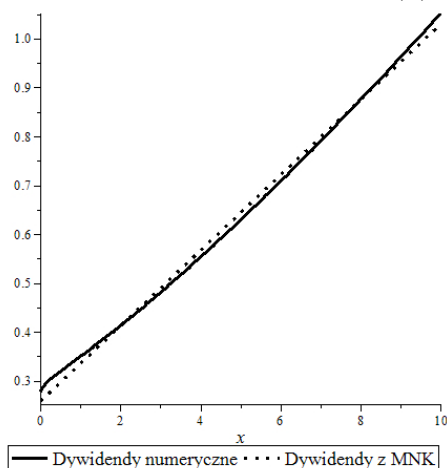
Prześledzimy teraz zastosowanie naszej procedury do użytych już wcześniej danych, na podstawie których sporządzono rysunek 2. Na rysunku 3 przedstawiono funkcję  $\hat{c}(x)$  dopasowaną do funkcji  $c(x)$  wyznaczonej na podstawie rozwiązania numerycznego równania (13), a także trajektorię  $X(t)$ . Widać, że dopasowanie funkcji  $\hat{c}(x)$  do funkcji  $c(x)$  jest dobre, mimo że do procedury MNK

użyto zaledwie 10 punktów. Na rysunku 4 została przedstawiona funkcja  $\hat{v}(x)$  dopasowana do funkcji  $v(x)$  wyznaczonej na podstawie rozwiązania numerycznego równania (13). Słabe dopasowanie wynika tutaj ze wspomnianej małej liczby punktów użytych w metodzie MNK. Przy większej ich liczbie dopasowanie jest znacznie lepsze, jednak rysunki stają się mało czytelne. Również w przypadku samej funkcji wartości otrzymujemy potwierdzenie zachowania asymptotycznego rozwiązań równania (13) wyznaczonego w twierdzeniu 1.

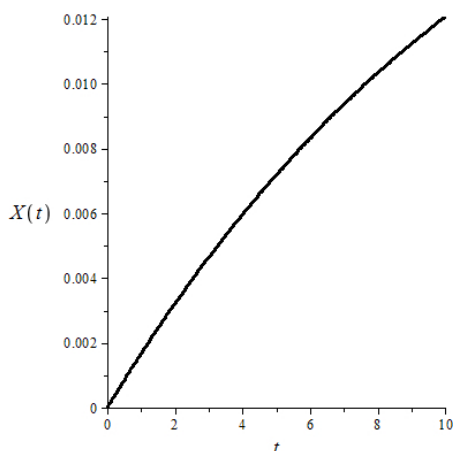
W tabeli 3 przedstawiono natomiast wartości parametrów początkowych uzyskane zaproponowaną wyżej procedurą wyznaczania  $v_x(0)$ . Widzimy, że początkowy błąd dla wartości początkowej  $v_x(0) = 1,9$  wynosił blisko 0,0077. Dzięki zastosowaniu tej procedury udało nam się ten błąd zminimalizować do około 0,0058 dla  $v_x(0) = 1,88185035$ , przy czym procedura została zatrzymana już po kilku krokach. Można by więc uzyskać mniejszą wartość błędu. Jednak tak naprawdę, aby znaleźć właściwą wartość warunku początkowego  $v_x(0)$ , należałoby zastosować tę procedurę dla całej półprostej dodatniej, co niewątpliwie jest dużym utrudnieniem.

Warto zaznaczyć, że zaproponowany przez nas algorytm wyznaczania wartości parametrów początkowych opiera się na metodzie prób i błędów. Zagadnienia zbieżności algorytmu do odpowiedniej postaci funkcji  $v(x)$  oraz optymalnego wyboru zakresu wartości początkowych w kolejnych krokach, tak aby zbieżność algorytmu była jak najszybsza, stanowią ciekawy, bardzo ważny, ale również trudny problem. Dlatego analizę tego zagadnienia pozostawiamy na przyszłość.

**Rysunek 3. Funkcje  $c(x)$ ,  $\hat{c}(x)$  oraz proces  $X(t)$  dla parametrów  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 0.05$ ,  $\mu = 0.26$ ,  $\xi = 0.4$ ,  $\lambda = 0.1$  oraz  $v_x(0) = 1.9$ ,  $v(0) = 6.8021$**



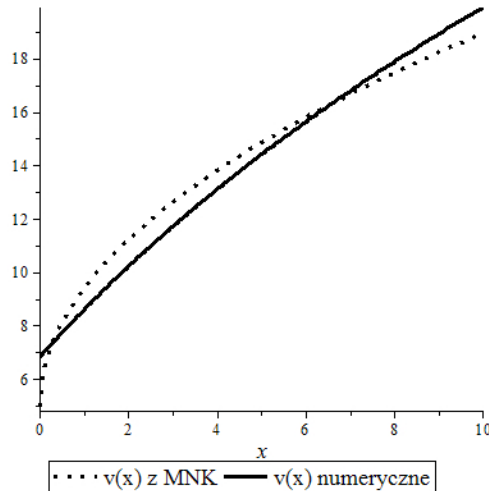
(a) Funkcje  $c(x)$  oraz  $\hat{c}(x)$



(b) Proces  $X(t)$

Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 4. Funkcje  $v(x)$  oraz  $\hat{v}(x)$  dla parametrów  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 0.05$ ,  $\mu = 0.26$ ,  $\xi = 0.4$ ,  $\lambda = 0.1$  oraz  $v_x(0) = 1.9$ ,  $v(0) = 6.8021$



Źródło: opracowanie własne.

Tabela 3. Wartości parametrów początkowych otrzymane za pomocą procedury wyznaczania  $v_x(0)$

$b$	$a$	$A$	$a - A$
1,9	6,802105263	6,794392618	0,007712645
1,89	6,803336861	6,796662198	0,006674663
1,882	6,804464186	6,798652236	0,005811950
1,8819	6,804479085	6,798679195	0,005799890
1,88186	6,804485051	6,798690050	0,005795001
1,881851	6,804486392	6,798692504	0,005793888
1,8818504	6,804486482	6,798692667	0,005793815
1,88185035	6,804486489	6,798692681	0,005793808

Źródło: opracowanie własne.

## 5. Podsumowanie

W pracy tej zajmowaliśmy się problemem znalezienia optymalnej strategii wypłat dywidend, przy czym w odróżnieniu od klasycznego modelu, w którym funkcja wartości opisywała łączną zdyskontowaną sumę wypłat dywidend do momentu ruiny, maksymalizowaliśmy średnią zdyskontowaną użyteczność wypłat dywidend do momentu ruiny. Sformułowaliśmy równanie Hamiltona-Jacobiego-Bellmana w sytuacji, gdy rozkład roszczeń jest rozkładem Erlanga. Sprowadziliśmy również

to równanie z równania różniczkowo-całkowego do równania różniczkowego. Sformułowaliśmy także twierdzenie opisujące zachowanie asymptotyczne rozwiązań równania HJB w nieskończoności, w przypadku gdy rozkład roszczeń jest rozkładem wykładniczym, funkcja użyteczności jest zaś potęgową funkcją użyteczności. Wyznaczenie asymptotyki funkcji wartości pozwoliło nam również wyznaczyć asymptotykę wypłat dywidend w nieskończoności. Jest to o tyle istotne, że w przypadku firm o dużym kapitale początkowym otrzymujemy gotowy wzór na strategię wypłat dywidend, mianowicie dywidendy należy wypłacać liniowo. Przedstawiliśmy również analizę numeryczną dotyczącą wspomnianego wyżej przypadku wykładniczych roszczeń i potęgowej funkcji użyteczności. Zajęliśmy się bardzo istotnym problemem znajdowania odpowiedniej wartości warunków początkowych, proponując procedurę ich wyznaczania. W przyszłości planujemy zająć się również problemem optymalizacji oczekiwanej użyteczności wypłat dywidend w przypadku innych rozkładów roszczeń i funkcji użyteczności.

## Bibliografia

- [1] De Finetti B. (1957), *Su un'ipotesi alternativa della teoria collettiva del rischio*, Trans. XV Intern. Congress Act. 2, s. 433–443.
- [2] Hardy G.H. (1910), *Orders of infinity*, University Press, Cambridge.
- [3] Hubalek F. (2004), Schachermayer W. (2004), *Optimizing expected utility of dividend payments for a Brownian risk process and a peculiar nonlinear ODE*, „Insurance: Mathematics and Economics”, vol. 34, s. 193–225.
- [4] Marić V. (1972), *Asymptotic behavior of solutions of nonlinear differential equation of the first order*, „Journal of Mathematical Analysis and Applications”, vol. 38(1), s. 187–192.

\*\*\*

## The problem of optimizing expected utility of dividend payments for a Cramér-Lunberg risk process

### Abstract

*In this paper we consider the problem of maximizing the expected discounted utility of dividend payments of an insurance company whose reserves are modeled as a classical Cramér-Lunberg risk process. In the beginning we allow claims to be Erlang and the utility to satisfy the Inada conditions. We derive classical so-called Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) equation for this case. Afterwards we focus on the exponential claims and power utility function. Finally we analyze asymptotic behaviour of the value function and identify the asymptotic optimal strategy. We also give the numerical procedure of finding considered value function.*



**Autorzy:**

Sebastian Baran, Instytut Matematyki, Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Jagielloński, ul. Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków,  
e-mail: sebastianbaran13@gmail.com

Zbigniew Palmowski, Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski, pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław,  
email: zbigniew.palmowski@gmail.com