

ARKADIUSZ FILIP<sup>1</sup>

## Naturalna immunizacja portfela ubezpieczeniowego przed ryzykiem długowieczności

### 1. Wstęp

Przedmiotem niniejszego artykułu jest analiza możliwości naturalnej immunizacji portfela zakładu ubezpieczeń na życie w warunkach zmieniającej się śmiertelności ubezpieczonych. Ryzyka śmiertelności i długowieczności są jednymi z podstawowych ryzyk, z jakimi spotyka się zakład ubezpieczeń na życie w ramach swojej działalności. Ryzyko śmiertelności, polegające na tym, że faktyczna śmiertelność ubezpieczonych różni się od wartości oczekiwanej z powodów losowych, może być w dużej mierze ograniczone poprzez zapewnienie odpowiednio dużego i zróżnicowanego portfela ubezpieczonych. Ryzyko długowieczności jednak, którego istota polega na trwałych zmianach oczekiwanej śmiertelności w przyszłości, dotyka zwykle w podobny sposób całego portfela ubezpieczonych. Wydłużanie się życia ludzkiego dobrze ilustruje fakt, że zgodnie z tablicami trwania życia dla Polski, opublikowanymi przez Główny Urząd Statystyczny w okresie od 1990 r. do 2016 r., przeciętne trwanie życia w Polsce wydłużyło się o ok. 12% (z 66 do 74 lat) dla mężczyzn i 9% (z 75 do 82 lat) dla kobiet<sup>2</sup>. Zmiany te są jeszcze większe w przypadku osób starszych, np. przeciętne dalsze trwanie życia mężczyzny 60-letniego wydłużyło się o 26% (z 15 do 19 lat), zaś kobiety 60-letniej o 23% (z 20 do 24 lat)<sup>3</sup>. W przypadku długoterminowych produktów sprzedawanych przez zakłady ubezpieczeń na życie ryzyko związane ze zmianami umieralności ubezpieczonych może więc być istotne.

Problem zabezpieczania się zakładów ubezpieczeń na życie przed ryzykiem długowieczności dotyka w głównej mierze produktów rentowych, czyli takich, w których towarzystwo ubezpieczeniowe zobowiązuje się wypłacać

---

<sup>1</sup> Szkoła Główna Handlowa w Warszawie.

<sup>2</sup> Dane na podstawie tablic trwania życia w Polsce publikowanych przez Główny Urząd Statystyczny na stronie: <http://stat.gov.pl/obszary-tematyczne/ludnosc/trwanie-zycia/trwanie-zycia-tablice,1,1.html> (data odczytu 28.07.2017).

<sup>3</sup> Ibidem.

ubezpieczonemu określoną regularną kwotę do momentu śmierci. Świadczenia rentowe kalkulowane są w oparciu o ustalone założenia demograficzne i istotne odchylenie faktycznej śmiertelności od założeń może przekładać się na poważne straty zakładu ubezpieczeń. Obecnie w Polsce udział produktów rentowych w ofercie zakładów ubezpieczeń na życie jest bardzo mały i w związku z tym problem zabezpieczania się przed ryzykiem długowieczności nie jest właściwie obecny w bieżącej działalności polskich towarzystw ubezpieczeniowych. Znacznie większą ekspozycję na to ryzyko wykazują zakłady ubezpieczeń w wielu krajach Europy Zachodniej czy Stanach Zjednoczonych, często oferując komplementarny wobec publicznego prywatny system zabezpieczenia emerytalnego.

W literaturze poświęconej zagadnieniu zabezpieczenia portfela ubezpieczeniowego przed ryzykiem długowieczności spotkać można różne podejścia do problemu. Jednym z nich jest szukanie odpowiednich instrumentów zabezpieczających na rynkach finansowych, takich jak specjalne typy obligacji (*longevity bonds*) czy swapów (*longevity swaps*)<sup>4</sup>, których wypłaty uzależnione są od indeksu śmiertelności. Jest to dobry sposób zabezpieczenia dla towarzystwa ubezpieczeniowego, niemniej jednak wiąże się on z istotnymi kosztami zakupu odpowiednich instrumentów, nie gwarantuje również, że instrumenty będą odpowiednio dopasowane do konkretnego portfela zakładu ubezpieczeń. Drugim sposobem zabezpieczenia jest budowa modeli służących do prognozowania przyszłych wskaźników umieralności i oparcie na nich wyceny składek. Szczególnie popularny jest model Lee-Cartera<sup>5</sup> oraz model stochastyczny Cairnsa-Blake'a-Dowda (CBD)<sup>6</sup>. Za pomocą takich modeli zakłady ubezpieczeń są w stanie lepiej estymować przyszłe wypłaty i dzięki temu nieco zmniejszyć ryzyko. Niemniej jednak zarówno estymacja, jak i prognoza na podstawie tych modeli obarczone są błędami, przez co empiryczna realizacja wskaźników śmiertelności w przyszłości może istotnie odbiegać od prognozowanej, w związku z czym ryzyko, na jakie narażony jest zakład ubezpieczeń, nie jest w pełni zabezpieczone. Trzecim wreszcie sposobem zabezpieczenia jest wykorzystanie naturalnej immunizacji, jaką zapewnia odpowiednia struktura portfela ubezpieczeniowego. Różne

---

<sup>4</sup> Szerzej o różnorodnych instrumentach zabezpieczających przed ryzykiem długowieczności zob.: D. Blake, M. Morales, *Longevity Risk and Capital Markets: The 2014–15 Update*, „Journal of Risk and Insurance” 2017, vol. 84, s. 279–297.

<sup>5</sup> R. Lee, L. Carter, *Modeling and forecasting U.S. mortality*, „Journal of the American Statistical Association” 1992, vol. 87, s. 659–671.

<sup>6</sup> A.J.G. Cairns, D. Blake, K. Dowd, *A Two-Factor Model for Stochastic Mortality with Parameter Uncertainty: Theory and Calibration*, „Journal of Risk and Insurance” 2006, vol. 73, s. 687–718.

produkty ubezpieczeniowe w różny sposób reagują na zmiany śmiertelności wśród ubezpieczonych. W przypadku produktów ochronnych, takich jak ubezpieczenia na życie, spadek śmiertelności przekłada się na mniejsze wypłaty, a co za tym idzie – na dodatkowy zysk dla towarzystwa ubezpieczeniowego. W przypadku produktów rentowych jest odwrotnie: wydłużanie długości życia ubezpieczonych powoduje, że świadczenia wypłacane są przez zakład ubezpieczeń dłużej, co przynosi mu straty. Można by więc próbować tak dobrać strukturę portfela, aby straty na części produktów były pokrywane przez zyski na pozostałych, przez co cały portfel będzie niewrażliwy na zmiany śmiertelności. Jest to jednak zagadnienie trudne, gdyż wartość portfela jest determinowana przez wskaźniki śmiertelności, które są różne dla każdego wieku i mogą zmieniać się w przyszłości w sposób nie do końca przewidywalny. Dodatkowo, nie da się przy wyznaczaniu optymalnej struktury portfela uwzględnić wszystkich możliwych scenariuszy śmiertelności i konieczne są pewne założenia upraszczające.

Tematem niniejszego artykułu jest właśnie zagadnienie naturalnej immunizacji. Poniżej, na prostym przykładzie, przedstawiona zostanie jej idea, dorobek naukowy w tej dziedzinie oraz zaprezentowany zostanie opracowany przez autora model służący wyznaczeniu optymalnej struktury portfela, pozwalającej na zabezpieczenie przed ryzykiem długowieczności.

## 2. Idea naturalnej immunizacji

Naturalna immunizacja znajduje dość powszechne zastosowanie w przypadku zabezpieczenia przed ryzykiem stopy procentowej. Instytucje finansowe, takie jak banki czy zakłady ubezpieczeń, są narażone na ryzyko stopy procentowej, objawiające się tym, że na skutek zmian stóp procentowych zmieniają się wartości ich portfeli i mogą to być zmiany bardzo duże. Można temu zaradzić, konstruując portfel aktywów i pasywów w taki sposób, żeby uczynić go możliwie jak najbardziej niewrażliwym na zmiany stopy<sup>7</sup>. Wymaga to umiejętnej polityki zarządzania aktywami i pasywami (*asset liability management* – ALM), która jest obecnie jednym z ważniejszych zadań związanych z zarządzaniem ryzykiem w zakładach ubezpieczeń. W zarządzaniu aktywami i pasywami chodzi o to, aby dobrać portfel aktywów w taki sposób, aby wpływ zmian założeń ekonomicznych (w szczególności stopy procentowej) na aktywa równoważył wpływ zmian

<sup>7</sup> S.G. Kellison, *The Theory of Interest*, McGraw-Hill/Irwin, New York 2009.

na zobowiązania, zarówno chroniąc przed nadmiernymi stratami, jak i wykluczając nadmierne zyski. Jednym z podstawowych elementów skutecznej polityki ALM jest dopasowanie duracji<sup>8</sup> (ang. *duration*) aktywów i pasywów. Duracja, zwana też w polskiej terminologii średnim czasem trwania, jest zarówno wartością odpowiadającą średniemu terminowi zapadalności przepływów pieniężnych związanych z danym aktywem (w przypadku np. obligacji kuponowej tymi płatnościami są regularne wypłaty kuponów oraz płatność nominału w momencie wygaśnięcia) lub zobowiązaniem (płatności świadczeń ważone prawdopodobieństwami), jak też miernikiem wrażliwości na zmiany stopy procentowej. Tak zwana zmodyfikowana duracja<sup>9</sup> (ang. *modified duration*) dla danego instrumentu odpowiada pierwszej pochodnej wartości tego instrumentu względem stopy procentowej. W przypadku więc występowania w portfelu ubezpieczeniowym zobowiązań o średniej zapadalności 10 lat najlepiej jest zabezpieczyć je aktywami (np. obligacjami), których średni termin zapadalności wynosi również 10 lat. W ten sposób portfel będzie mało wrażliwy na małe zmiany stopy procentowej. W przypadku dużych zmian stopy procentowej lub odległych terminów zapadalności zobowiązań immunizacja portfela, mająca na celu dopasowanie duracji, może okazać się niewystarczająca. W takich przypadkach często korzysta się dodatkowo z drugiej pochodnej wartości instrumentu względem stopy procentowej, tzw. wypukłości (ang. *convexity*)<sup>10</sup>.

Problem zabezpieczenia przed ryzykiem długowieczności jest nieco bardziej złożony niż problem zabezpieczenia przed ryzykiem stopy procentowej, z uwagi na większą różnorodność czynnika ryzyka (różne wskaźniki śmiertelności w zależności od wieku, płci itp.), niemniej jednak można spróbować przełożyć pomysł naturalnej immunizacji portfela również na grunt portfela zobowiązań ubezpieczeniowych. Ideę naturalnej immunizacji portfela ubezpieczeniowego najlepiej odda poniższy przykład. Przypuśćmy, że w portfelu zakładu ubezpieczeń znajdują się wyłącznie dwa produkty. Pierwszym z nich jest ubezpieczenie na życie z sumą ubezpieczenia płatną w momencie śmierci ubezpieczonego, drugim jest renta życiowa bezterminowa, z tytułu której wypłacana jest umówiona suma do końca życia ubezpieczonego. Aby uprościć przekształcenia matematyczne na potrzeby przykładu załóżmy, że mamy do czynienia z rentą z czasem ciągłym, oba produkty zostały zakupione za składkę jednorazową netto oraz

<sup>8</sup> Ibidem.

<sup>9</sup> Ibidem.

<sup>10</sup> Ibidem. Problematyka immunizacji z wykorzystaniem duracji i wypukłości została opisana np. w artykule: L. Gajek, K. Ostaszewski, H.J. Zwiesler, *A primer on duration, convexity, and immunization*, „Journal of Actuarial Practice” 2005, vol. 12, s. 59–82.

dotatkowo rozpatrzmy najprostszy teoretyczny model demograficzny, zwany modelem wykładniczym<sup>11</sup>, w którym intensywność umieralności jest stała niezależnie od wieku  $x$ , czyli  $\mu_x \equiv \mu$ .

Aktuarialna wartość bieżąca<sup>12</sup> wypłat z tytułu ubezpieczenia na życie, odpowiadająca jednostkowej sumie ubezpieczenia, oraz aktuarialna wartość bieżąca wypłat z tytułu renty życiowej, odpowiadająca jednostkowej rocznej intensywności wypłat wynoszą odpowiednio<sup>13</sup>:

$$\bar{A}_x = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds} \mu_{x+t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(\delta+\mu)t} \mu dt = \frac{\mu}{\delta + \mu}, \quad (2.1)$$

$$\bar{a}_x = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds} dt = \int_0^{\infty} e^{-(\delta+\mu)t} dt = \frac{1}{\delta + \mu}, \quad (2.2)$$

gdzie:

- $\mu_x$  oznacza intensywność umieralności osoby w wieku  $x$  (zgodnie z definicją wykładniczego modelu umieralności  $\mu_x \equiv \mu$ ),
- $\delta$  oznacza intensywność oprocentowania.

Niech  $\psi$  będzie udziałem w portfelu zakładu ubezpieczeń pierwszego produktu, czyli ubezpieczenia na życie. Wówczas  $1-\psi$  będzie udziałem w portfelu drugiego produktu, czyli renty życiowej. Celem analizy jest znalezienie optymalnej wartości parametru  $\psi$ , czyli takiej, przy której portfel będzie zabezpieczony przed ryzykiem długowieczności. Aktuarialna wartość bieżąca wypłat z tytułu obu produktów znajdujących się w portfelu wynosi:

$$V = \psi \bar{A}_x + (1-\psi) \bar{a}_x = \frac{\psi\mu + 1 - \psi}{\delta + \mu}. \quad (2.3)$$

Aby znaleźć wartość parametru  $\psi$ , dla której wartość portfela będzie stała niezależnie od  $\mu$ , wystarczy przyrównać do 0 pochodną funkcji  $V$  względem  $\mu$ :

<sup>11</sup> Model wykładniczy jest teoretycznym modelem śmiertelności. Więcej o nim można przeczytać np. w: N. Bowers, *Actuarial Mathematics*, The Society of Actuaries, Schaumburg 1997.

<sup>12</sup> Aktuarialna wartość bieżąca zdefiniowana jest jako wartość oczekiwana zmiennej losowej będącej wartością bieżącą wypłat; losowość wynika z niepewności związanej z prawdopodobieństwami śmierci. Aktuarialna wartość bieżąca jest więc wartością bieżącą wypłat ważonych prawdopodobieństwami ich realizacji. Zob. M. Skałba, *Ubezpieczenia na życie*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 2003.

<sup>13</sup> H.U. Gerber, *Life Insurance Mathematics*, Springer, Heidelberg 1997.

$$\frac{\partial V}{\partial \mu} = \frac{\psi\delta - 1 + \psi}{(\delta + \mu)^2} \qquad \frac{\partial V}{\partial \mu} = 0 \Leftrightarrow \psi = \frac{1}{1 + \delta}.$$

Otrzymany wynik świadczy o tym, że jeżeli udział polis ubezpieczenia na życie w portfelu zakładu ubezpieczeń wyniesie  $\frac{1}{1 + \delta}$ , to dla każdej możliwej wartości intensywności umieralności  $\mu$ , przy zastosowaniu wykładniczego modelu umieralności, aktuarialna wartość bieżąca wypłat z portfela będzie stale równa

$$V = \frac{\psi\mu + 1 - \psi}{\delta + \mu} = \frac{1}{1 + \delta}. \quad (2.4)$$

Dla najprostszego teoretycznego modelu wymierania udało się więc znaleźć doskonale zabezpieczenie portfela przed ryzykiem długowieczności. Niestety rzeczywiste portfele ubezpieczeniowe nie są tak proste, a faktyczna śmiertelność wśród ubezpieczonych różni się od założeń teoretycznych modeli, potrzebne więc są dodatkowe założenia i uproszczenia. Przykładowe sposoby wyznaczenia optymalnej struktury portfela przedstawione są w dalszej części artykułu.

### 3. Stan badań na temat naturalnej immunizacji

Za prekursorów badań nad naturalną immunizacją portfela ubezpieczeniowego można uznać Jennifer L. Wang, Mary L. Yang oraz Steve'a Y.C. Pana<sup>14</sup>, którzy na początku bieżącego stulecia podjęli się analizy wpływu zmian śmiertelności na wartość ubezpieczeń na życie i produktów rentowych na podstawie danych z Tajwanu. Skonstruowali oni prosty model immunizacyjny, który pokazywał, że wraz ze zmianą śmiertelności może dochodzić do pokrywania się zysków i strat na różnych produktach, nie był jednak w stanie uwzględnić tego, że zmiany śmiertelności mogą mieć inny charakter w populacji osób kupujących ubezpieczenia na życie oraz w populacji osób kupujących renty życiowe.

Samuel H. Cox i Yijia Lin<sup>15</sup> kontynuowali badania nad naturalną immunizacją, szukając potwierdzenia tezy, że znajduje ona odzwierciedlenie w rzeczywistych

<sup>14</sup> J.L. Wang, L.Y. Yang, Y.C. Pan, *Hedging Longevity Risk in Life Insurance Companies*, The Annual Meeting of Asia-Pacific Risk and Insurance Association, 2003, za: S.H. Cox, Y. Lin, *Natural Hedging of Life and Annuity Mortality Risks*, „North American Actuarial Journal” 2007, vol. 11, s. 1–15.

<sup>15</sup> S.H. Cox, Y. Lin, op.cit.

cenach produktów oferowanych przez zakłady ubezpieczeń. Na podstawie danych o wysokościach składki jednorazowej za dożywotnią rentę w momencie zakupu przez 65-letniego mężczyznę w latach 1995–1998 w różnych zakładach ubezpieczeń oszacowali model ekonometryczny, który pokazał, że im wyższy udział ubezpieczeń na życie w portfelu, tym niższa cena za produkt rentowy. Odkrycie to może świadczyć o tym, że naturalna immunizacja portfela ubezpieczeniowego przekłada się na faktyczne ceny oferowane przez zakłady ubezpieczeń, a w związku z tym ma znaczenie z ich perspektywy finansowej.

Sz szczególnie zasłużeni dla badania problemu naturalnej immunizacji portfela ubezpieczeniowego byli tajwańscy uczeni: wspomniana wcześniej J.L. Wang, H.C. Huang, S.S. Yang i J.T. Tsai<sup>16</sup>, którzy zaproponowali metodę ustalenia optymalnej struktury portfela, pozwalającą na zabezpieczenie przed ryzykiem długowieczności. Model ten opierał się na szacowaniu tzw. duracji śmiertelności (ang. *mortality duration*), czyli odpowiednika duracji znanej z matematyki finansowej, będącego miarą wrażliwości na zmiany intensywności umieralności. Podejście to, zwane w dalszej części pracy podejściem opartym na duracji, zostanie bardziej szczegółowo zaprezentowane w punkcie 4.

Podejście oparte na duracji zostało rozwinięte przez J.T. Tsai, J.L. Wang i L.Y. Tzeng<sup>17</sup>, którzy zaproponowali wykorzystanie warunkowej wartości zagrożonej (ang. *conditional value at risk* – CVaR)<sup>18</sup> jako kryterium optymalizacyjnego w procesie szukania optymalnej struktury portfela ubezpieczeniowego. Losowość w ich modelu została wprowadzona poprzez wykorzystanie modelu CBD<sup>19</sup> do estymacji tablic trwania życia. Metoda ta łączyła więc ideę zabezpieczenia portfela przed ryzykiem długowieczności poprzez szukanie optymalnej struktury portfela z estymacją modelu prognozującego przyszłe wskaźniki śmiertelności.

W kolejnych latach pojawiły się kolejne publikacje, które poruszały problem naturalnej immunizacji portfela ubezpieczeniowego jako elementu większej

---

<sup>16</sup> J.L. Wang, H.C. Huang, S.S. Yang, J.T. Tsai, *An Optimal Product Mix for Hedging Longevity Risk in Life Insurance Companies: The Immunization Theory Approach*, „The Journal of Risk and Insurance” 2010, vol. 77, s. 473–497.

<sup>17</sup> J.T. Tsai, J.L. Wang, L.Y. Tzeng, *On the Optimal Product Mix in Life Insurance Companies Using Conditional Value at Risk*, „Insurance: Mathematics and Economics” 2010, vol. 46, s. 235–241.

<sup>18</sup> Więcej o miarach ryzyka, takich jak wartość zagrożona (*Value at Risk* – VaR) oraz warunkowa wartość zagrożona (*Conditional Value at Risk* – CVaR, *Tail Value at Risk* – TVaR) zob.: W. Bijak, *Praktyczne metody badania wypłacalności zakładów ubezpieczeń*, Oficyna Wydawnicza SGH, Warszawa 2009. Szerzej o warunkowej wartości zagrożonej zob.: R.T. Rockafellar, S. Uryasev, *Conditional value-at-risk for general loss distributions*, „Journal of Banking and Finance” 2002, vol. 26, s. 1443–1471.

<sup>19</sup> A.J.G. Cairns, D. Blake, K. Dowd, op.cit.

strategii optymalizacyjnej, uwzględniającej modelowanie stochastyczne, prognozowanie przyszłych tablic trwania życia czy dodatkowe ryzyka, oprócz ryzyka długowieczności, np. ryzyko stopy procentowej<sup>20</sup>.

#### 4. Metoda naturalnej immunizacji – podejście oparte na duracji

Jennifer L. Wang, Hong-Chih Huang, Sharon S. Yang i Jeffrey T. Tsai w 2010 r. przedstawili prosty model wyznaczania struktury portfela ubezpieczeniowego, który można uznać za pierwszy przykład pełnej implementacji metod naturalnej immunizacji<sup>21</sup>. Założyli oni, że zakład oferuje dwa produkty: ubezpieczenie na życie i rentę życiową, a łączne zobowiązanie zakładu ubezpieczeń jest sumą zobowiązań wynikających z obu produktów i wyraża się wzorem:

$$V = V^{life} + V^{annuity},$$

gdzie  $V^{life}$  oznacza wartość oczekiwaną zobowiązań z tytułu polis ubezpieczenia na życie, a  $V^{annuity}$  – wartość oczekiwaną zobowiązań z tytułu polis rentowych. Następnie badacze ci rozszerzyli pojęcie zmodyfikowanej duracji służącej do oceny wrażliwości portfela na zmiany stopy procentowej na przypadek wrażliwości portfela na zmiany intensywności umieralności. Tak zwana duracja śmiertelności (ang. *mortality duration*) wyraża się u nich wzorem:

$$D_{\mu}^V = \frac{dV}{d\mu} \cdot \frac{1}{V}.$$

Wpływ zmian intensywności umieralności na wartość portfela może być wyrażony przy pomocy rozwinięcia Taylora jako:

$$\Delta V = \left( \frac{dV^{life}}{d\mu} + \frac{dV^{annuity}}{d\mu} \right) \Delta\mu + \frac{1}{2} \left( \frac{d^2V^{life}}{d\mu^2} + \frac{d^2V^{annuity}}{d\mu^2} \right) (\Delta\mu)^2 + \dots$$

<sup>20</sup> Zob. np.: E. Luciano, L. Regis, E. Vigna, *Delta-gamma hedging of mortality and interest rate risk*, „Insurance: Mathematics and Economics” 2012, vol. 50, s. 402–412 oraz C.W. Wang, H.C. Huang, D.C. Hong, *A feasible natural hedging strategy for insurance companies*, „Insurance: Mathematics and Economics” 2013, vol. 52, s. 532–542.

<sup>21</sup> J.L. Wang, H.C. Huang, S.S. Yang, J.T. Tsai, op.cit.



Gdyby rozpatrywać przybliżenie pierwszego rzędu (które powinno okazać się wystarczające w przypadku niezbyt dużych zmian śmiertelności), zabezpieczenie portfela jest osiągnięte w przypadku, gdy

$$\left( \frac{dV^{life}}{d\mu} + \frac{dV^{annuity}}{d\mu} \right) \Delta\mu = 0$$

albo równoważnie

$$D_{\mu}^{life} \cdot \psi_{life} - D_{\mu}^{annuity} \cdot \psi_{annuity} = 0, \tag{4.1}$$

gdzie  $D_{\mu}^{life} = \frac{dV^{life}}{d\mu} \cdot \frac{1}{V^{life}}$  oraz  $D_{\mu}^{annuity} = -\frac{dV^{annuity}}{d\mu} \cdot \frac{1}{V^{annuity}}$  oznaczają odpowiednio durację śmiertelności dla portfela ubezpieczeń na życie oraz portfela rent życiowych, zaś  $\psi_{life} = \frac{V^{life}}{V}$  i  $\psi_{annuity} = \frac{V^{annuity}}{V}$  oznaczają udziały zobowiązań z tytułu

ubezpieczeń na życie i rent życiowych w łącznym zobowiązaniu zakładu.

Ponieważ wartości  $D_{\mu}^{life}$  i  $D_{\mu}^{annuity}$  są trudne do wyznaczenia w sposób analityczny, autorzy proponują oszacowanie efektywnych duracji w sposób przybliżony, analizując zmiany wartości portfela wynikające ze zmian wartości intensywności umieralności:

$$D_{e\mu}^{life} = \frac{V^{life+} - V^{life-}}{2 \cdot V^{life} \cdot \Delta\mu}, \quad D_{e\mu}^{annuity} = -\frac{V^{annuity+} - V^{annuity-}}{2 \cdot V^{annuity} \cdot \Delta\mu},$$

gdzie  $V^{life+}$  i  $V^{annuity+}$  oznaczają wartości zobowiązań wyznaczone dla wyższej intensywności umieralności  $\mu + \Delta\mu$ , zaś  $V^{life-}$  i  $V^{annuity-}$  oznaczają wartości zobowiązań wyznaczone dla niższej intensywności umieralności  $\mu - \Delta\mu$  (samo zaś  $\Delta\mu$  jest odpowiednio małe, aby uzyskać dobry efekt przybliżenia pochodnej). Po podstawieniu do wzoru 4.1 otrzymujemy:

$$D_{e\mu}^{life} \cdot \psi_{life} - D_{e\mu}^{annuity} \cdot \psi_{annuity} = 0,$$

co przy warunku  $\psi_{life} + \psi_{annuity} = 1$  prowadzi do wniosku, że optymalny udział ubezpieczeń na życie oraz rent w portfelu powinien wynosić:

$$\Psi_{life}^* = \frac{D_{e\mu}^{annuity}}{D_{e\mu}^{annuity} + D_{e\mu}^{life}}, \quad \Psi_{annuity}^* = \frac{D_{e\mu}^{life}}{D_{e\mu}^{annuity} + D_{e\mu}^{life}}.$$

O ile ubezpieczyciel utrzymuje taką strukturę zobowiązań w swoim portfelu, jest zabezpieczony przed ryzykiem długowieczności zgodnie z podejściem zaprezentowanym przez autorów, określanym dalej jako podejście oparte na duracji.

W tej samej publikacji J.L. Wang, H.C. Huang, S.S. Yang i J.T. Tsai rozważają lepsze przybliżenie wrażliwości portfela na zmiany wskaźników śmiertelności poprzez uwzględnienie drugiej pochodnej w rozwinięciu Taylora, tzw. wypukłości (ang. *convexity*). Wykorzystanie drugiej pochodnej nie prowadzi jednak do istotnej poprawy jakości zabezpieczenia, w związku z czym w dalszej części opracowania analizie poddany zostanie tylko model z pierwszą pochodną.

## 5. Metoda analityczna – opis oraz wyniki

W niniejszym rozdziale omówiona zostanie autorska metoda wyznaczenia optymalnej struktury portfela w celu jego zabezpieczenia przed ryzykiem długowieczności, określana w dalszej części pracy jako metoda analityczna. Na początek przedstawię sposób wyznaczenia wzoru na optymalną strukturę portfela na podstawie uproszczonego modelu spełniającego następujące założenia:

- Zakład ubezpieczeń sprzedaje tylko dwa produkty: dożywotnie ubezpieczenie na życie, z tytułu którego wypłacana jest 1 jednostka na koniec roku śmierci, i dożywotnią rentę, płatną z góry na początek każdego roku w wysokości 1 jednostki rocznie.
- Polisy każdego rodzaju wystawiane są osobom w tym samym wieku, które charakteryzują się takimi samymi wskaźnikami śmiertelności (wszyscy klienci zakładu ubezpieczeń pochodzą z tej samej homogenicznej populacji i są w tym samym wieku).
- Za każdą wystawioną polisę zakład pobiera od ubezpieczonego jednorazową składkę netto (dla uproszczenia analizy pomijamy marżę zakładu i inne narzuty na składkę netto, w tym narzuty na koszty).
- Przyjmujemy, że zakład ubezpieczeń może dowolnie wybierać, jaki odsetek polis będą stanowiły ubezpieczenia na życie, a jaki renty życiowe.
- Przyjmujemy, że w ciągu roku intensywność umieralności jest stała, tj:  $\mu_{x+s} = \mu_x$  dla  $0 < s < 1$ ,  $x \in \mathbf{Z}$ .
- Przyjmujemy stałą intensywność oprocentowania  $\delta$ .

Przy takich założeniach wartość portfela (w przeliczeniu na jednostkę) można zapisać jako:

$$V = \psi A_x + (1 - \psi) \ddot{a}_x, \quad (5.1)$$

gdzie  $\psi$  jest szukanym udziałem ubezpieczeń na życie w wartości portfela, zaś  $A_x$  i  $\ddot{a}_x$  oznaczają odpowiednio aktuarialną wartość bieżącą wypłat z tytułu ubezpieczenia na życie oraz z tytułu renty życiowej i wyrażają się wzorami:

$$A_x = \sum_{i=0}^{\infty} v^{i+1} \cdot {}_i p_x \cdot q_{x+i} = \sum_{i=0}^{\infty} v^{i+1} \cdot e^{-\int_0^i \mu_{x+s} ds} \cdot (1 - e^{-\mu_{x+i}}) \quad (5.2)$$

$$\ddot{a}_x = \sum_{i=0}^{\infty} v^i \cdot {}_i p_x = \sum_{i=0}^{\infty} v^i \cdot e^{-\int_0^i \mu_{x+s} ds}, \quad (5.3)$$

gdzie:

$v = e^{-\delta}$  to roczny czynnik dyskontujący odpowiadający rocznej intensywności oprocentowania  $\delta$ ,

${}_t p_x = \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s} ds\right)$  to prawdopodobieństwo przeżycia  $t$  lat przez osobę w wieku  $x$ ,

$q_x = 1 - p_x$  to prawdopodobieństwo śmierci w ciągu roku osoby w wieku  $x$ .

Aktuarialna wartość bieżąca przyszłych wypłat z portfela ubezpieczeniowego zależy w sposób oczywisty od intensywności umieralności, która nie jest jedynym parametrem, lecz przyjmuje różne wartości w zależności od wieku i dodatkowo chcemy dopuścić jej zmiany w przyszłości. Przyjmuje się więc dodatkowe założenie – względne zmiany intensywności umieralności są stałe, niezależne od wieku i nieznanne *a priori*. Oznacza to, że jeżeli startowy wektor intensywności umieralności wynosi  $\mu_x$ , to zrealizowany wektor intensywności umieralności będzie wynosił  $k \cdot \mu_x$ , gdzie  $k$  jest pewną nieznaną stałą. Przy tym założeniu, lekko modyfikując wzory 5.2 i 5.3, można wyznaczyć ile będą wynosiły zrealizowane wartości poszczególnych składników portfela (ubezpieczeń na życie oraz rent życiowych) w zależności od parametru  $k$ , a także ile będą wynosiły ich pierwsze pochodne względem  $k$ .

$$A_x(k) = \sum_{i=0}^{\infty} v^{i+1} \cdot e^{-k \int_0^i \mu_{x+s} ds} \cdot (1 - e^{-k \mu_{x+i}}) = \sum_{i=0}^{\infty} v^{i+1} \cdot ({}_i p_x)^k \cdot (1 - p_{x+i}^k) \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial A_x(k)}{\partial k} = \sum_{i=0}^{\infty} v^{i+1} \cdot ({}_i p_x)^k \cdot \left[ \ln {}_i p_x - p_{x+i}^k \cdot (\ln {}_i p_x + \ln p_{x+i}) \right], \quad (5.5)$$

$$\ddot{a}_x(k) = \sum_{i=0}^{\infty} v^i \cdot e^{-k \int_0^i \mu_{x+s} ds} = \sum_{i=0}^{\infty} v^i \cdot ({}_i p_x)^k, \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial \ddot{a}_x(k)}{\partial k} = \sum_{i=0}^{\infty} v^i \cdot ({}_i p_x)^k \cdot \ln {}_i p_x. \quad (5.7)$$

Pochodne we wzorach 5.5 i 5.7 mierzą wrażliwość wartości portfela na zmiany parametru  $k$ . Aby obliczyć wrażliwość startowego portfela należy przyjąć  $k = 1$ .

$$\left. \frac{\partial A_x(k)}{\partial k} \right|_{k=1} = \sum_{i=0}^{\infty} v^{i+1} \cdot {}_i p_x \cdot \left[ \ln {}_i p_x - p_{x+i} \cdot (\ln {}_i p_x + \ln p_{x+i}) \right]$$

$$\left. \frac{\partial \ddot{a}_x(k)}{\partial k} \right|_{k=1} = \sum_{i=0}^{\infty} v^i \cdot {}_i p_x \cdot \ln {}_i p_x.$$

Dla portfela, którego wartość wyraża się wzorem 5.1 szukamy takiej wartości  $\psi$ , aby pochodna względem  $k$  dla  $k = 1$  wynosiła 0.

$$\left. \frac{\partial V(k)}{\partial k} \right|_{k=1} = \psi \cdot \left. \frac{\partial A_x(k)}{\partial k} \right|_{k=1} + (1-\psi) \left. \frac{\partial \ddot{a}_x(k)}{\partial k} \right|_{k=1} = 0$$

$$\psi = \frac{\left. \frac{\partial \ddot{a}_x(k)}{\partial k} \right|_{k=1}}{\left. \frac{\partial \ddot{a}_x(k)}{\partial k} \right|_{k=1} - \left. \frac{\partial A_x(k)}{\partial k} \right|_{k=1}} =$$

$$= \frac{\sum_{i=0}^{\infty} v^i \cdot ({}_i p_x)^k \cdot \ln {}_i p_x}{\sum_{i=0}^{\infty} v^i \cdot ({}_i p_x)^k \cdot \ln {}_i p_x - \sum_{i=0}^{\infty} v^{i+1} \cdot {}_i p_x \cdot \left[ \ln {}_i p_x - p_{x+i} \cdot (\ln {}_i p_x + \ln p_{x+i}) \right]} \quad (5.8)$$

Uzyskany wynik ukazuje optymalną strukturę portfela ubezpieczeniowego, która przy ustalonych założeniach pozwala zabezpieczyć portfel przed ryzykiem długowieczności.

W modelu przyjęto, że wszyscy klienci zakładu ubezpieczeń pochodzą z homogenicznej populacji oraz że osoby pragnące zakupić rentę życiową

i ubezpieczenie na życie są w tym samym wieku i charakteryzują się równymi wskaźnikami śmiertelności. W rzeczywistości ubezpieczenie na życie jest produktem wybieranym przez stosunkowo młodszych ludzi, zaś świadczenia z tytułu renty życiowej są wypłacane ludziom stosunkowo starszym (w krajach Europy Zachodniej na przykład jako uzupełnienie do emerytury wypłacanej przez państwo). W związku z tym wypadałoby przyjąć, że klienci, którzy zakupili określone produkty są w różnym wieku. Dodatkowo można przyjąć, że również wskaźniki śmiertelności dwóch grup klientów różnią się między sobą. W związku z tym wprowadzamy następujące rozróżnienie:

$x$  – bieżący wiek osoby, która zakupiła rentę życiową,

$y$  – bieżący wiek osoby, która zakupiła ubezpieczenie na życie,

$p_x$  i  $q_x$  – odpowiednio prawdopodobieństwo przeżycia jednego roku i śmierci w ciągu jednego roku dla osoby w wieku  $x$ , która zakupiła rentę życiową,

$p'_y$  i  $q'_y$  – odpowiednio prawdopodobieństwo przeżycia jednego roku i śmierci w ciągu jednego roku dla osoby w wieku  $y$ , która zakupiła ubezpieczenie na życie (inne tablice trwania życia niż dla populacji osób kupujących rentę życiową),

${}_t p_x$  i  ${}_t q_x$  – odpowiednio prawdopodobieństwo przeżycia  $t$  lat i śmierci w ciągu  $t$  lat dla osoby w wieku  $x$ , która zakupiła rentę życiową,

${}_t p'_y$  i  ${}_t q'_y$  – odpowiednio prawdopodobieństwo przeżycia  $t$  lat i śmierci w ciągu  $t$  lat dla osoby w wieku  $y$ , która zakupiła ubezpieczenie na życie,

$\mu_x$  – intensywność umieralności dla osoby w wieku  $x$ , która zakupiła rentę życiową,

$\mu'_y$  – intensywność umieralności dla osoby w wieku  $y$ , która zakupiła ubezpieczenie na życie.

Po uwzględnieniu powyższych zmian wzór 5.8 na optymalną strukturę portfela przyjmie postać:

$$\psi = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} v^i \cdot ({}_i p_x)^k \cdot \ln {}_i p_x}{\sum_{i=0}^{\infty} v^i \cdot ({}_i p_x)^k \cdot \ln {}_i p_x - \sum_{i=0}^{\infty} v^{i+1} \cdot {}_i p'_y \cdot \left[ \ln {}_i p'_y - p'_{y+i} \cdot (\ln {}_i p'_y + \ln p'_{y+i}) \right]}. \quad (5.9)$$

Model zakłada, że oba produkty (renta życiowa i ubezpieczenie na życie) są produktami dożywotnymi. W rzeczywistości spotyka się również produkty terminowe. Rozpatrzmy więc terminowe ubezpieczenie na życie, z tytułu którego wypłacana jest 1 jednostka na koniec roku śmierci pod warunkiem, że śmierć nastąpi w ciągu następnych  $m$  lat oraz terminową rentę życiową ze świadczeniem w wysokości 1 jednostki płatnym na początek roku przez kolejnych  $n$  lat, pod warunkiem, że rentobiorca żyje. Wówczas wartość portfela odpowiadająca wzorowi 5.1 wyniesie:

$$V = \psi A_{y:\overline{m}|}^1 + (1 - \psi) \ddot{a}_{x:\overline{m}|},$$

gdzie  $\psi$  jest szukanym udziałem ubezpieczeń na życie w wartości portfela.

$$A_{y:\overline{m}|}^1 = \sum_{i=0}^{m-1} v^{i+1} \cdot {}_i p'_y \cdot q'_{y+i} = \sum_{i=0}^{m-1} v^{i+1} \cdot e^{-\int_0^i \mu'_{y+s} ds} \cdot (1 - e^{-\mu'_{y+i}})$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{m}|} = \sum_{i=0}^{n-1} v^i \cdot {}_i p_x = \sum_{i=0}^{n-1} v^i \cdot e^{-\int_0^i \mu_{x+s} ds}.$$

Wzór 5.9 na optymalną strukturę portfela przyjmie wówczas następującą postać:

$$\psi = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} v^i \cdot ({}_i p_x)^k \cdot \ln {}_i p_x}{\sum_{i=0}^{n-1} v^i \cdot ({}_i p_x)^k \cdot \ln {}_i p_x - \sum_{i=0}^{m-1} v^{i+1} \cdot {}_i p'_y \cdot [\ln {}_i p'_y - p'_{y+i} \cdot (\ln {}_i p'_y + \ln p'_{y+i})]}. \quad (5.10)$$

Dla wszystkich omawianych sytuacji warto również zastanowić się nad optymalną strukturą portfela w przypadku, gdy suma ubezpieczenia w umowie ubezpieczenia na życie wynosi  $P_1$ , zaś kwota płatności z tytułu renty życiowej wynosi  $P_2$  (oznaczaną dalej jako  $\chi$ ). Zależność pomiędzy  $\chi$  a  $\psi$  opisuje wówczas formuła:

$$\chi = \frac{\frac{\psi}{P_1}}{\frac{\psi}{P_1} + \frac{1-\psi}{P_2}}. \quad (5.11)$$

Jakość zabezpieczenia, osiąganego poprzez zastosowanie optymalnej struktury portfela, wyznaczonej przy użyciu metody analitycznej, zostanie zaprezentowana na kilku empirycznych przykładach. W pierwszej kolejności analizie poddany zostanie przykład opisany w tabeli 1.

Dla produktów o takich parametrach, jak w tabeli 1, optymalny udział ubezpieczeń na życie w przeliczeniu na 1 jednostkę policzony zgodnie ze wzorem 5.9 wynosi  $\psi = 0,973497$ . Po uwzględnieniu faktu, że wysokość sumy ubezpieczenia w pojedynczej polisie ubezpieczenia na życie wynosi 100 000 jednostek, zaś wysokość rocznej renty w pojedynczej polisie rentowej – 10 000 jednostek, optymalny udział polis ubezpieczenia na życie w portfelu policzony zgodnie

ze wzorem 5.11 powinien wynieść  $\chi = 0,78601$ , zaś udział polis rentowych  $1 - \chi = 0,21399$ . Jeżeli zakład ubezpieczeń chce łącznie sprzedać 100 000 polis, powinien sprzedać 78 601 polis ubezpieczenia na życie oraz 21 399 polis rentowych. Jeżeli intensywność umieralności spadnie odpowiednio o 5%, 10% i 20% w stosunku do zakładanego poziomu, to zobowiązanie zakładu ubezpieczeń zmieni się w sposób pokazany w tabeli 2.

**Tabela 1. Parametry produktów wykorzystanych w przykładzie**

	Ubezpieczenie na życie	Renta życiowa
Świadczenie*	100 000 jp	10 000 jp
Okres ochronny	dożywotni	dożywotni
Wiek ubezpieczonego	40 lat	60 lat
Płeć ubezpieczonego	kobieta	kobieta
Intensywność oprocentowania	5%	5%
Tablice trwania życia	GUS 2016	GUS 2016
Wysokość składki**	14 043,75 jp	138 379,87 jp

\* W przypadku ubezpieczenia na życie kwota ta wypłacana jest na koniec roku, w którym nastąpił zgon, w przypadku renty życiowej kwota ta wypłacana jest na początek każdego roku pod warunkiem, że ubezpieczony żyje.

\*\* Składka wyznaczona została jako jednorazowa składka netto za dany produkt ubezpieczeniowy.

Źródło: opracowanie własne

**Tabela 2. Wrażliwość portfela na względne zmiany intensywności umieralności**

	Ubezpieczenie na życie	Renta życiowa	Portfel
Bazowa intensywność umieralności	1 103 853 724,00 jp	2 961 181 312,91 jp	4 065 035 036,92 jp
Intensywność umieralności -5%	1 077 174 007,35 jp	2 987 826 142,11 jp	4 065 000 149,46 jp
Zmiana procentowa	-2,417%	0,900%	-0,001%
Intensywność umieralności -10%	1 049 423 450,66 jp	3 015 442 038,22 jp	4 064 865 488,88 jp
Zmiana procentowa	-4,931%	1,832%	-0,004%
Intensywność umieralności -20%	990 181 547,10 jp	3 073 886 413,61 jp	4 064 067 960,71 jp
Zmiana procentowa	-10,298%	3,806%	-0,024%

Źródło: opracowanie własne

Z danych zawartych w tabeli 2 wynika, że w przypadku spadku intensywności umieralności o 20% wartość portfela ubezpieczeń na życie spada o 10,298%, zaś wartość portfela rent życiowych rośnie o 3,806%. Kiedy patrzymy na portfel całościowo, jego wartość spada jednak jedynie o 0,024%, co pokazuje, że jakość zabezpieczenia przed ryzykiem długowieczności jest bardzo dobra.

Z przedstawionej powyżej analizy można wyciągnąć następujące wnioski:

- Spadek intensywności umieralności powoduje spadek przewidywanych wypłat z tytułu polis ubezpieczenia na życie oraz wzrost przewidywanych wypłat z tytułu rent życiowych. Im większy spadek intensywności umieralności, tym większy wpływ na wartość przewidywanych wypłat.
- Przy zastosowaniu struktury portfela optymalnej z punktu widzenia metody analitycznej, wpływ spadku intensywności umieralności na łączną wartość przewidywanych wypłat jest zdecydowanie mniejszy niż dla każdego produktu rozpatrywanego oddzielnie. Pokazuje to, że zabezpieczenie przed ryzykiem długowieczności działa.
- Optymalna struktura portfela nie jest strukturą idealną i nie jest w stanie zabezpieczyć w 100% przed ryzykiem zmian intensywności umieralności. Jednakże nawet w przypadku dużych zmian (spadek intensywności umieralności o 20%) wartość przewidywanych wypłat odchyła się o mniej niż 0,05%.
- Im większa zmiana intensywności umieralności, tym słabsza jakość zabezpieczenia portfela.
- Odchylenia wartości portfela na skutek zmian intensywności umieralności mogą być zarówno *in plus*, jak też *in minus*. Nie ma możliwości stwierdzenia na gruncie teoretycznym jakich zmian należy się spodziewać.

Do podobnych wniosków prowadzi analogiczna analiza przeprowadzona dla mężczyzn (przy zmianie intensywności umieralności o 20% wartość portfela ubezpieczeń na życie maleje o 10,591%, wartość portfela rent życiowych rośnie o 5,996%, zaś wartość zbilansowanego portfela rośnie o 0,041%). Szczegółowe wyniki dla mężczyzn nie będą jednak omawiane w tym artykule.

Kolejnym krokiem jest weryfikacja jakości zabezpieczenia w kontekście historycznych zmian wskaźników umieralności w Polsce zgodnie z tablicami trwania życia publikowanymi przez GUS. W tabeli 3 zilustrowany jest wpływ zmiany tablic trwania życia na wartość portfela z analizowanego przykładu. W odróżnieniu od danych zaprezentowanych w tabeli 2, przedstawione zostały zmiany wartości portfela pod wpływem rzeczywistych zmian intensywności umieralności w Polsce w latach 1990–2016, a nie teoretycznego spadku o taką samą wartość procentową niezależnie od wieku. W pierwszym wierszu przedstawiona jest aktuarialna wartość bieżąca wypłat przy założeniu, że śmiertelność przez



cały okres ubezpieczenia kształtuje się zgodnie z tablicami trwania życia z roku 1990, w kolejnych wierszach zaś przedstawiona jest aktuarialna wartość bieżąca wypłat po zamianie tablic na inne, odpowiednio z roku 2000, 2010 i 2016. Pozwala to przetestować jakość zabezpieczenia wynikającą z modelu dla sytuacji, w której założenie o multiplikatywnych zmianach intensywności umieralności zostaje uchylone.

**Tabela 3. Wrażliwość portfela na historyczne zmiany tablic trwania życia**

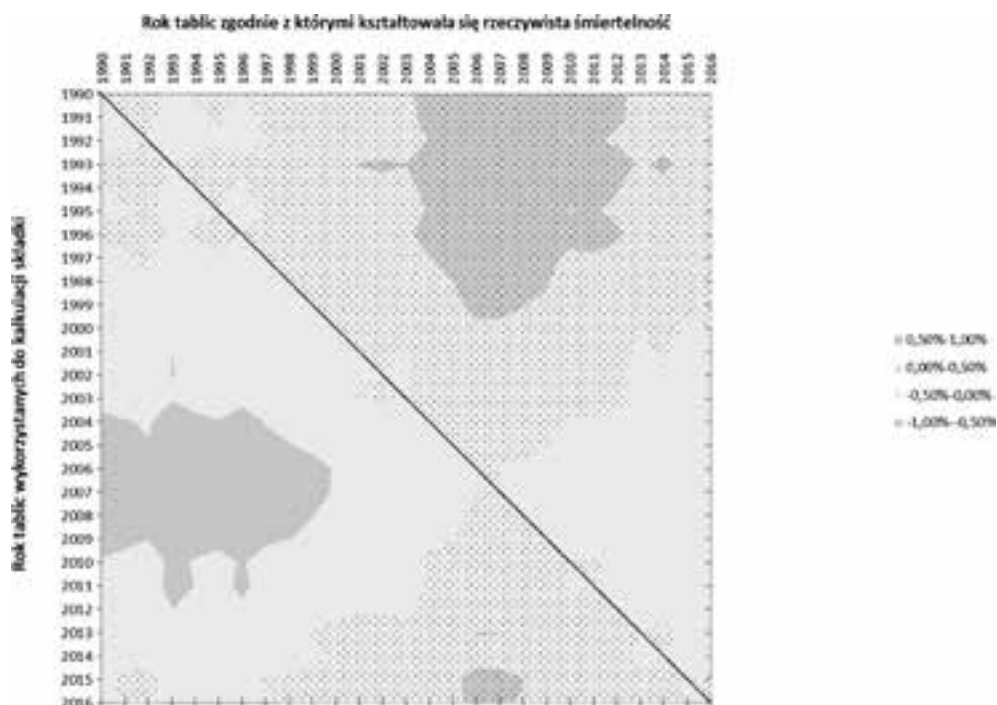
	Ubezpieczenie na życie	Renta życiowa	Portfel
Tablice z roku 1990	1 403 141 498,17 jp	2 732 005 742,78 jp	4 135 147 240,95 jp
Tablice z roku 2000	1 290 893 400,99 jp	2 858 966 299,94 jp	4 149 859 700,93 jp
<i>Zmiana procentowa</i>	<i>-8,000%</i>	<i>4,647%</i>	<i>0,356%</i>
Tablice z roku 2010	1 162 206 986,81 jp	2 997 891 107,28 jp	4 160 098 094,08 jp
<i>Zmiana procentowa</i>	<i>-17,171%</i>	<i>9,732%</i>	<i>0,603%</i>
Tablice z roku 2016	1 094 084 709,33 jp	3 057 440 148,55 jp	4 151 524 857,88 jp
<i>Zmiana procentowa</i>	<i>-22,026%</i>	<i>11,912%</i>	<i>0,396%</i>

Źródło: opracowanie własne

Widać, że zmiana tablic trwania życia przekłada się na zmianę wartości portfela, co oznacza, że nie występuje pełna immunizacja, niemniej jednak relatywne zmiany wartości portfela są dość niskie w porównaniu do relatywnych zmian wartości samych ubezpieczeń na życie bądź samych rent życiowych. Zmiana tablic trwania życia powoduje spadek wartości portfela ubezpieczeń na życie o 22,026% i wzrost wartości portfela rent życiowych o 11,912%, w przypadku zbilansowanego portfela zmiana ta wynosi jednak jedynie 0,396%. Wrażliwość zbilansowanego portfela na zmiany tablic jest więc niska (poniżej 0,5%), jednak istotnie wyższa od wrażliwości zaprezentowanej w tabeli 2. Wynika to z faktu, że model korzysta z założenia o jednakowej względnej zmianie intensywności umieralności niezależnie od wieku, które to założenie było spełnione w przypadku tabeli 2, nie jest zaś spełnione w rzeczywistości, co dobitnie pokazuje powyższy przykład. Mimo to jakość zabezpieczenia jest wciąż dobra nawet przy analizie zmian śmiertelności zgodnych z historyczną ewolucją tablic trwania życia. Podobnie jak w poprzednim przykładzie, pominięto prezentację szczegółowych wyników dla mężczyzn ze względu na zbliżony charakter wniosków.

Na rysunku 1 przedstawiono wpływ historycznych zmian tablic na zmiany wartości portfela przy zastosowaniu optymalnej struktury portfela. Jest on rozszerzeniem danych przedstawionych w tabeli 3 (zamiast czterech wybranych

lat uwzględniono tu wszystkie możliwe kombinacje teoretycznych i rzeczywistych tablic trwania życia na podstawie dostępnej historii publikacji GUS). Na osi pionowej zaznaczono rok tablic trwania życia, które wykorzystano do kalkulacji składki oraz do obliczenia optymalnej struktury portfela, zaś na osi poziomej zaznaczono rok tablic trwania życia, które wykorzystano do rekalkulacji wartości portfela. Jako że w rzeczywistości aktualizacja wartości portfela odbywa się z wykorzystaniem tablic nowszych, a nie starszych, należy zwrócić uwagę zwłaszcza na prawą górną część wykresu (ponad przekątną)<sup>22</sup>.



**Rysunek 1. Wpływ zmian tablic trwania życia na wartość portfela ubezpieczeniowego przy zachowaniu optymalnej struktury portfela**

Źródło: opracowanie własne

Na wykresie tłem z kropkami oznaczono te kombinacje, dla których zmiana tablic trwania życia spowodowała wzrost wartości portfela (np. dla kombinacji

<sup>22</sup> Wartości poniżej przekątnej zostały zaprezentowane dla pełnego obrazu, są to jednak przypadki abstrakcyjne (rzeczywista śmiertelność kształtuje się zgodnie z tablicami z roku wcześniejszego niż tablice użyte do wyznaczenia składki). Wartości na przekątnej są oczywiście równe 0.

(1993, 2007) wartość ta wynosi 0,91%, czyli jeżeli zakład ubezpieczeń skalkulował składkę dla obu produktów na podstawie tablic trwania życia dla roku 1993, zaś faktyczna umieralność przez cały okres ubezpieczenia kształtowała się zgodnie z tablicami trwania życia dla roku 2007, to aktuarialna wartość bieżąca na moment zawarcia umów ubezpieczenia rzeczywistych wypłat zakładu ubezpieczeń będzie wyższa od wartości zakładanej o 0,91%). Tłem bez kropek oznaczono te kombinacje, dla których zmiana tablic trwania życia spowodowała spadek wartości portfela (np. dla kombinacji (2007, 2015) wartość ta wynosi -0,48%, czyli jeżeli zakład ubezpieczeń skalkulował składkę dla obu produktów na podstawie tablic trwania życia dla roku 2007, zaś faktyczna umieralność przez cały okres ubezpieczenia kształtowała się zgodnie z tablicami trwania życia dla roku 2015, to aktuarialna wartość bieżąca na moment zawarcia umów ubezpieczenia rzeczywistych wypłat zakładu ubezpieczeń będzie niższa od wartości zakładanej o 0,48%). Im ciemniejszy kolor, tym wyższe odchylenie od zakładanego poziomu wypłat. Analizę przeprowadzono w ujęciu dyskretnym (dla 729 możliwych kombinacji tablic trwania życia), na wykresie przedstawiona jest jednak „uciąglona” wersja, co ma wyraźniej zobrazować otrzymane wyniki.

Jakość zabezpieczenia mierzona jest za pomocą następujących mierników:

- Maksymalne odchylenie *in minus*:

$$s^{(-)} = \min_{t,u} \left( \frac{V_t - V_u}{V_t} \right). \quad (5.12)$$

- Maksymalne odchylenie *in plus*:

$$s^{(+)} = \max_{t,u} \left( \frac{V_t - V_u}{V_t} \right). \quad (5.13)$$

- Średnie odchylenie:

$$s^{(avg)} = \frac{1}{N} \cdot \sqrt{\sum_{t,u} \left( \frac{V_t - V_u}{V_t} \right)^2}. \quad (5.14)$$

We wszystkich przedstawionych wzorach wykorzystano następujące oznaczenia:

- $t, u \in \{1990, \dots, 2016\}$  oznaczają lata kalendarzowe, dla których dostępne są tablice trwania życia dla Polski publikowane przez GUS,

- $V_t$  oznacza aktuarialną wartość bieżącą przyszłych wypłat obliczoną przy wykorzystaniu tablic z roku kalendarzowego  $t$ :

$$V_t = \psi A_x^{(t)} + (1 - \psi) \ddot{a}_x^{(t)},$$

- $A_x^{(t)}$  oznacza aktuarialną wartość bieżącą przyszłych wypłat z tytułu dożywotniego ubezpieczenia na życie dla osoby w wieku  $x$ , obliczoną przy wykorzystaniu tablic z roku kalendarzowego  $t$ ,
- $\ddot{a}_x^{(t)}$  oznacza aktuarialną wartość bieżącą przyszłych wypłat z tytułu dożywotniej renty życiowej dla osoby w wieku  $x$ , obliczoną przy wykorzystaniu tablic z roku kalendarzowego  $t$ ,
- $N$  oznacza liczbę wszystkich możliwych kombinacji tablic trwania życia i wynosi 729 (27 dostępnych tablic dla lat 1990, ..., 2016).

Można zauważyć, że odchylenia wartości portfela od wartości startowej nie są duże i mieszczą się w przedziale od  $-0,93\%$  (największe odchylenie *in minus*) do  $0,91\%$  (największe odchylenie *in plus*), ze średnim odchyleniem (obliczonym jako odchylenie standardowe dla 729 obserwacji) na poziomie  $0,37\%$ . W przypadku ograniczenia się tylko do prawej górnej części wykresu (a więc gdyby rzeczywista umieralność kształtowała się na podstawie tablic trwania życia późniejszych niż wykorzystane do kalkulacji składki), średnie odchylenie rośnie do  $0,39\%$ , zaś zaobserwowane odchylenia mieszczą się w przedziale od  $-0,48\%$  do  $0,91\%$ . Nieco gorsze wyniki zaobserwowano dla mężczyzn, gdzie odchylenia wartości portfela od wartości startowej mieszczą się w przedziale od  $-1,31\%$  do  $2,30\%$ , ze średnim odchyleniem na poziomie  $0,62\%$ . W przypadku ograniczenia się tylko do prawej górnej części wykresu, średnie odchylenie maleje do  $0,49\%$ , zaś zaobserwowane odchylenia mieszczą się w przedziale od  $-1,31\%$  do  $0,91\%$ . Otrzymane wyniki świadczą o dobrym zabezpieczeniu portfela przed zmianami tablic trwania życia.

## 6. Porównanie metody analitycznej z podejściem opartym na duracji

Przedstawiona w rozdziale 5 metoda analityczna, służąca ustaleniu optymalnej struktury portfela ubezpieczeniowego, zabezpieczającej przed ryzykiem długowieczności, może być porównywana do podejścia opartego na duracji śmiertelności. Oba podejścia dążą do wyznaczenia struktury w portfelu składającym się tylko z dwóch produktów: ubezpieczenia na życie oraz renty życiowej; oba

podejścia czerpią korzyści jedynie z naturalnej immunizacji i wykorzystują jedynie wiedzę na temat bieżących tablic trwania życia, bez uwzględniania prognoz ich zmian w przyszłości wynikających z modeli, takich jak model Lee-Cartera czy model CBD. To, co różni oba podejścia, to metoda wyznaczenia optymalnej struktury portfela. W podejściu opartym na duracji przybliża się wrażliwość poszczególnych produktów na zmiany intensywności umieralności za pomocą tzw. efektywnej duracji (opierającej się na wyznaczeniu wpływu zwiększenia i zmniejszenia intensywności umieralności o pewną addytywną wartość  $\Delta\mu$ ), zaś w metodzie analitycznej oblicza się analitycznie pochodną względem zmian intensywności umieralności (przy założeniu, że zmiany te są multiplikatywne). Dodatkowo w metodzie analitycznej zakłada się multiplikatywne, a nie addytywne zmiany intensywności umieralności. Oba modele służą do obliczenia optymalnej struktury portfela przy konkretnych założeniach, które w rzeczywistości zwykle nie są spełnione. Aby więc móc porównać je ze sobą, niezbędna jest budowa modelu, który możliwie wiernie odzwierciedla rzeczywistość. W niniejszym opracowaniu porównanie modeli zostanie dokonane w kontekście zmian tablic trwania życia w Polsce pomiędzy rokiem 1990 a 2016<sup>23</sup>.

Model opiera się na następujących założeniach:

- Zakład ubezpieczeń sprzedaje dwa produkty: ubezpieczenie na życie oraz rentę życiową. Wszyscy ubezpieczeni obchodzą urodziny 31 grudnia, dodatkowo wszyscy, którzy chcą zakupić ubezpieczenie na życie, urodzili się w tym samym roku i wszyscy, którzy chcą zakupić rentę życiową, również urodzili się w tym samym roku. Dodatkowo przyjmuje się, że wszyscy ubezpieczeni są kobietami<sup>24</sup>.
- Dnia 31 grudnia 1990 r. zakład ubezpieczeń sprzedaje 100 000 polis, może jednak dowolnie wybrać, jaki odsetek polis będą stanowiły ubezpieczenia na życie, a jaki renty życiowe.
- Wszystkie polisy sprzedawane przez zakład ubezpieczeń są polisami terminowymi sprzedawanymi na okres 26 lat, nie dłużej jednak niż do ukończenia przez ubezpieczonego 100 lat<sup>25</sup>.
- Suma ubezpieczenia w ubezpieczeniu na życie wynosi 100 000 jednostek i wypłacana jest na koniec roku, w którym nastąpił zgon ubezpieczonego.

<sup>23</sup> Wybór takiego horyzontu czasowego wynika z dostępności danych – pełne tablice trwania życia dla Polski są publikowane przez GUS od roku 1990.

<sup>24</sup> Analiza przeprowadzona w sytuacji, gdy wszyscy ubezpieczeni są mężczyznami potwierdziła analogiczny charakter wniosków.

<sup>25</sup> Terminowy charakter polis pozwala w pełni wykorzystać dostępne na stronie GUS dane o tablicach śmiertelności dla Polski.

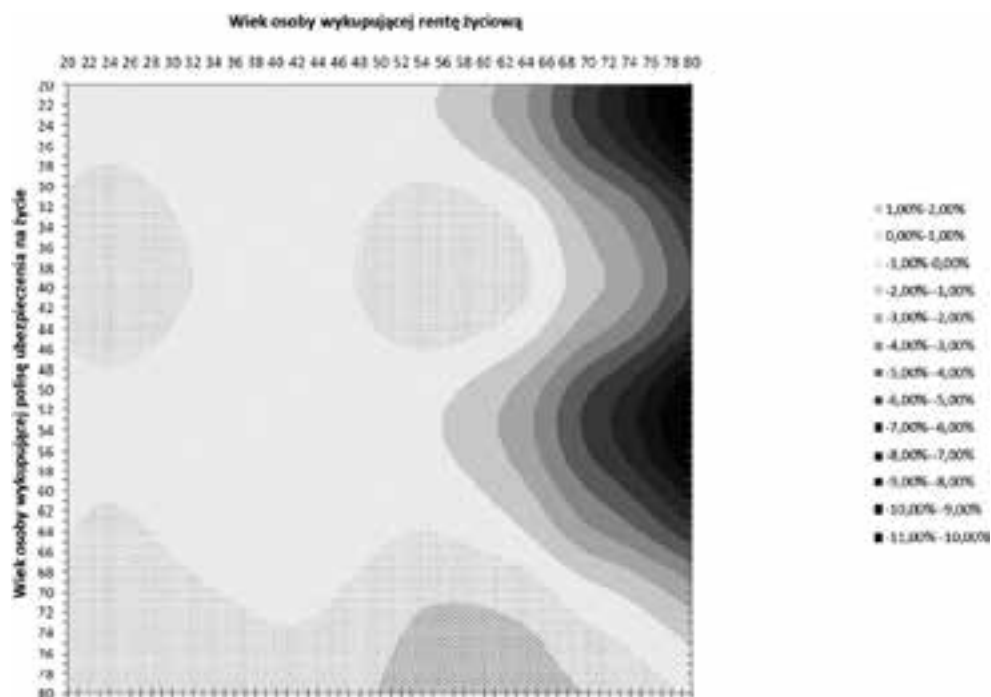
- Wartość pojedynczej raty renty w rencie życiowej wynosi 10 000 jednostek i jest wypłacana na początku każdego roku wszystkim żyjącym ubezpieczonym.
- Składka pobierana przez zakład jest jednorazową składką netto i wpłacana jest przez ubezpieczonych 31 grudnia 1990 r. Przyjmuje się założenie o zerowej marży zakładu ubezpieczeń oraz zerowych innych narzutach na składkę netto, w tym narzutach na koszty.
  - Zakład dokonuje kalkulacji składek w oparciu o tablice trwania życia dla Polski w roku 1990 opublikowane przez GUS<sup>26</sup>.
  - Śmiertelność ubezpieczonych w obu grupach w kolejnych latach kształtuje się doskonale zgodnie z tablicami trwania życia w tych latach opublikowanymi przez GUS.
  - Składka kalkulowana jest przy założeniu, że roczna intensywność oprocentowania wynosi 5%. Przyjmuje się, że założenie to jest spełnione w rzeczywistości we wszystkich latach w analizowanym okresie.
  - Przyjmuje się, że ubezpieczeni nie mają możliwości rezygnacji z umowy ubezpieczenia i trwają w niej aż do końca okresu ochronnego lub śmierci, o ile nastąpi ona wcześniej.
  - W modelu porównuje się wartość oczekiwaną przyszłych wypłat dla całego portfela, obliczoną przez zakład ubezpieczeń według stanu na dzień 31 grudnia 1990 r., w szczególności przy wykorzystaniu tablic trwania życia za rok 1990 (równą łącznej wartości składek wpłaconych przez ubezpieczonych) z wartością oczekiwaną przyszłych wypłat dla całego portfela na dzień 31 grudnia 1990 r. przy założeniu, że śmiertelność wśród ubezpieczonych w każdym roku kształtuje się zgodnie z tablicami trwania życia dla tego roku opublikowanymi przez GUS. Względne odchylenie drugiej wartości oczekiwanej od pierwszej jest wynikiem konkretnej symulacji. Im mniejsze odchylenie co do wartości bezwzględnej, tym lepsze zabezpieczenie portfela przed ryzykiem długowieczności.
  - Rozpatruje się różne scenariusze wieku ubezpieczonych w momencie zawarcia umowy ubezpieczenia (31 grudnia 1990 r.): od 20 do 80 lat.
  - W pierwszym przypadku zakład ubezpieczeń wyznacza strukturę portfela na dzień 31 grudnia 1990 r. przy zastosowaniu metody analitycznej, w drugim przypadku zakład ubezpieczeń wyznacza strukturę portfela przy zastosowaniu podejścia opartego na duracji śmiertelności.

---

<sup>26</sup> Przyjmujemy nierealistyczne założenie, że tablice te są już dostępne w dniu 31 grudnia 1990 r.; założenie to nie ma dużego wpływu na model, równie dobrze można przyjąć, że polisy sprzedawane są w dniu 31 grudnia 1991 r., co prowadziłoby jednak do skrócenia okresu ochronnego o rok.

- W celu oszacowania efektywnych duracji dla ubezpieczenia na życie oraz renty życiowej na potrzeby podejścia opartego na duracji przeanalizowano zmiany wartości produktów wywołane zmianą intensywności umieralności o 0,001<sup>27</sup>.

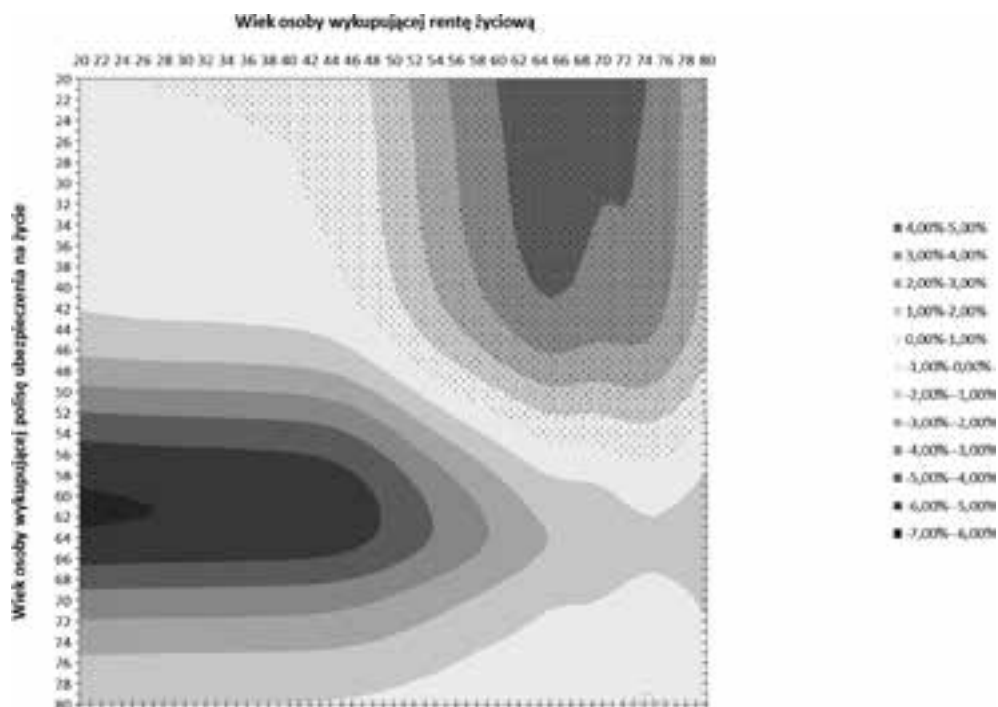
Na wykresach zaznaczono względne odchylenie wartości wypłat zrealizowanych przez zakład ubezpieczeń od zakładanego poziomu przy założeniu różnych kombinacji wieku ubezpieczonych (wiek osób zawierających ubezpieczenie na życie uwzględniony jest na osi pionowej, zaś wiek osób wykupujących rentę życiową – na osi poziomej), oddzielnie dla metody analitycznej i podejścia opartego na duracji. Im ciemniejszy kolor, tym większe odchylenie od zakładanego poziomu. Tłem z kropkami oznaczono przypadki, gdzie faktyczna wartość wypłaconych świadczeń była wyższa od zakładanego poziomu, zaś tłem bez kropek – niższa.



**Rysunek 2. Wrażliwość wartości portfela ubezpieczeniowego na zmiany śmiertelności w zależności od wieku – metoda analityczna**

Źródło: opracowanie własne

<sup>27</sup> Sprawdzono, że wykorzystanie innego poziomu zmiany intensywności umieralności nie prowadzi do istotnej zmiany wyznaczonej optymalnej struktury portfela.



**Rysunek 3. Wrażliwość wartości portfela ubezpieczeniowego na zmiany śmiertelności w zależności od wieku – podejście oparte na duracji**

Źródło: opracowanie własne

Dodatkowo tabela 4 zawiera podsumowanie podstawowych wyników obu metod, takich jak największe odchylenie (*in plus* i *in minus*, policzone zgodnie ze wzorami 5.13 i 5.14), średnie odchylenie (obliczone jako średnia z 3721 rozpatrywanych kombinacji wieku ubezpieczonych zgodnie ze wzorem 5.15) oraz liczba kombinacji, w których określona metoda daje lepszy wynik (odchylenie wartości wypłat od zakładanego poziomu jest mniejsze co do wartości bezwzględnej).

**Tabela 4. Podsumowanie wrażliwości portfeli dla metody analitycznej i podejścia opartego na duracji na zmiany tablic trwania życia**

	Metoda analityczna	Podejście oparte na duracji
Maksymalne odchylenie <i>in minus</i>	-10,35%	-6,23%
Maksymalne odchylenie <i>in plus</i>	1,79%	4,47%
Średnie odchylenie	2,35%	2,83%
Liczba przypadków, gdy metoda daje lepszy wynik	2585	1136

Źródło: opracowanie własne



Na podstawie przedstawionych wykresów i tabeli można wyciągnąć następujące wnioski:

- W przypadku zastosowania podejścia opartego na duracji (rysunek 3) „ciemny” obszar zajmuje większą powierzchnię niż w przypadku, gdy optymalna struktura portfela wyznaczona jest za pomocą metody analitycznej (rysunek 2). Oznacza to, że znacznie częściej występują przypadki, w których odchylenie wartości oczekiwanej przyszłych świadczeń, obliczonej przy użyciu rzeczywistych tablic trwania życia w kolejnych latach zgodnie z publikacjami GUS, od wartości oczekiwanej przyszłych świadczeń obliczonej przy użyciu tablic trwania życia z roku 1990, jest duże.
- Dla metody analitycznej w większości przypadków odchylenie wartości portfela wynikające ze zmiany tablic nie przekraczało w ujęciu bezwzględnym 1%. Stosunkowo największe odchylenia zaobserwowano, gdy wiek osoby wykupującej rentę życiową wynosił 70–80 lat, zaś wiek osoby zakupującej ubezpieczenie na życie wynosił 20–30 lub 50–60 lat. Duże odchylenia mogą sugerować, że w przypadku, gdy renta życiowa zawierana jest przez osobę w podeszłym wieku, model przeszacowuje wrażliwość renty na zmiany tablic i przeszacowuje odsetek ubezpieczeń na życie w optymalnej strukturze portfela. Może to też wynikać z tego, że względna poprawa współczynników umieralności dla osób w podeszłym wieku była niższa niż dla osób młodszych, co istotnie znajduje potwierdzenie przy analizie zmian tablic trwania życia w latach 1990–2016.
- Dla metody analitycznej maksymalne odchylenie *in plus*, czyli takie, w którym rzeczywista łączna wartość wypłat jest wyższa od zakładanej w momencie kalkulacji składki, nie przekracza 1,79%, co oznacza, że maksymalna strata zakładu ubezpieczeń jest istotnie ograniczona. Dla podejścia opartego na duracji maksymalne odchylenie *in plus* wynosi aż 4,47%.
- Metoda analityczna daje średnio niższe co do wartości bezwzględnej odchylenie niż podejście oparte na duracji (2,35% vs 2,83%), wyższe jest jednak maksymalne odchylenie *in minus*.
- Dla zdecydowanie większej liczby kombinacji wieku odchylenie jest niższe przy zastosowaniu metody analitycznej w stosunku do podejścia opartego na duracji (2585 kombinacji, w których odchylenie jest mniejsze przy wyznaczeniu optymalnej struktury portfela za pomocą metody analitycznej, oraz 1136 kombinacji, dla których odchylenie jest mniejsze przy zastosowaniu podejścia opartego na duracji). Gdyby poddać analizie najbardziej typowe kombinacje wieku ubezpieczonych (np. ubezpieczenie na życie dla osoby w wieku 30–50 lat, zaś renta życiowa dla osoby w wieku 50–70 lat),

przewaga metody analitycznej jest jeszcze wyższa (395 kombinacji, dla których odchylenie jest mniejsze dla metody analitycznej i tylko 46 kombinacji, dla których mniejsze odchylenie daje podejście oparte na duracji).

Jak wspomniano wcześniej podstawowe różnice pomiędzy metodą analityczną a podejściem opartym na duracji są następujące:

- W metodzie analitycznej wrażliwość portfela na zmiany śmiertelności jest wyznaczana w sposób analityczny, podczas gdy w podejściu opartym na duracji jest ona przybliżana na podstawie zmian wartości wynikających ze zmienionego poziomu intensywności umieralności.
- W podejściu opartym na duracji bada się reakcję wartości portfela na zmiany intensywności umieralności o charakterze addytywnym, podczas gdy w metodzie analitycznej zmiany mają charakter multiplikatywny.

Można by więc powiązać uzyskane wyniki (tzn. lepszą jakość zabezpieczenia w przypadku zastosowania metody analitycznej) z obserwacją, iż rzeczywiste zmiany intensywności umieralności w ostatnich 26 latach w Polsce miały raczej charakter multiplikatywny niż addytywny, co widać w tabeli 5.

**Tabela 5. Względne i absolutne zmiany intensywności umieralności pomiędzy rokiem 1990 a rokiem 2016 w zależności od wieku dla mężczyzn i kobiet**

Wiek	Względna zmiana intensywności umieralności		Absolutna zmiana intensywności umieralności	
	Mężczyźni	Kobiety	Mężczyźni	Kobiety
0	-79%	-79%	-0,0174	-0,0136
10	-63%	-73%	-0,0002	-0,0002
20	-48%	-42%	-0,0007	-0,0002
30	-48%	-48%	-0,0011	-0,0003
40	-50%	-53%	-0,0025	-0,0010
50	-43%	-39%	-0,0050	-0,0016
60	-36%	-35%	-0,0095	-0,0036
70	-37%	-45%	-0,0197	-0,0127
80	-40%	-47%	-0,0503	-0,0397
90	-37%	-38%	-0,1013	-0,0880
100	-37%	-36%	-0,2212	-0,2028

Źródło: opracowanie własne

## 7. Podsumowanie i kierunki dalszych badań

W niniejszym artykule zaprezentowana została nowa metoda wyznaczania optymalnej struktury portfela ubezpieczeniowego w kontekście jego zabezpieczenia przed ryzykiem długowieczności, określona jako metoda analityczna. W toku przeprowadzonych analiz udało się wykazać dobrą jakość zabezpieczenia uzyskaną przy jej zastosowaniu, w szczególności:

- Na prostym przykładzie empirycznym przedstawiono działanie mechanizmu naturalnej immunizacji, dzięki której straty na polisach rentowych są kompensowane zyskami na polisach ubezpieczenia na życie, co istotnie redukuje wrażliwość portfela na zmiany śmiertelności. Analiza przeprowadzona dla różnych kombinacji wieku ubezpieczonych pokazuje, że po zastosowaniu immunizacji zmiany wartości portfela wskutek zmian intensywności umieralności zostały mocno ograniczone.
- Jakość zabezpieczenia uzyskanego za pomocą metody analitycznej została porównana z jakością zabezpieczenia uzyskanego za pomocą podejścia opartego na duracji (metoda immunizacji zaproponowana w minionym dziesięcioleciu przez tajwańskich uczonych) na tle historycznych zmian śmiertelności w Polsce w latach 1990–2016. Dla większości rozpatrywanych kombinacji wieku, jak również średnio dla badanej próby, wyniki uzyskane za pomocą metody analitycznej były lepsze, a wrażliwość portfela na zmiany śmiertelności mniejsza niż w przypadku podejścia opartego na duracji.

Mimo iż częściowe zabezpieczenie za pomocą metody analitycznej może występować samoistnie w portfelach ubezpieczeniowych składających się z rent życiowych i ubezpieczeń na życie, to jednak nie da się łatwo zmienić struktury portfela ubezpieczeniowego tak, aby była ona równa strukturze wyznaczonej na podstawie optymalizacji w celu uzyskania pełnego zabezpieczenia. Ze względu na ten problem zastosowanie naturalnej immunizacji pozostaje ograniczone w praktyce ubezpieczeniowej, niemniej jednak można wskazać kilka obszarów, w których nawet częściowe zabezpieczenie może przynosić korzyści dla zakładu, np.:

- Taryfikacja produktów: jeżeli po wyliczeniu optymalnej struktury portfela okazuje się np., że zakład ma w rzeczywistym portfelu za mało polis ubezpieczenia na życie, może obniżyć składkę za te produkty, aby zwiększyć popyt na nie. Potencjalna strata z tytułu zbyt niskiej składki będzie rekompensowana zyskiem z tytułu lepszego zabezpieczenia przed ryzykiem długowieczności.
- Zarządzanie ryzykiem w zakładzie ubezpieczeń: informacja o tym, że część portfela jest zabezpieczona przed ryzykiem długowieczności może być

wykorzystana przy analizach tzw. „apetytu na ryzyko” czy wyliczeniach wymogu wypłacalności (mniejsza faktyczna ekspozycja na ryzyko związana z wystąpieniem naturalnej immunizacji na części portfela może zmniejszać wymóg kapitałowy, a zakład może sprzedawać więcej polis w ramach ustalonych limitów, czyli tzw. „apetytu na ryzyko”).

- Zakup dodatkowych instrumentów zabezpieczających przed ryzykiem długowieczności: rozważając decyzję o zakupie dodatkowych instrumentów zabezpieczających (jak np. wspomniane we wstępie *longevity bonds* czy *longevity swaps*), zakład może uwzględnić tylko część portfela, niezabezpieczoną przez polisy ubezpieczenia na życie, co może ograniczyć koszt tych instrumentów.

Przedstawione wyżej przykłady empirycznych zastosowań rozważań nad naturalną immunizacją pokazują, że jest to metoda, która może z sukcesem być wykorzystywana przez zakłady ubezpieczeń. Korzyści płynące z tej metody mogą być jeszcze większe w przypadku dalszego jej udoskonalenia.

Jest kilka obszarów, w których możliwe są dalsze badania. Pierwszym z nich jest rozszerzenie metody na większą liczbę produktów (np. dodanie ubezpieczeń na życie i dożycie) lub rozważanie heterogenicznych portfeli umów (w miejsce założenia, że konkretny produkt sprzedawany jest osobom w tym samym wieku i charakteryzujących się tą samą śmiertelnością można założyć istnienie podportfeli osób o różnym wieku, różnej płci i różnej śmiertelności). Dodanie do analizy nowych produktów lub nowych portfeli ubezpieczonych może jednak prowadzić do istotnego zwiększenia poziomu skomplikowania obliczeń koniecznych do wyznaczenia optymalnej struktury portfela. Drugi obszar dalszych badań wynika z krótkiej historii publikacji pełnych tablic trwania życia przez GUS (zaledwie 27 lat). Warto przeprowadzić podobne analizy porównawcze dla kraju, dla którego dostępna jest dłuższa historia tablic (USA, Wielka Brytania, Niemcy), można też skorzystać z tablic publikowanych w ramach Human Mortality Database, zawierających dane dla Polski od roku 1958. Analizy takie mogą być istotne z punktu widzenia oceny jakości zabezpieczenia w długim terminie (produkty ubezpieczeniowe są zwykle długoterminowe, jednakże wpływ długoterminowych zmian nie mógł być zbadany na podstawie polskich tablic trwania życia publikowanych przez GUS). Wreszcie zakłady ubezpieczeń, chcąc korzystać z naturalnej immunizacji, mogą do wyznaczania optymalnej struktury portfela wykorzystywać własne dane z populacji ubezpieczonych<sup>28</sup>. Na koniec, warto porównać jakość zabezpieczenia uzyskanego przez optymalizację portfela za pomocą metody analitycznej

---

<sup>28</sup> Dane te mogą różnić się od oficjalnych tablic trwania życia z uwagi np. na fakt, że decyzję o zakupie ubezpieczenia podejmują ludzie średnio zdrowsi od przeciętnej.

do jakości zabezpieczenia otrzymanego dzięki zastosowaniu modeli prognozujących przyszlą śmiertelność, takich jak np. model Lee-Cartera czy model CBD.

## Bibliografia

- Bijak W., *Praktyczne metody badania niewypłacalności zakładów ubezpieczeń*, Oficyna Wydawnicza SGH, Warszawa 2009.
- Blake D., Morales M., *Longevity Risk and Capital Markets: The 2014–15 Update*, „Journal of Risk and Insurance” 2017, vol. 84, s. 279–297.
- Bowers N., *Actuarial mathematics*, The Society of Actuaries, Schaumburg 1997.
- Cairns A.J.G., Blake D., Dowd K., *A Two Factor Model for Stochastic Mortality with Parameter Uncertainty: Theory and Calibration*, „Journal of Risk and Insurance” 2006, vol. 73, s. 687–718.
- Cox S., Lin Y., *Natural Hedging of Life and Annuity Mortality Risks*, „North American Actuarial Journal” 2007, vol. 11, s. 1–15.
- Gajek L., Ostaszewski K., Zwiesler H.J., *A Primer on Duration, Convexity and Immunization*, „Journal of Actuarial Practice” 2005, vol. 12, s. 59–82.
- Gerber H.U., *Life insurance mathematics*, Springer, Heidelberg 1997.
- Kellison S.G., *The theory of interest*, McGraw-Hill/Irwin, New York 2009.
- Lee R.D., Carter L.R., *Modelling and Forecasting U.S. Mortality*, „Journal of the American Statistical Association” 1992, vol. 87, s. 659–671.
- Luciano E., Regis L., Vigna E., *Delta-Gamma Hedging of Mortality and Interest Rate Risk*, „Insurance: Mathematics and Economics” 2012, vol. 50, s. 402–412.
- Rockafellar R.T., Uryasev S., *Conditional Value-at-Risk for General Loss Distributions*, „Journal of Banking & Finance” 2002, vol. 26, s. 1443–1471.
- Skalba M., *Ubezpieczenia na życie*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 2003.
- Tsai J.T., Wang J.L., Tzeng L.Y., *On the Optimal Product Mix in Life Insurance Companies Using Conditional Value at Risk*, „Insurance: Mathematics and Economics” 2010, vol. 46, s. 235–241.
- Wang C.W., Huang H.C., Hong D.C., *A Feasible Natural Hedging Strategy for Insurance Companies*, „Insurance: Mathematics and Economics” 2013, vol. 52, s. 532–541.
- Wang J.L., Huang H.C., Yang S.S., Tsai J.T., *An Optimal Product Mix for Hedging Longevity Risk in Life Insurance Companies: The Immunization Theory Approach*, „Journal of Risk and Insurance” 2010, vol. 77, s. 473–497.

## Źródła sieciowe

<http://stat.gov.pl/obszary-tematyczne/ludnosc/trwanie-zycia/trwanie-zycia-tablice,1,1.html> (data odczytu: 28.07.2017).

\* \* \*

## **Natural immunization of an insurance portfolio against longevity risk**

### **Abstract**

The aim of the article is the analysis of the possibilities for natural immunization of an insurance portfolio against longevity risk. Since different insurance products are impacted by increasing life expectancy of policyholders in a different way (life annuity payments increase, whereas payment due to life insurance policies decrease), there is a possibility of determining the portfolio structure in a way minimising the risk of the changes in the value of the total portfolio. The article presents a model built by the author, which can be used in order to determine the optimal portfolio structure. The efficiency of this model to hedge against longevity risk is then compared to other methods proposed in the literature of natural immunization. The comparison is performed with the use of historical changes in mortality in Poland based on official mortality tables published by the Central Statistical Office (GUS).

**Keywords:** longevity risk, immunization, mortality tables, life insurance, life annuity, duration