Marek Kałuszka[1], Wioletta Szeligowska[2]

O modelu awersji do ryzyka Arrowa-Pratta dla uogólnionej całki Choqueta[3]

1. Wstęp

Niech $(\Omega, \mathcal{F})$ będzie przestrzenią mierzalną, gdzie $\mathcal{F}$ jest σ-ciałem podzbiorów niepustego zbioru Ω.

Definicja 1.1. Pseudomiarą (*capacity* lub miarą monotoniczną) na $\mathcal{F}$ nazywamy funkcję zbioru $\mu : \mathcal{F} \to [0,1]$ taką, że $\mu(\varnothing) = 0$, $\mu(\Omega) = 1$ oraz $\mu(A) \le \mu(B)$ dla $A \subset B$.

Przyjmujemy, że $\bar{\mu}(A) = 1 - \mu(A^c)$, gdzie $A^c = \Omega \setminus A$ dla dowolnego $A \in \mathcal{F}$. Pojęcie pseudomiary zostało wprowadzone przez Gustava Choqueta w 1950 r. Odgrywa ono znaczącą rolę w teorii zbiorów rozmytych, teorii gier, teorii Dempstera-Shafera i wielu innych[4].

Definicja 1.2. Uogólniona całka Choqueta dla pseudomiar μ i ν oraz zmiennej losowej X jest dana wzorem:

$$C_{\mu\nu}(X) = \int_0^{\infty} \mu(X > t)\,dt - \int_{-\infty}^{0} \nu(X \le t)\,dt,$$

o ile przynajmniej jedna z powyższych całek Riemanna jest skończona.

Ponadto przyjmujemy oznaczenie $\mu(X \in A) = \mu(\{\omega : X(\omega) \in A\})$ dla dowolnego zbioru borelowskiego A. Uogólniona całka Choqueta dla zmiennej losowej dyskretnej została zdefiniowana przez Kahnemana i Tversky'ego do matematycznego opisu teorii skumulowanej perspektywy. Najczęściej występującymi

[1] Politechnika Łódzka, Wydział Fizyki Technicznej, Informatyki i Matematyki Stosowanej.
[2] Politechnika Łódzka, Wydział Fizyki Technicznej, Informatyki i Matematyki Stosowanej.
[3] Badania zostały sfinansowane z dotacji na zadania służące rozwojowi młodych naukowców w ramach finansowania działalności statutowej Wydziału Fizyki Technicznej, Informatyki i Matematyki Stosowanej Politechniki Łódzkiej.
[4] D. Denneberg, *Non-additive measure and integral*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1994; Z. Wang, G. Klir, *Generalized Measured Theory*, Springer, Berlin 2009.

przykładami uogólnionej całki Choqueta są całka Choqueta $C_\mu := C_{\mu\bar{\mu}}$ i symetryczna całka Choqueta $\breve{C}_\mu := C_{\mu\mu}$, zwana także całką Šiposa[5]. Co więcej, uogólniona całka Choqueta jest uogólnieniem wartości oczekiwanej. Jeśli w definicji uogólnionej całki Choqueta (definicja 1.2) przyjmiemy $\mu = \nu = P$, gdzie P jest miarą probabilistyczną, to $C_{\mu\nu}(X) = EX$. Okazuje się, że uogólniona całka Choqueta jest funkcjonałem monotonicznym i dodatnio jednorodnym[6]. Natomiast nie jest ujemnie jednorodna.

Twierdzenie 1.1. (Nierówność Jensena) Niech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną oraz X zmienną losową określoną na tej przestrzeni. Załóżmy, że $E|X| < \infty$. Jeśli funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest wklęsła, to $Ef(X) \le f(EX)$.

Nierówność Jensena jest niezwykle ważnym wynikiem w teorii miary, mającym szerokie zastosowanie w teorii prawdopodobieństwa, statystyce i innych dziedzinach matematyki. Warto zwrócić uwagę, że podając nierówność Jensena (twierdzenie 1.1), pomijamy zbędne, a często przyjmowane założenie $E|f(X)| < \infty$.

Nierówność Jensena została rozszerzona na wiele sposobów, między innymi przy dodatkowych założeniach na funkcję f, jak również dla całek innych niż wartość oczekiwana[7]. O ile nam wiadomo, nierówność Jensena dla uogólnionej całki Choqueta nie była dotąd rozważana.

---

[5] D. Denneberg, op.cit.; M. Grabisch, J.L. Marichal, R. Mesiar, E. Pap, *Aggregation Functions*, „Encyclopedia of Mathematics and Its Applications", Cambridge University Press, Cambridge 2009, vol. 127; Z. Wang, G. Klir, op.cit.

[6] W. Szeligowska, M. Kałuszka, *On Jensen's inequality for generalized Choquet integral with an application to risk aversion*, arXiv: 1609.00554, 2016.

[7] B. Girotto, S. Holtzer, *Chebyshev and Jensen inequalities for Choquet integral*, „Mathematica Pannonica" 2012, vol. 23, s. 267–275; M. Kałuszka, A. Okolewski, M. Boczek, *On the Jensen type inequality for generalized Sugeno integral*, „Information Sciences" 2014, vol. 266, s. 140–147; M.A. Khan, G.A. Khan, T. Ali, A. Kilicman, *On the refinement of Jensen's inequality*, „Applied Mathematics and Computation" 2015, vol. 262, s. 128–135; D. Mitrinović, *Classical and New Inequalities in Analysis*, Springer, Berlin 1992; C.P. Niculescu, L.E. Persson, *Convex functions and their applications*, Springer Science, New York 2006; E. Pap, M. Štrboja, *Generalization of the Jensen inequality for pseudointegral*, „Information Sciences" 2010, vol. 180, s. 543–548; J.E. Pečarić, F. Proschan, J.L. Tong, *Convex Function, Partial Ordering and Statistical Applications*, Academic Press, New York 1991; H. Román-Flores, A. Flores-Franulič, Y. Chalco-Cano, *A Jensen type inequality for fuzzy integrals*, „Information Sciences" 2007, vol. 177, s. 3192–3201; M. Štrboja, T. Grbić, I. Štajner-Papuga, G. Grujić, S. Medić, *Jensen and Chebyshev inequalities for pseudo-integrals of set-valued functions*, „Fuzzy Sets and Systems" 2013, vol. 222, s. 18–32.

2. Nierówność Jensena dla uogólnonej całki Choqueta

Przez $I = (\alpha, \beta)$ oznaczamy dowolny otwarty przedział zawierający 0, ograniczony lub nie. Ponadto $L^I_{\mu\nu}$ oznacza zbiór takich funkcji mierzalnych $X : \Omega \to I$, że $C_{\mu\nu}(X) \in I$. Jeśli $I = \mathbb{R}$, to piszemy $L_{\mu\nu}$ zamiast $L^{\mathbb{R}}_{\mu\nu}$. Połóżmy $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0]$ oraz $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$.

Powiemy, że dla pseudomiar μ, ν i funkcji mierzalnej $f : I \to \mathbb{R}$ zachodzi nierówność Jensena, jeśli dla dowolnej zmiennej losowej $X \in L^I_{\mu\nu}$

$$C_{\mu\nu}(f(X)) \le f(C_{\mu\nu}(X)). \tag{1}$$

Przez $intf(I)$ oznaczamy wnętrze obrazu $f(I)$, zaś $f(x+)$ i $f(x-)$ jest, odpowiednio, prawo- i lewostronną granicą funkcji *f* w punkcie *x*. Gdy $0 \in intf(I)$, połóżmy $f^{-1}(0) = min\{x \in I : f(x) = 0\}$. Piszemy $\mu \le \bar{\nu}$, jeśli $\mu(A) \le \bar{\nu}(A)$ dla dowolnego zbioru mierzalnego A.

Twierdzenie 2.1. Niech μ, ν będą dowolnymi pseudomiarami i $f : I \to \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją niemalejącą i wklęsłą. Niech $0 \in intf(I)$. Nierówność Jensena (1) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest jeden z następujących warunków:
(i) $f^{-1}(0) = 0$;
(ii) $f^{-1}(0) < 0$ i $\mu \le \bar{\nu}$;
(iii) $f^{-1}(0) > 0$ i $\bar{\nu} \le \mu$.

Dowód. (szkic) „$\Leftarrow$" Korzystając z monotoniczności, nieujemności i ciągłości funkcji *f*, pokazujemy, że:

$$\int_0^\infty \mu(f(X) > t)\,dt = \int_{I_1} \mu(f(X) > f(s))\,df(s), \tag{2}$$

gdzie całka po prawej stronie równości (2) oznacza całkę Lebesgue'a-Stieltjesa względem miary generowanej przez ciągłą funkcję *f* oraz $I_1 = (f^{-1}(0), \beta]$. Dla pewnego $x_1 \in (x_0, \beta]$ z monotoniczności i wklęsłości *f* oraz założenia, że $0 \in intf(I)$, zachodzą równości:

$$\int_0^\infty \mu(f(X) > t)\,dt = \int_{(x_0, x_1]} \mu(X > s)\,df(s) = \int_{I_1} \mu(X > s)\,df(s). \tag{3}$$

Przyjmując, bez straty ogólności, że nierosnąca funkcja $s \mapsto \mu(X > s)$ jest prawostronnie ciągła, otrzymujemy, że funkcja $F_+(s) = 1 - \dfrac{\mu(X > s)}{\mu(X \in I_1)}$ jest dystrybuantą prawostronnie ciągłą rozkładu prawdopodobieństwa na I_1. Ponadto, dla $s \in I_1$

$$\int_0^\infty \mu(f(X) > t)\,dt = \frac{\mu(X > s)}{\mu(X \in I_1)}.$$

Stąd oraz z (3) i z twierdzenia Fubiniego wynika, że:

$$\int_0^\infty \mu(f(X) > t)\,dt = \mu(X \in I_1)\int_{I_1} f(x)\,dF_+(x).$$

Wówczas z nierówności Jensena dla $X \in L_{\mu\nu}^{I_1}$ i z twierdzenia Fubiniego można pokazać, że:

$$\int_0^\infty \mu(f(X) > t)\,dt \le \mu(X \in I_1)\, f\left(x_0 + \frac{1}{\mu(X \in I_1)}\int_{x_0}^\infty \mu(X > s)\,ds\right). \tag{4}$$

Gdy $I_0 = [\alpha, x_0]$ i $\nu(X \in I_0) > 0$, to z monotoniczności f

$$-\int_{-\infty}^0 \nu(f(X) \le t)\,dt = -\nu(X \in I_0)\int_{I_0} F_-(s)\,df(s),$$

gdzie $F_-(s)$ jest prawostronnie ciągłą dystrybuantą rozkładu prawdopodobieństwa na I_0. Stąd

$$-\int_{-\infty}^0 \nu(f(X) \le t)\,dt = \nu(X \in I_0)\int_{I_0} f(x)\,dF_-(x).$$

Z nierówności Jensena dla $X \in L_{\mu\nu}^{I_0}$ mamy:

$$-\int_{-\infty}^0 \nu(f(X) \le t)\,dt \le \nu(X \in I_0)\, f\left(x_0 - \frac{1}{\nu(X \in I_0)}\int_{-\infty}^{x_0} \nu(X \le s)\,ds\right). \tag{5}$$

Z (4) i (5) wynika, że dla dowolnego $X \in L_{\mu\nu}^{I}$

$$C_{\mu\nu}\left(f\left(X\right)\right) \leq f\left(C_{\mu\nu}\left(X\right) + \int_{x_0}^{0}\left(\mu\left(X > s\right) - \overline{\nu}\left(X > s\right)\right)ds\right). \tag{6}$$

Z (6) otrzymujemy tezę.

„$\Rightarrow$” Ponieważ f jest wklęsła na otwartym przedziale I, więc istnieją pochodne lewostronna $f_-'\left(x\right)$ i prawostronna $f_+'\left(x\right)$ dla każdego $x \in I$. Ponadto lewostronna (prawostronna) pochodna jest funkcją lewostronnie (prawostronnie) ciągłą. Niech $x_0 < 0$ i niech $X = x_0\mathbf{1}_{A^c} + b\mathbf{1}_A$ dla $x_0 < b < 0$ i dowolnego mierzalnego zbioru A, gdzie $\mathbf{1}_A$ oznacza funkcję charakterystyczną zbioru A. Ponieważ $f\left(x_0\right) = 0 \leq f\left(b\right)$, więc nierówność (1) ma postać:

$$f\left(b\right)\mu\left(A\right) \leq f\left(x_0\nu\left(A^c\right) + b\left(1 - \nu\left(A^c\right)\right)\right). \tag{7}$$

Z wklęsłości f na I_1 i z (7) oraz przechodząc do granicy z b dążącym do x_0 dostajemy:

$$f_+'\left(x_0\right)\nu\left(A^c\right) \leq f_+'\left(x_0\right)\left(1 - \mu\left(A\right)\right).$$

Ponieważ $0 \in int\ f\left(I\right)$, zatem $f_+'\left(x_0\right) > 0$. Stąd $\mu\left(A\right) \leq 1 - \nu\left(A^c\right)$ dla dowolnego A.

Gdy $x_0 > 0$, kładziemy $X = x_0\mathbf{1}_A + b\mathbf{1}_{A^c}$ w (1), gdzie $0 < b < x_0$ i otrzymujemy nierówność:

$$f\left(b\right)\nu\left(A^c\right) \leq f\left(x_0\mu\left(A\right) + b\left(1 - \mu\left(A\right)\right)\right).$$

Powtarzając rozumowanie jak w przypadku, gdy $x_0 < 0$, dostajemy $1 - \nu\left(A^c\right) \leq$ $\leq \mu\left(A\right)$ dla dowolnego A, ponieważ $f_-'\left(x_0\right) \geq f_+'\left(x_0\right) > 0$.

Niech M_0 oznacza zbiór pseudomiar zerojedynkowych, tzn. $\mu \in M_0$, jeżeli $\mu\left(A\right) \in \left\{0, 1\right\}$ dla dowolnego zbioru mierzalnego A.

Twierdzenie 2.2. Niech $f : I \to \mathbb{R}$ będzie funkcją niemalejącą, $0 \in intf\left(I\right)$, $\mu \notin M_0$ i $\nu \notin M_0$. Niech $f^{-1}\left(0\right) = 0$. Jeżeli istnieje zbiór mierzalny S taki, że $\mu\left(S\right) > 0$ i $\nu\left(S^c\right) > 0$, to nierówność Jensena (1) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy f jest wklęsła.

Dowód. Połóżmy $x_0 = f^{-1}\left(0\right)$. Ponieważ $\mu, \nu \notin M_0$, więc istnieją zbiory mierzalne A, B takie, że $p, q \in \left(0, 1\right)$, gdzie $p = \mu\left(A\right)$ i $q = \nu\left(B^c\right)$. Ponieważ $x_0 = 0$, więc $0 \in I$. Niech $X = a\mathbf{1}_{A^c} + b\mathbf{1}_A$, gdzie $\mathbf{1}_A$ oznacza funkcję charakterystyczną zbioru A i $0 \leq a < b < \beta$. Jako że f jest niemalejąca i $f\left(0\right) = 0$ mamy:

$$C_{\mu\nu}\left(f\left(X\right)\right)=\int_{0}^{f(b)}\mu\left(f\left(X\right)>t\right)dt=f\left(a\right)\left(1-p\right)+f\left(b\right)p.$$

Oczywiście $C_{\mu\nu}\left(X\right)=a\left(1-p\right)+bp$. Z nierówności Jensena otrzymujemy:

$$f\left(a\right)\left(1-p\right)+f\left(b\right)p\le f\left(a\left(1-p\right)+bp\right)$$

dla $0\le a<b$ przy ustalonej wartości $p\in\left(0,1\right)$. Funkcja $-f$ jest -wypukła z definicji[8]. Ponieważ funkcja $-f$ jest p-wypukła, jest również J-wypukła[9], tzn.

$$-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le-\frac{f\left(a\right)+f\left(b\right)}{2}.$$

Ponieważ f jest niemalejąca, więc f jest ograniczona, a zatem $-f$ jest wypukła dla $x\in\left[0,\beta\right)$[10].

Niech $X=a\mathbf{1}_{\boldsymbol{B}^c}+b\mathbf{1}_{\boldsymbol{B}}$. Dla $\alpha<a<b\le 0$ mamy:

$$C_{\mu\nu}\left(f\left(X\right)\right)=-\int_{f(a)}^{0}\nu\left(f\left(X\right)\le t\right)dt=f\left(a\right)q+f\left(b\right)\left(1-q\right).$$

Z nierówności Jensena $f\left(a\right)q+f\left(b\right)\left(1-q\right)\le f\left(aq+b\left(1-q\right)\right)$, co oznacza, że f jest wklęsła dla $x\in\left(\alpha,0\right]$.

Gdy $a<0<b$, połóżmy $X=a\mathbf{1}_{\boldsymbol{S}^c}+b\mathbf{1}_{\boldsymbol{S}}$, $p_1=\nu\left(S^c\right)$ i $p_2=\mu\left(S\right)$. Wtedy $C_{\mu\nu}\left(f\left(X\right)\right)=f\left(a\right)p_1+f\left(b\right)p_2$, więc nierówność Jensena przyjmuje postać:

$$f\left(a\right)p_1+f\left(b\right)p_2\le f\left(ap_1+bp_2\right). \tag{8}$$

Najpierw wykażemy, że f jest ciągła w $x=0$. Istotnie, z monotoniczności i wklęsłości f na $\left(\alpha,0\right]$ wynika, że $f\left(0-\right)=f(0)$. Podstawiając $b=-\frac{ap_1}{p_2}$ w (8), otrzymujemy

$$f\left(a\right)p_1+f\left(-\frac{ap_1}{p_2}\right)p_2\le 0. \tag{9}$$

---

8 J.E. Pečarić, F. Proschan, J.L. Tong, *Convex Function, Partial Ordering and Statistical Applications*, Academic Press, New York 1991, s. 53.

9 N. Kuhn, *A note on t-convex functions*, „General inequalities", seria: Internationale Schriftenreihe zur Numerischen Mathematik 1984, vol. 71, s. 269–276; Z. Daróczy, Z. Páles, *Convexity with given infinite weight sequences*, „Stochastica" 1987, vol. 11, s. 5–12.

10 M. Kuczma, *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities. Cauchy's Equation and Jensen's Inequality*, wyd. 2, Attila Gilányi (red.), Birkhäuser 2009, s. 133.

Przechodząc do granicy w (9) przy a dążącym do 0, mamy $f(0+)p_2 \leq 0$, zatem $f(0+) = 0 = f(0)$, co dowodzi ciągłości f w $x = 0$. Ponieważ f jest wklęsła dla $x \in (\alpha, 0]$ i $x \in [0, \beta)$, to istnieją pochodne $f'_-(0)$ i $f'_+(0)$. Dzieląc obie strony (9) przez $ap_1 < 0$ i przechodząc do granicy przy a dążącym do 0, otrzymujemy nierówność $f'_-(0) \geq f'_+(0)$, więc funkcja f jest wklęsła w przedziale I. Wykazaliśmy więc, że przy założeniu $x_0 = 0$ z nierówności Jensena wynika wklęsłość funkcji f. Jeśli funkcja f jest wklęsła, $0 \in intf(I)$ i $f^{-1}(0) = 0$, to z twierdzenia 2.1 punkt (i) wynika, że zachodzi nierówność Jensena (1).

3. Klasyczny model awersji do ryzyka Arrowa-Pratta

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną. Przez $w \geq 0$ oznaczmy majątek początkowy inwestora, który narażony jest na ryzyko będące losowym przepływem pieniężnym $X : \Omega \to \mathbb{R}$ o znanym rozkładzie. Zatem X jest zmienną losową przyjmującą zarówno dodatnie, jak i ujemne wartości. Dodatnie wartości X interpretujemy jako straty, natomiast ujemne jako zyski. Gdy inwestor zdecyduje się zawrzeć polisę ubezpieczeniową za pewną składkę π i X przyjmie dodatnią wartość, to szkoda, jaką poniesie, zostanie mu zrekompensowana. Z drugiej strony, jeśli inwestor nie zdecyduje się na ubezpieczenie, to jego majątek wynosi $w - X$.

Zgodnie z teorią oczekiwanej użyteczności von Neumanna-Morgensterna, preferencje decydenta opisuje ciągła i ściśle rosnąca funkcja użyteczności $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka, że $u(0) = 0$.

Definicja 3.1. Powiemy, że inwestor jest neutralny względem ryzyka, gdy użyteczność jego majątku jest równa wartości tego majątku, tzn. jeśli jego funkcja użyteczności ma postać $u_0(x) = x$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$.

John W. Pratt[11] zaproponował, aby posłużyć się zasadą oczekiwanej użyteczności do wyznaczenia składki za ryzyko π, czyli maksymalnej kwoty, jaką inwestor jest skłonny zapłacić za przekazanie ryzyka.

Definicja 3.2. Składką za ryzyko X przy zadanym majątku $w \geq 0$ nazywamy wielkość $\pi(w, X)$, która jest rozwiązaniem równania

$$u(w - \pi(w, X)) = Eu(w - X). \tag{10}$$

[11] J.W. Pratt, *Risk aversion in the small and in the large*, „Econometrica" 1964, vol. 32, s. 122–136.

Jeśli wartość oczekiwana $Eu(w-X)$ istnieje i jest skończona, to istnieje składka $\pi(w,X)$ i jest jednoznacznie wyznaczona przez równanie (10).

Uwaga 3.1. Składka za ryzyko X inwestora neutralnego względem ryzyka jest równa wartości oczekiwanej tego ryzyka.

Definicja 3.3. Powiemy, że inwestor ma awersję do ryzyka X, jeśli jest skłonny zapłacić więcej za przekazanie ryzyka niż wartość oczekiwana tego ryzyka.

Ponadto prawdziwe jest twierdzenie:

Twierdzenie 3.1. Inwestor ma awersję do ryzyka wtedy i tylko wtedy, gdy jego funkcja użyteczności jest wklęsła.

John W. Pratt wprowadza pojęcie miary lokalnej awersji do ryzyka, zwane również współczynnikiem bezwzględnej awersji do ryzyka Arrowa-Pratta.

Definicja 3.4. Niech $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie ściśle rosnącą i dwukrotnie różniczkowalną funkcją użyteczności. Miarą lokalnej awersji do ryzyka Arrowa-Pratta nazywamy wielkość

$$r(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)}$$

dla dowolnego $w \geq 0$.

Wówczas, jak udowodnił J.W. Pratt[12], istnieją trzy równoważne sposoby na porównanie awersji do ryzyka dwóch inwestorów o tym samym majątku w, narażonych na to samo ryzyko X. Podobne wyniki niezależnie od Pratta uzyskał K.J. Arrow[13].

Twierdzenie 3.2. (Pratta) Niech u_1, $u_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będą ściśle rosnącymi, wklęsłymi i dwukrotnie różniczkowalnymi funkcjami użyteczności. Załóżmy, że r_1, r_2 są miarami lokalnej awersji do ryzyka Arrowa-Pratta odpowiadającymi tym funkcjom użyteczności, a π_1, π_2 są składkami za ryzyko wyznaczonymi z równania (10) odpowiednio przy funkcjach u_1, u_2. Następujące warunki są równoważne:

(i) $r_1(w) \geq r_2(w)$ dla dowolnego $w \geq 0$;

(ii) istnieje ściśle rosnąca i wklęsła funkcja G taka, że $u_1 = G \circ u_2$;

(iii) $\pi_1(w,X) \geq \pi_2(w,X)$ dla dowolnego $w \geq 0$ i dowolnej zmiennej losowej X takiej, że $EX = 0$.

12 Ibidem.

13 K.J. Arrow, *Essays in the Theory of Risk Bearing*, Markham Publishing Company, Chicago 1971.

4. Model Arrowa-Pratta dla uogólnionej całki Choqueta

W tym rozdziale przedstawimy uogólnienie twierdzenia 3.1 i twierdzenia 3.2 w przypadku, gdy wartość oczekiwana w modelu awersji do ryzyka jest zastąpiona przez uogólnioną całkę Choqueta.

Przez $w \geq 0$ oznaczmy majątek inwestora. Niech $(\Omega, \mathcal{F})$ będzie przestrzenią mierzalną oraz $\mu : \mathcal{F} \to [0, 1]$ i $\nu : \mathcal{F} \to [0, 1]$ będą pseudomiarami. Niech $X : \Omega \to \mathbb{R}$ będzie zmienną losową, opisującą ryzyko, na jakie narażony jest inwestor. Ponadto zakładamy, że $X \in L_{\mu\nu}$.

Załóżmy, że preferencje inwestora opisuje ściśle rosnąca i dwukrotnie różniczkowalna funkcja użyteczności $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka, że $u(0) = 0$. Przez $\pi_u(w, X)$ oznaczmy składkę za ryzyko inwestora, która została zdefiniowana[14] następująco:

Definicja 4.1. Składką za ryzyko X przy zadanym majątku $w \geq 0$ nazywamy wielkość $\pi_u(w, X)$, która jest rozwiązaniem równania:

$$u\left(w - \pi_u(w, X)\right) = C_{\mu\nu}\left(u(w - X)\right). \tag{11}$$

Ponieważ u jest ściśle rosnąca i ciągła, więc istnieje składka za ryzyko $\pi_u(w, X)$, wyznaczona jednoznacznie przez równanie (11), jeśli $w - X \in L_{\mu\nu}$.

W literaturze[15] rozważano przypadek składki π_u, gdy pseudomiary są miarami zniekształcenia Kahnemana-Tverskiego (ang. Kahneman-Tverski distorted measures). Własności składki π_u są intensywnie badane, ale problem miary awersji do ryzyka nie został jak dotąd rozwiązany.

Definicja 4.2. Powiemy, że inwestor z funkcją użyteczności $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ma awersję do ryzyka, jeśli dla dowolnego majątku $w \geq 0$ i ryzyka X takiego, że $w - X \in L_{\mu\nu}$ mamy:

$$\pi_u(w, X) \geq \pi_0(w, X) := C_{\nu\mu}(X) + \int_0^w \left(\bar{\nu}(X < s) - \mu(X < s)\right) ds,$$

gdzie $\pi_0(w, X)$ jest składką za ryzyko inwestora neutralnego względem ryzyka.

---

[14] M. Kałuszka, M. Krzeszowiec, *Mean-value principle under Cumulative Prospect Theory*, „ASTIN Bulletin" 2012, vol. 42, s. 103–122.

[15] Ibidem; M. Kałuszka, M. Krzeszowiec, *An iterativity condition for the mean-value principle under Cumulative Prospect Theory*, „ASTIN Bulletin" 2013, vol. 43, s. 61–71.

Zauważmy, że definicja 4.2 jest analogiczna do definicji 3.3 przez wzgląd na uwagę 3.1.

Twierdzenie 4.1. Jeśli $\mu,\ \nu$ są dowolnymi pseudomiarami i funkcja użyteczności inwestora jest wklęsła, to inwestor ma awersję do ryzyka. Ponadto, jeśli inwestor ma awersję do ryzyka, $\mu \notin M_0$ i $\nu \notin M_0$ oraz istnieje mierzalny zbiór S taki, że $\mu(S) > 0$ i $\nu(S^c) > 0$, to u jest wklęsła.

Dowód. Aby udowodnić pierwszą część twierdzenia, korzystamy z twierdzenia 2.1, przyjmując $f = u$ i zastępując X przez $w - X$. Wówczas otrzymujemy nierówność Jensena w postaci:

$$C_{\mu\nu}\left(u(w - X)\right) \le u\left(C_{\mu\nu}(w - X)\right) \tag{12}$$

dla dowolnego $w \ge 0$ takiego, że $w - X \in L_{\mu\nu}$. Przykładając u^{-1} do obu stron nierówności (12), otrzymujemy $\pi_u(w,X) \ge \pi_0(w,X)$.

W celu udowodnienia drugiej części twierdzenia, zauważmy, że $\pi_u(w,X) = w - u^{-1}\left(C_{\mu\nu}\left(u(w - X)\right)\right)$. Inwestor z funkcją użyteczności u ma awersję do ryzyka wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $w \ge 0$ takiego, że $w - X \in L_{\mu\nu}$ zachodzi nierówność:

$$C_{\mu\nu}\left(u(w - X)\right) \le u\left(C_{\mu\nu}(w - X)\right).$$

Kładąc $f = u$ i zastępując X przez $w - X$ w twierdzeniu 2.2 otrzymujemy wklęsłość funkcji u dla $\mu \notin M_0$, $\nu \notin M_0$ i pewnego mierzalnego zbioru S takiego, że $\mu(S) > 0$ i $\nu(S^c) > 0$.

Wniosek 4.1. Rozważmy inwestora z funkcją użyteczności u, którego składkę za ryzyko można wyznaczyć ze wzoru (11) przy $C_\mu = C_{\mu\bar{\mu}}$ i μ nie jest pseudomiarą zerojedynkową. Wówczas inwestor ma awersję do ryzyka wtedy i tylko wtedy, gdy u jest funkcją wklęsłą.

Niech $u,\ v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będą funkcjami użyteczności oraz $v(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Definicja 4.3. Powiemy, że inwestor z funkcją użyteczności u ma większą awersję do ryzyka niż inwestor z funkcją użyteczności v, jeśli dla dowolnego $w \ge 0$ takiego, że $w - X \in L_{\mu\nu}$ mamy:

$$\pi_u(X,w) \ge \pi_v(X,w).$$

Twierdzenie 4.2 jest uogólnieniem twierdzenia Pratta w przypadku, gdy μ i ν są pseudomiarami.

Twierdzenie 4.2. Załóżmy, że $\mu \notin M_0$, $\nu \notin M_0$ i istnieje mierzalny zbiór S taki, że $\mu(S) > 0$ i $\nu(S^c) > 0$. Niech r_u i r_v będą miarami awersji do ryzyka Arrowa-Pratta wyznaczonymi przez wklęsłe i dwukrotnie różniczkowalne funkcje użyteczności u, v. Następujące warunki są równoważne:

(i) inwestor z funkcją użyteczności u ma większą awersję do ryzyka niż inwestor z funkcją użyteczności v;

(ii) $u = g \circ v$ dla pewnej ściśle rosnącej i wklęsłej funkcji g;

(iii) $r_u(x) \geq r_v(x)$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$.

Dowód. (i) $\Rightarrow$ (ii): Z założenia mamy $\pi_u(w,X) \geq \pi_v(w,X)$ dla wszystkich $w - X \in L_{\mu\nu}$. Stąd:

$$C_{\mu\nu}(g(Y)) \leq g(C_{\mu\nu}(Y)),$$

gdzie $g = u \circ v^{-1}$ i $Y = v(w - X)$. Z twierdzenia 2.2 dla $f = g$ i $X = Y$ otrzymujemy wklęsłość funkcji g.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Niech $u = g \circ v$. Wówczas z wklęsłości g i twierdzenia 2.1, przyjmując $f = g$ i $X = Y$ dla dowolnego $Y \in L_{\mu\nu}$ mamy:

$$u(w - \pi_u(w,X)) = C_{\mu\nu}(g(Y)) \leq g(C_{\mu\nu}(Y)) = u(w - \pi_v(w,X)).$$

Stąd $\pi_u(w,X) \geq \pi_v(w,X)$.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii): Niech $g = u \circ v^{-1}$. Funkcja g jest ściśle rosnąca i dwukrotnie różniczkowalna, ponieważ jest złożeniem funkcji u i v^{-1}. Stąd g jest wklęsła wtedy i tylko wtedy, gdy $g''(x) \leq 0$ dla $x \in \mathbb{R}$. Ponieważ dla dowolnego x mamy:

$$g''(x) = -\frac{u'(v^{-1}(x))}{\left[v'(v^{-1}(x))\right]^2}\left(r_u(v^{-1}(x)) - r_v(v^{-1}(x))\right) \leq 0,$$

więc g jest wklęsła.

Uwaga 4.1. Rozważmy inwestora z funkcją użyteczności u, którego składkę za ryzyko można wyznaczyć ze wzoru (11) przy $C_\mu = C_{\mu\bar{\mu}}$ i μ nie jest pseudomiarą zerojedynkową. Wówczas twierdzenie 4.2 pozostanie prawdziwe, gdy pominiemy założenie o istnieniu mierzalnego zbioru S takiego, że $\mu(S) > 0$ i $v(S^c) > 0$.

Warto zauważyć, że podany wyżej dowód twierdzenia Pratta różni się od innych dowodów proponowanych w literaturze[16], gdzie przyjęto pewne dodat-

[16] H. Föllmer, A. Schied, *Stochastic Finance. An Introduction in Discrete Time*, De Gruyter, Berlin 2011; C. Munk, *Financial Asset Pricing Theory*, Oxford University Press, Oxford 2014; J.W. Pratt, op.cit.

kowe założenia, np. dotyczące ciągłości miary awersji do ryzyka Arrowa-Pratta lub ścisłej wklęsłości funkcji użyteczności.

Teorię niepewności Liu[17] w analizie awersji do ryzyka po raz pierwszy zastosowali I. Georgescu i J. Kinnunen[18] oraz J. Zhou i inni[19]. Wprowadzili oni pojęcia niepewnej oczekiwanej użyteczności (ang. *uncertain expected utility*) i niepewnej składki za ryzyko (ang. *uncertain risk premium*) oraz podali odpowiednik twierdzenia Arrowa-Pratta w teorii niepewności, używając wzoru Taylora do wyznaczenia składki za ryzyko. Twierdzenia 4.1 i 4.2 uogólniają pewne wyniki[20] na przypadek dowolnych pseudomiar. Dowody twierdzeń 4.1 i 4.2 nie odwołują się do metod heurystycznych (patrz: uwaga 4.2).

Przykład 4.1. Niech $\mu(A)=g(P(A))$ i $\nu(A)=h(P(A))$ dla dowolnego zbioru A, gdzie g, h są funkcjami zniekształcenia, tzn. $g:[0,1]\to[0,1]$ jest niemalejącą funkcją taką, że $g(0)=0$ i $g(1)=1$. Zniekształcenia miary probabilistycznej P postaci $\nu(A)=g(P(A))$ są pseudomiarami. Są one istotnym elementem teorii skumulowanej perspektywy Kahnemana-Tverskiego[21], która opisuje zachowanie inwestora na rynku finansowym z uwzględnieniem aspektów psychologicznych. Pseudomiary są również podstawowym narzędziem w wycenie ryzyka ubezpieczeniowego[22].

Z wielu badań empirycznych wynika, że g ma kształt litery S, tzn. g jest wklęsła na $[0,p]$ i wypukła na $[p,1]$ dla pewnego $p\in(0,1)$. Ponadto małe prawdopodobieństwa są zawyżane, a duże zaniżane. Funkcja h ma taki sam kształt jak g, ale nieco inne parametry. Tversky i Kahneman[23] zaproponowali funkcję zniekształcenia postaci

$$g(p)=\frac{p^{\gamma}}{\left(p^{\gamma}+(1-p)^{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}}},$$

[17] B. Liu, *Uncertainty Theory, 4th Edition*, Springer, Berlin 2015.

[18] I. Georgescu, J. Kinnunen, *A credibilistic approach to risk aversion and prudence*, „Proceedings of the Finnish Operations Research Society 40th Anniversary Workshop (FORS40) on Optimization and Decision-Making", Lappeenranta, Finland 2013, s. 72–77.

[19] J. Zhou, Y. Liu, X. Zhang, X. Gu, D. Wang, *Uncertain risk aversion*, „Journal of Intelligent Manufacturing" 2017, vol. 28, s. 615–624.

[20] I. Georgescu, J. Kinnunen, op.cit.; J. Zhou, Y. Liu, X. Zhang, X. Gu, D. Wang, op.cit.

[21] A. Tversky, D. Kahneman, *Advances in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty*, „Journal of Risk and Uncertainty" 1992, vol. 5, s. 297–323.

[22] H. Föllmer, A. Schied, *Stochastic Finance. An Introduction in Discrete Time*, De Gruyter, Berlin 2011; M. Kałuszka, M. Krzeszowiec, *Mean-value principle…*; M. Kałuszka, M. Krzeszowiec, *An iterativity condition…*

[23] A. Tversky, D. Kahneman, op.cit.

gdzie $\gamma \in (0{,}28;1)$. Empirycznie uzyskano wartości: $\gamma = 0{,}61$ dla g i $\gamma = 0{,}69$ dla h.

Uwaga 4.2. Znaczenie miary awersji do ryzyka Arrowa-Pratta r_u jest widoczne w aproksymacji składki za ryzyko. Podamy podobną aproksymację składki $\pi_u(w,X)$. Ze wzoru Taylora i (11) mamy:

$$u(w) - u'(w)\hat{\pi}_u(w,X) = C_{\mu\nu}\left(u(w) + u'(w)(-X) + \frac{1}{2}u''(w)X^2\right) =$$
$$= u(w) - u'(w)C_{\nu\mu}(Y) + \int_{-u(w)}^{0}\left(\mu(-u'(w)Y > s) - \overline{\nu}(-u'(w)Y > s)\right)ds,$$

gdzie $\hat{\pi}_u(w,X)$ oznacza przybliżenie składki $\pi_u(w,X)$ i $Y = X + r_u(w)\frac{X^2}{2}$.

Po prostych przekształceniach otrzymujemy aproksymację de Finettiego-Arrowa-Pratta:

$$\hat{\pi}_u(w,X) = C_{\nu\mu}(Y) + \int_{0}^{\frac{u(w)}{u'(w)}}\left(\overline{\nu}(Y < t) - \mu(Y < t)\right)dt. \tag{13}$$

Jeśli inwestor posługuje się całką Choqueta, tzn. $\mu = \overline{\nu}$, to:

$$\hat{\pi}_u(w,X) = C_{\overline{\mu}}(Y) \geq C_{\overline{\mu}}(X) = \pi_0(w,X).$$

Co więcej, z równości $Y = X + r_u(w)\frac{X^2}{2}$ i własności monotoniczności całki Choqueta wynika, że wzrost miary awersji do ryzyka $r_u(w)$ powoduje wzrost różnicy między składką za ryzyko $\pi_u(w,X)$ a składką inwestora neutralnego względem ryzyka. Z kolei, gdy inwestor posługuje się symetryczną całką Choqueta, tzn. $\mu = \nu$ oraz $\mu(A) + \mu(A^c) = 1$ dla dowolnego A, to otrzymujemy tę samą interpretację, czyli:

$$\hat{\pi}_u(w,X) = \breve{C}_{\mu}(Y) \geq \breve{C}_{\mu}(X) = \pi_0(w,X).$$

W pozostałych przypadkach interpretacja miary awersji do ryzyka w stosunku do aproksymacji (13) nie jest jasna.

Bibliografia

Arrow K.J., *Essays in the Theory of Risk Bearing*, Markham Publishing Company, Chicago 1971.

Daróczy Z., Páles Z., *Convexity with given infinite weight sequences*, „Stochastica" 1987, vol. 11, s. 5–12.

Denneberg D., *Non-additive measure and integral*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1994.

Föllmer H., Schied A., *Stochastic Finance. An Introduction in Discrete Time*, De Gruyter, Berlin 2011.

Georgescu I., Kinnunen J., *A credibilistic approach to risk aversion and prudence*, „Proceedings of the Finnish Operations Research Society 40th Anniversary Workshop (FORS40) on Optimization and Decision-Making", Lappeenranta, Finland 2013, s. 72–77.

Girotto B., Holtzer S., *Chebyshev and Jensen inequalities for Choquet integral*, „Mathematica Pannonica" 2012, vol. 23, s. 267–275.

Grabisch M., Marichal J.L., Mesiar R., Pap E., *Aggregation Functions*, „Encyclopedia of Mathematics and Its Applications", Cambridge University Press, Cambridge 2009, vol. 127.

Kałuszka M., Krzeszowiec M., *An iterativity condition for the mean-value principle under Cumulative Prospect Theory*, „ASTIN Bulletin" 2013, vol. 43, s. 61–71.

Kałuszka M., Krzeszowiec M., *Mean-value principle under Cumulative Prospect Theory*, „ASTIN Bulletin" 2012, vol. 42, s. 103–122.

Kałuszka M., Okolewski A., Boczek M., *On the Jensen type inequality for generalized Sugeno integral*, „Information Sciences" 2014, vol. 266, s. 140–147.

Khan M.A., Khan G.A., Ali T., Kilicman A., *On the refinement of Jensen's inequality*, „Applied Mathematics and Computation" 2015, vol. 262, s. 128–135.

Kuczma M., *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities. Cauchy's Equation and Jensen's Inequality*, wyd. 2, Attila Gilányi (red.), Birkhäuser, Basel 2009.

Kuhn N., *A note on t-convex functions*. „General inequalities", seria: Internationale Schriftenreihe zur Numerischen Mathematik 1984, vol. 71, s. 269–276.

Liu B., *Uncertainty Theory, 4th Edition*, Springer, Berlin 2015.

Mitrinović D., *Classical and New Inequalities in Analysis*, Springer, Berlin 1992.

Munk C., *Financial Asset Pricing Theory*, Oxford University Press, Oxford 2014.

Niculescu C.P., Persson L.E., *Convex functions and their applications*, Springer Science, New York 2006.

Pap E., Štrboja M., *Generalization of the Jensen inequality for pseudointegral*, „Information Sciences" 2010, vol. 180, s. 543–548.

Pečarić J.E., Proschan F., Tong J.L., *Convex Function, Partial Ordering and Statistical Applications*, Academic Press, New York 1991.

Pratt J.W., *Risk aversion in the small and in the large*, „Econometrica" 1964, vol. 32, s. 122–136.

Román-Flores H., Flores-Franulič A., Chalco-Cano Y., *A Jensen type inequality for fuzzy integrals*, „Information Sciences" 2007, vol. 177, s. 3192–3201.

Štrboja M., Grbić T., Štajner-Papuga I., Grujić G., Medić S., *Jensen and Chebyshev inequalities for pseudo-integrals of set-valued functions*, „Fuzzy Sets and Systems" 2013, vol. 222, s. 18–32.

Szeligowska W., Kałuszka M., *On Jensen's inequality for generalized Choquet integral with an application to risk aversion*, arXiv: 1609.00554, 2016.

Tversky A., Kahneman D., *Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk*, „Econometrica" 1979, vol. 46, s. 263–291.

Tversky A., Kahneman D., *Advances in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty*, „Journal of Risk and Uncertainty" 1992, vol. 5, s. 297–323.

Wang Z., Klir G., *Generalized Measured Theory*, Springer, Berlin 2009.

Zhou J., Liu Y., Zhang X., Gu X., Wang D., *Uncertain risk aversion*, „Journal of Intelligent Manufacturing" 2017, vol. 28, s. 615–624.

* * *

On the Arrow-Pratt risk aversion model for the generalized Choquet integral

Abstract

In the 1970s Kahneman and Tversky conducted a series of experiments which suggested that people do not behave accordingly to the von Neumann-Morgenstern's Expected Utility Theory. Therefore, they proposed an alternative theory, called the Cumulative Prospect Theory, in which they used the Choquet integral with respect to distorted probability measures to describe decision making in risk and uncertainty conditions. The paper presents the generalized Arrow-Pratt risk aversion model, when the classic expected value is replaced by the generalized Choquet integral. To do this, we require necessary and sufficient conditions for the Jensen type inequality for the generalized Choquet integral with respect to arbitrary monotone measure, that is not an additive set function. We will provide some results of this type and point the difficulties that show up without the additivity assumption.

Keywords: Jensen inequality, generalized Choquet integral, nonadditive measure, capacity, risk aversion, measures of risk aversion