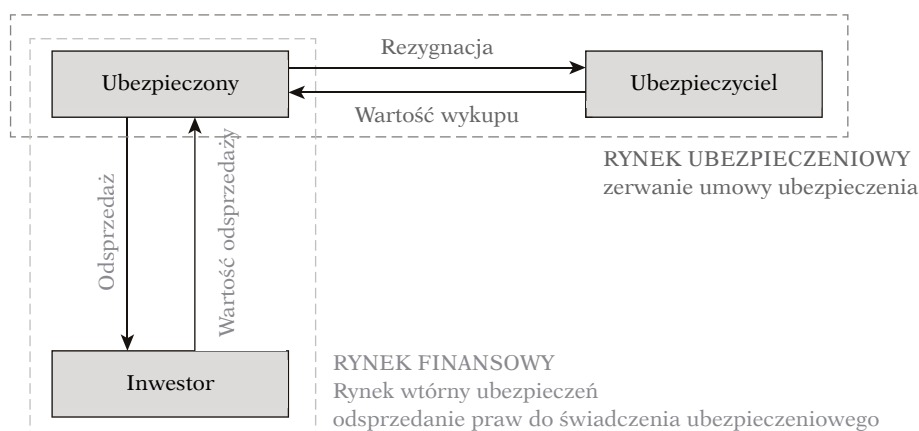


Wycena i optymalizacja umów na wtórnym rynku ubezpieczeń³

1. Wstęp

Problemy zabezpieczenia potrzeb finansowych osoby posiadającej ubezpieczenie na życie zazwyczaj są związane z poważną chorobą, która wymaga kosztownej diagnostyki i leczenia. Mogą także dotyczyć sytuacji finansowej osób w wieku emerytalnym, które potrzebują pieniędzy na utrzymanie się lub podniesienie standardu życia.



Rysunek 1. Schemat pierwotnego i wtórnego rynku ubezpieczeń

Źródło: na podstawie: H.S. Kim, *Life settlement in US*, Research report in KIDI, 2009

¹ Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu, Wydział Zarządzania, Informatyki i Finansów, Katedra Statystyki.

² Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu, Wydział Zarządzania, Informatyki i Finansów, Katedra Statystyki.

³ Praca naukowa częściowo finansowana ze środków na naukę w latach 2013–2016 jako projekt badawczy nr UMO-2013/09/B/HS4/00490 pt. „Niestandardowe wieloosobowe produkty ubezpieczeniowe uwzględniające zależności między ubezpieczonymi”.

Jednym ze sposobów otrzymania pieniędzy pochodzących z ubezpieczenia na życie jest odstąpienie od umowy ubezpieczenia. Ubezpieczyciel zobowiązany jest do wypłacenia ubezpieczonemu sumy wykupu odpowiadającej rezerwie składek, pomniejszonej o koszty związane z likwidacją ubezpieczenia. Istnieją także inne możliwości uzyskania przez ubezpieczonego wcześniejszych gratyfikacji finansowych pochodzących z ubezpieczenia na życie. Jedną z nich jest zakup ubezpieczenia z dodatkową opcją, umożliwiającą ubezpieczonemu uzyskanie części świadczenia z tytułu śmierci jeszcze za życia (*Accelerated Death Benefits* – ADBs) – np. w sytuacji, gdy ubezpieczony jest śmiertelnie chory. W takim przypadku beneficjenci nadal mogą otrzymać świadczenie po śmierci ubezpieczonego, jednak pomniejszone o kwotę, którą uzyskał on wcześniej. Niekiedy firmy ubezpieczeniowe umożliwiają dokupienie opcji umożliwiającej przyspieszoną wypłatę świadczenia z tytułu śmierci po zdiagnozowaniu choroby. Taka elastyczność ubezpieczycieli jest spowodowana rozwijającym się rynkiem wtórnym ubezpieczeń na życie. Osoba ubezpieczona może bowiem sprzedać prawa do świadczenia osobom trzecim (indywidualnemu inwestorowi lub firmie zajmującej się skupem ubezpieczeń) za kwotę, która jest większa niż wartość wykupu, a mniejsza niż suma ubezpieczenia z tytułu śmierci. Inwestor przejmuje wtedy opłatę składek za ubezpieczenie, a w razie śmierci ubezpieczonego otrzymuje całą sumę ubezpieczenia (por. rysunek 1).

Rozważania dotyczące wtórnego rynku ubezpieczeń rozpoczniemy od przybliżenia historii i podstawowej terminologii dotyczącej tego rynku, a także klasyfikacji umów (punkt 2). Następnie wprowadzony zostanie model wielostanowy, służący do modelowania umów odsprzedaży związanych z zachorowaniem ubezpieczonego na ciężką chorobę (punkt 3). W kolejnych rozdziałach omówione zostaną dwa zagadnienia dotyczące umów odsprzedaży praw do świadczenia ubezpieczeniowego. Pierwsze to zagadnienie wyceny tego rodzaju kontraktu (punkt 4), które jest ściśle związane z oczekiwanymi zyskami, jakie może osiągnąć osoba odkupująca prawo do świadczenia (punkt 5). Drugie zagadnienie dotyczy optymalizacji umowy odsprzedaży praw do świadczenia ubezpieczeniowego z punktu widzenia ubezpieczonego i polega na określeniu wysokości tej części nominalnej wartości świadczenia, którą ubezpieczony zamierza odsprzedać, aby wysokość uzyskanych świadczeń i wpłaconych składek maksymalizowała przeciętną wysokość funduszy, którymi dysponuje (punkt 6). Jednym z podejść do optymalizacji tego typu zagadnień jest zastosowanie zasady Bernoulliego, polegającej na maksymalizacji wartości oczekiwanej zdyskontowanej użyteczności, co jednocześnie umożliwia uwzględnienie osobistych skłonności ubezpieczonego do ryzyka. W artykule przedstawiona zostanie także rozszerzona

zasada oparta na teorii RDU (*Rank Dependent Utility Theory*), która – bazując na całce Choqueta – bierze pod uwagę subiektywne podejście ubezpieczonych do wartości prawdopodobieństwa. Ponadto przeprowadzona zostanie analiza dla teorii perspektyw Kahnemana i Twerskiego (*Cumulative Prospect Theory* – CPT), inaczej traktująca zyski i straty.

Wszystkie rozważania są ilustrowane przykładami numerycznymi dotyczącymi umów odsprzedaży praw do świadczeń z ubezpieczeń na życie i dożycie w sytuacji, gdy ubezpieczony zachorował na raka płuc. Do analizy numerycznej wybrane zostały ubezpieczenia na życie i dożycie, gdyż są najbardziej popularnymi ubezpieczeniami sprzedawanymi w Polsce.

2. Wtórny rynek ubezpieczeń

Ubezpieczenia na życie od zawsze były nieformalnie odsprzedawane. Najstarszy (1844 r.) udokumentowany wtórny rynek ubezpieczeń istniał w Wielkiej Brytanii. W tamtym okresie wprowadzane do obrotu wtórnego ubezpieczenia nazywały się TEPs (*traded endowment policies*). Nie istniały jednak żadne dotyczące tego zagadnienia uregulowania prawne. Dopiero w 1911 r. Sąd Najwyższy USA w sprawie Grigsby v. Russell (222 U.S. 149 (1911)) potwierdził prawo ubezpieczonego do odsprzedażania prawa do świadczenia z tytułu śmierci. Sprawa dotyczyła dr. A.H. Grigsby'ego i jego pacjenta Johna C. Burcharda. Pan Burchard, którego nie było stać na opłacenie operacji chirurgicznej, w ramach zapłaty zaoferował dr. Grigsby'emu swoją polisę ubezpieczeniową na życie w zamian za 100 \$ i opłacanie przez lekarza pozostałych składek. Lekarz zgodził się i kiedy J. Burchard zmarł, usiłował odebrać świadczenie z tytułu jego śmierci. Wykonawca testamentu Burcharda zakwestionował umowę, a lekarz oddał sprawę do sądu. Doktor Grigsby wygrał w Sądzie Apelacyjnym, a ostateczny wyrok wydał sędzia Sądu Najwyższego Oliver Wendell Holmes Jr. Zgodnie z decyzją sądu polisa ubezpieczeniowa na życie jest własnością prywatną, którą należy traktować jak zbywalną nieruchomość, a tym samym zawiera ona określone prawa, w tym prawo do: zmiany wyznaczonego beneficjenta, stowienia zabezpieczenia kredytu, pożyczki pod zastaw polisy oraz odsprzedażania polisy innemu podmiotowi⁴.

⁴ <http://www.lisa.org/industry-resources/history-of-life-settlements-in-the-us> (data odczytu: 31.10.2017).

W latach 80. XX w. w USA nastąpił nagły wzrost zachorowań na AIDS, ustabilizowany w 1995 r. Ubezpieczyciele nie mogli wówczas bronić się przed przyjmowaniem do ubezpieczenia osób zarażonych wirusem HIV, gdyż badania pozwalające stwierdzić, czy osoba jest zarażona były bardzo kosztowne. Zmieniło się to w 1997 r., gdy pojawiły się tanie nieinwazyjne testy pozwalające szybko przekonać się, czy kandydat do ubezpieczenia jest nosicielem groźnego wirusa. Stały się one głównym narzędziem przesiewowym stosowanym przez underwriterów przy przyjmowaniu osób do ubezpieczeń od ryzyka utraty życia i zdrowia. Wprowadzenie testów nie tylko zmniejszyło ryzyko ubezpieczycieli związane z klasyfikacją osób do ubezpieczenia, ale także umożliwiło stworzenie tablic trwania życia dla osób zakażonych wirusem HIV. Wprawdzie regulacje prawne w wielu krajach nie pozwalają na wykorzystanie tego typu tablic przy zawieraniu umów ubezpieczenia, ale umożliwiają one wycenę umów odsprzedaży praw do świadczenia z umów ubezpieczeń na życie⁵.

Do rozwoju wtórnego rynku ubezpieczeń przyczyniło się także zjawisko rozwodów, które się nasiliło w latach 90. XX w. w Wielkiej Brytanii. Rozwody często prowadziły do pogorszenia się sytuacji finansowej jednego z małżonków. Niemożność kontynuowania opłacania polis na życie (szczególnie tych kapitałowych) przez samodzielnie utrzymującą się osobę spowodowała nagły wzrost odsprzedaży ubezpieczeń na życie. Ponadto w 1996 r. Kongres Stanów Zjednoczonych uchwalił ustawę (*Health Insurance Portability and Accountability Act*), która zwalniała wpływy z umów odsprzedaży praw do świadczenia ubezpieczeniowego z podatków dochodowych.

Stopniowe wydłużanie się życia ludzi także wpłynęło na to, że coraz więcej osób decyduje się odsprzedać prawa do świadczenia ze swojej umowy ubezpieczenia na życie. W 2009 r. badania Senackiej Komisji Specjalnej USA dotyczącej problemów starzenia się społeczeństwa dowiodły, że dochód z odsprzedaży polis jest (średnio) ośmiokrotnie wyższy niż dochód wynikający z wykupu ubezpieczeń życiowych osiągany przez firmy ubezpieczeniowe. Rynek północnoamerykański jest największym na świecie rynkiem dla ubezpieczeń na życie. W 2012 r. ponad połowa wszystkich polis ubezpieczeniowych na życie w USA zakończyła się przedwcześnie. Podobną sytuację obserwuje się w wielu innych krajach. Na przykład w 2002 r. w Wielkiej Brytanii odsprzedanych zostało 60% umów na życie.

⁵ B.J. Condon, T. Sinha, *Global Lessons from the AIDS Pandemic: Economic, Financial, Legal and Political Implication*, Springer-Verlag, Berlin 2008.

Od paru lat konsumenci mają możliwość sprzedaży swoich polis na dożycie lub ubezpieczeń emerytalnych profesjonalnym nabywcom, a indywidualni inwestorzy mogą kupować polisy za pośrednictwem sprzedażowych platform internetowych. Ze względu na powszechność zjawiska cesji praw do świadczenia ubezpieczeniowego nadzory finansowe w wielu krajach nakazują ubezpieczycielom informować klientów pragnących zerwać polisę o możliwości odsprzedaży polisy na rynku wtórnym w celu uzyskania większego świadczenia.

W Polsce istnieją platformy internetowe, za pośrednictwem których można dokonać tego typu transakcji, ale nie ma specjalnych uregulowań prawnych dotyczących zawierania tego rodzaju umów.

Na wtórnym rynku ubezpieczeń umowy odsprzedaży prawa do świadczenia z tytułu śmierci są oferowane osobom, które⁶:

- zapadły na ciężką/śmiertelną chorobę (*viatical settlement*),
- są w podeszłym wieku, ale cieszą się dobrym zdrowiem (*life settlement, senior settlement*)⁷.

Umowy typu *viatical settlement* są krótkoterminowe, a decyzja ubezpieczonego jest związana z jego sytuacją zdrowotną. Natomiast umowy typu *life settlement* są długoterminowe, a decyzja ubezpieczonego jest związana z jego sytuacją finansową.

W artykule skupimy się na umowach typu *viatical settlement*, które szczegółowo zostały omówione w następnym punkcie. Więcej informacji dotyczących prawnej strony umów wiatykalnych i związanych z nimi niebezpieczeństw i nadużyć (szczególnie w odniesieniu do rynku w Polsce) znaleźć można w artykule E. Kowalewskiego⁸.

3. Wielostanowy model umów wiatykalnych

Viaticum to słowo pochodzenia łacińskiego oznaczające zaopatrzenie lub zapasy na drogę. W tradycji chrześcijańskiej *wiatyk* oznacza komunię podawaną

⁶ S. Neeraj, *Cashing Out Life Insurance: An Analysis of the Viatical Settlements Market*, RAND Corporation, Santa Monica 2013, http://www.rand.org/pubs/rgs_dissertations/RGSD175 (data odczytu: 31.10.2017).

⁷ V.B. Bhuyan, *Life Markets: Trading mortality and longevity risk with life settlements and linked securities*, Wiley, New York 2009.

⁸ E. Kowalewski, *Risk posed by viatical settlement practices in the Polish life insurance market*, „Wiadomości Ubezpieczeniowe” 2014, nr 4, s. 29–38.

osobie śmiertelnie chorej⁹. Natomiast według definicji słownikowej¹⁰ *viatical settlement* jest transakcją, w której śmiertelnie chory ubezpieczony posiadający polisę na życie odsprzedaje swoje prawo do świadczenia w zamian za natychmiastową płatność części świadczenia z tytułu śmierci. Osobę odsprzedającą prawo do świadczenia z tytułu własnej umowy ubezpieczenia nazywa się wiatorem (*viator*), a osobę kupującą – inwestorem. Tego typu umowy przyjęło się nazywać umowami wiatykalnymi (*viatical contract*).

Wartość odsprzedaży (*Viatical Settlement Payment – VSP*) jest pewnym procentem świadczenia z tytułu śmierci i zależy przede wszystkim od długości dalszego życia osoby odsprzedającej prawo do świadczenia, ponieważ im dłużej żyje osoba odsprzedająca prawa do polisy, tym dłużej osoba odkupująca jest zobligowana opłacać składki, czyli dłużej czeka na świadczenie, a więc wartość odsprzedaży jest niższa. Krajowe Stowarzyszenie Komisarzy Ubezpieczeniowych (*National Association of Insurance Commissioners – NAIC*) w USA wydało w 1993 r. dokument pt. *Viatical Settlement Model Act*, który zawiera wytyczne dotyczące zapobiegania nadużyć oraz zapewnienia dobrych praktyk biznesowych. Wysokość zalecanych przez NAIC stawek procentowych sumy ubezpieczenia w zależności od oczekiwanego przyszłego czasu trwania życia chorego podana została w tabeli 1.

Tabela 1. Wysokości wartości odsprzedaży określone przez NAIC (USA)

Oczekiwany przyszły czas trwania życia ubezpieczonego	Minimalny procent sumy ubezpieczenia
1–6 miesięcy	80%
6–12 miesięcy	70%
12–18 miesięcy	65%
18–24 miesiące	60%
24–36 miesięcy	50%

Źródło: opracowanie własne na podstawie: M.G. Bell, G.V. Powell (red.), *Financing Long-Term Care Needs, America's Health Insurance Plans*, Washington 2005

Okres umowy wiatykalnej, zgodnie z tabelą 1, wydaje się wynosić maksymalnie 3 lata, ale sprawa ta nie jest jednoznacznie uregulowana. Według prawa

⁹ <https://en.wikipedia.org/wiki/Viaticum>; <https://encyklopedia.pwn.pl/szukaj/wiatyk.html> (data odczytu: 31.10.2017).

¹⁰ *Dictionary of Health Insurance and Managed Care*, D.E. Marcinko (red.), Springer Publishing Company, Inc., New York 2006.

osoba ciężko (terminalnie, nieuleczalnie) chora to taka, której oczekiwany przyszły czas trwania życia jest równy 24 miesiące. Dla tych osób świadczenie z tytułu zawarcia umowy odsprzedaży praw do świadczenia jest zwolnione od podatku. Osoby, których oczekiwany czas trwania życia jest dłuższy są zobowiązane zapłacić podatek dochodowy od uzyskanych funduszy, chyba że ich oczekiwany przyszły czas trwania życia jest nie dłuższy niż 36 miesięcy, a uzyskane pieniądze zostaną przeznaczone na pokrycie kosztów opieki medycznej i/lub pielęgnarskiej. Z drugiej strony osoby chore na HIV/AIDS, których oczekiwany przyszły czas trwania życia jest dłuższy niż 4,5 roku, nie są uznawane za osoby ciężko chore. Z tego powodu czasem przyjmuje się, że osobą ciężko chorą jest osoba, której oczekiwany przyszły czas trwania życia jest nie dłuższy niż 4 lata.

Ubezpieczony może odsprzedać prawo do świadczenia ubezpieczeniowego c w całości lub częściowo. Niech więc $\alpha \in [0,1]$ oznacza parametr odsprzedaży. Jeżeli $\alpha = 0$, to umowa wiatykalna nie została zawarta (ubezpieczony nie odsprzedał praw do świadczenia ubezpieczeniowego), natomiast $\alpha = 1$ oznacza, że ubezpieczony sprzedaje prawo do swojego świadczenia w całości. Jeżeli $0 < \alpha < 1$, inwestor odkupił tylko prawa do część α świadczenia c .

Przyjmijmy następujące oznaczenia związane z umową ubezpieczenia życiowego, w której przedmiotem odsprzedaży jest prawo do świadczenia:

x – wiek wstępu (wiek ubezpieczonego w momencie zawarcia umowy ubezpieczenia),

n – okres umowy ubezpieczenia,

p – roczna składka płacona z góry przez cały czas trwania umowy ubezpieczenia (n lat).

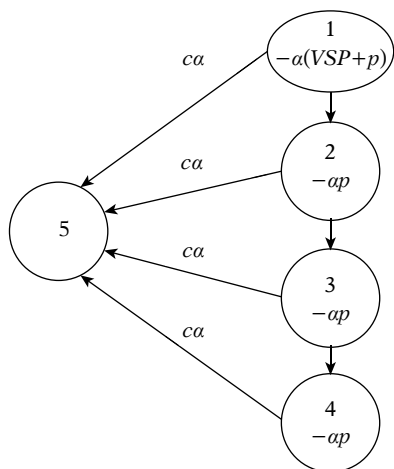
W celu modelowania umowy wiatykalnej zastosowany został model wielostanowy (S, T) , gdzie zbiór S jest przestrzenią stanów, a T jest zbiorem bezpośrednich przejść między nimi¹¹. Opierając się na modelu dla ubezpieczeń od ryzyka ciężkiej choroby¹², zaproponowano model wielostanowy umowy wiatykalnej, którego schemat przedstawiony jest na rysunku 2¹³. Dodatkowo na schemacie

¹¹ J. Dębicka, *Modelowanie strumieni finansowych w ubezpieczeniach wielostanowych*, seria: Statystyka i Ryzyko, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu, Wrocław 2012; S. Haberman, E. Pitacco, *Actuarial Models for Disability Insurance*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton 1999.

¹² J. Dębicka, B. Zmyślona, *Modelling of lung cancer survival data for critical illness insurances*, manuskrypt (dostępne na arXiv:1602.08696, data odczytu: 31.10.2017).

¹³ J. Dębicka, S. Heilpern, *Investor's expected profit from viatical settlements*, Proceedings of 20th AMSE – Applications of Mathematics in Economics, International Scientific Conference, Szklarska Poręba, 30 sierpnia – 3 września 2017, http://amse.ue.wroc.pl/papers/2017/Debicka_Heilpern.pdf (data odczytu: 31.10.2017).

modelu umieszczone zostały przepływy pieniężne z punktu widzenia inwestora, dla którego składki i wielkość wartości odsprzedaży są wydatkami (ujemnymi przepływami pieniężnymi), a świadczenia są wpływami (dodatnimi przepływami pieniężnymi).



PRZESTRZEŃ STANÓW

1 – ubezpieczony jest ciężko chory, a jego oczekiwany przyszły czas trwania życia jest krótszy niż 4 lata

2 – ubezpieczony jest ciężko chory, a jego oczekiwany przyszły czas trwania życia jest krótszy niż 3 lata

3 – ubezpieczony jest ciężko chory, a jego oczekiwany przyszły czas trwania życia jest krótszy niż 2 lata

4 – ubezpieczony jest ciężko chory, a jego oczekiwany przyszły czas trwania życia jest krótszy niż rok

5 – ubezpieczony umiera, będąc ciężko chorym

Rysunek 2. Wielostanowy model umowy odsprzedaży praw do świadczenia ubezpieczeniowego wraz z przepływami pieniężnymi inwestora

Źródło: opracowanie własne

Zakładamy, że realizację umowy wiarygodnej (strukturę probabilistyczną modelu) opisuje dyskretny proces stochastyczny $\{X_k(t); t \in \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$, gdzie k jest rokiem, liczącym od początku umowy ubezpieczenia życiowego, w którym ubezpieczony ciężko zachorował. Przyjmujemy, że $\{X_k(t); t \in \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$ jest niejednorodnym łańcuchem Markov, dla którego $\{\mathbf{Q}_k(t)\}_{t=0}^3$ jest ciągiem macierzy prawdopodobieństw przejść między stanami, gdzie $\mathbf{Q}_k(t) = (q_{ij}(t; k))_{i,j=1}^5$ i $q_{ij}(t; k) = P(X_k(t+1) = j | X_k(t) = i)$. Elementy $\mathbf{Q}_k(t)$ mogą być określone na podstawie wielostanowych tablic trwania życia dla wybranych chorób¹⁴.

¹⁴ J. Dębicka, B. Zmyślona, *Modelling of lung cancer...*

4. Wycena wartości odsprzedaży

Założmy, że ubezpieczony ciężko zachorował w k -tym roku trwania umowy ubezpieczenia ($k = 1, 2, \dots, n$). Oznacza to, że ubezpieczony, będąc w wieku $x + k$, może odsprzedać prawo do świadczenia ubezpieczeniowego. Zakres możliwej wartości odsprzedaży w k -tym roku trwania umowy $VSP(k)$ jest następujący:

$$CSV(k) < VSP(k) < c, \quad (1)$$

gdzie $CSV(k)$ (*Cash Surrender Value*) jest wartością wykupu w k -tym roku trwania umowy ubezpieczenia, a c świadczeniem ubezpieczeniowym.

Z punktu widzenia ubezpieczonego umowa wiatykalna będzie dla niego korzystna, kiedy inwestor zaoferuje mu więcej niż ubezpieczyciel, tj. więcej niż wartość wykupu. Zasady wyznaczania $CSV(k)$ nie są jednolite, ale w praktyce wartość wykupu jest mniejsza niż rezerwa składki netto $V(k)$, dlatego można przyjąć, że w (1) $VSP(k)$ jest ograniczona z dołu przez rezerwę składki netto.

Z punktu widzenia inwestora umowa wiatykalna będzie korzystna tylko wtedy, gdy może się spodziewać zysku. Oznacza to, że w (1) $VSP(k)$ nie może przekroczyć sumy oczekiwanej wartości świadczenia $EB(k)$ oraz oczekiwanej wartości składek $EC(k)$, które inwestor jest zobligowany zapłacić w trakcie trwania umowy wiatykalnej (tj. różnicy między oczekiwanymi wpływami i wydatkami).

Zatem zakres możliwej wartości odsprzedaży jest następujący¹⁵:

$$VSP_d(k) = V(k) < VSP(k) < EB(k) + EC(k) = VSP_g(k). \quad (2)$$

Dla ubezpieczenia na życie i dożycie otrzymujemy zatem:

$$EB(k) = \begin{cases} \sum_{t=1}^4 cv^t P(X_k(t) = 5) & \text{dla } k \leq n-4 \\ \sum_{t=1}^{n-k} cv^t P(X_k(t) = 5) + c_d v^{n-k} P(X_k(n-k) = n-k+1) & \text{dla } k > n-4 \end{cases}, \quad (3)$$

gdzie c_d jest świadczeniem z tytułu dożycia przez ubezpieczonego do końca okresu ubezpieczenia n . Ponadto:

¹⁵ J. Dębicka, S. Heilpern, *Investor's...*

$$EC(k) = \begin{cases} \sum_{t=0}^3 -pv^t P(X_k(t) = t+1) & \text{dla } k \leq n-4 \\ \sum_{t=0}^{n-k-1} -pv^t P(X_k(t) = t+1) & \text{dla } k > n-4 \end{cases}. \quad (4)$$

Zauważmy, że gdy $k > n-4$, to kontrakt wiatykalny trwa krócej niż 4 lata, gdyż wcześniej ubezpieczenie kończy się wypłatą świadczenia z tytułu dożycia przez ubezpieczonego do końca umowy ubezpieczenia.

W sytuacji, gdy ubezpieczony odsprzedaje część praw do świadczenia wzór (2) ma postać:

$$\alpha VSP_d(k) = \alpha V(k) < \alpha VSP(k) < \alpha(EB(k) + EC(k)) = \alpha VSP_g(k). \quad (5)$$

Wyznaczenie zakresu wartości odsprzedaży jest możliwe w klasyczny sposób¹⁶ lub przy zastosowaniu wzorów macierzowych¹⁷.

Przykład 1 (*Ubezpieczenie na życie i dożycie – zakres VSP*)

Rozważmy ubezpieczenia na życie i dożycie zakupione przez mężczyzn i kobiety w wieku 20, 30, 40 lat ($x = 20, 30, 40$) do wieku 60, 65 i 70 lat. Przyjmujemy, że suma ubezpieczenia z tytułu śmierci c oraz z tytułu dożycia do końca okresu ubezpieczenia c_d są równe 1 jednostce ($c = c_d = 1$). W celu wyznaczenia składek i rezerw przyjmujemy założenie, że stopa procentowa jest równa 1% ($v = 0,99$) i stosowane są Polskie Tablice Trwania Życia 2008. Przy takich założeniach składki roczne p płacone z góry przez cały okres ubezpieczenia podane zostały w tabeli 2.

Przyjmijmy, że w k -tym roku trwania umowy ubezpieczenia ubezpieczony zachorował na raka płuc. Choroba ta należy do bardzo ciężkich, a przyszły czas trwania życia nie przekracza 4 lat, jeżeli u chorego zdiagnozuje się przerzuty.

Na wykresach (rysunek 3) zilustrowane zostały górne i dolne ograniczenia wartości odsprzedaży dla każdego roku trwania umowy ubezpieczenia. Przy wyznaczaniu $VSP_g(k)$ przyjęto, że stopa procentowa inwestora jest równa 2% ($v = 0,98$). Ponadto do wyznaczenia struktury probabilistycznej modelu kontraktu wiatykalnego wykorzystane zostały Wielostanowe Tablice Trwania Życia

¹⁶ N.L. Bowers, H.U. Gerber, J.C. Hickman, D.A. Jones, C.J. Nesbitt, *Actuarial Mathematics*, Society of Actuaries, Itasca 1986.

¹⁷ J. Dębicka, op.cit.; J. Dębicka, S. Heilpern, *Investor's...*

określone dla osób chorych na raka płuc w Polsce w 2008 r. Skróty w legendzie rysunku 3 oznaczają: [wiek wstępu, okres ubezpieczenia] = $[x, n]$.

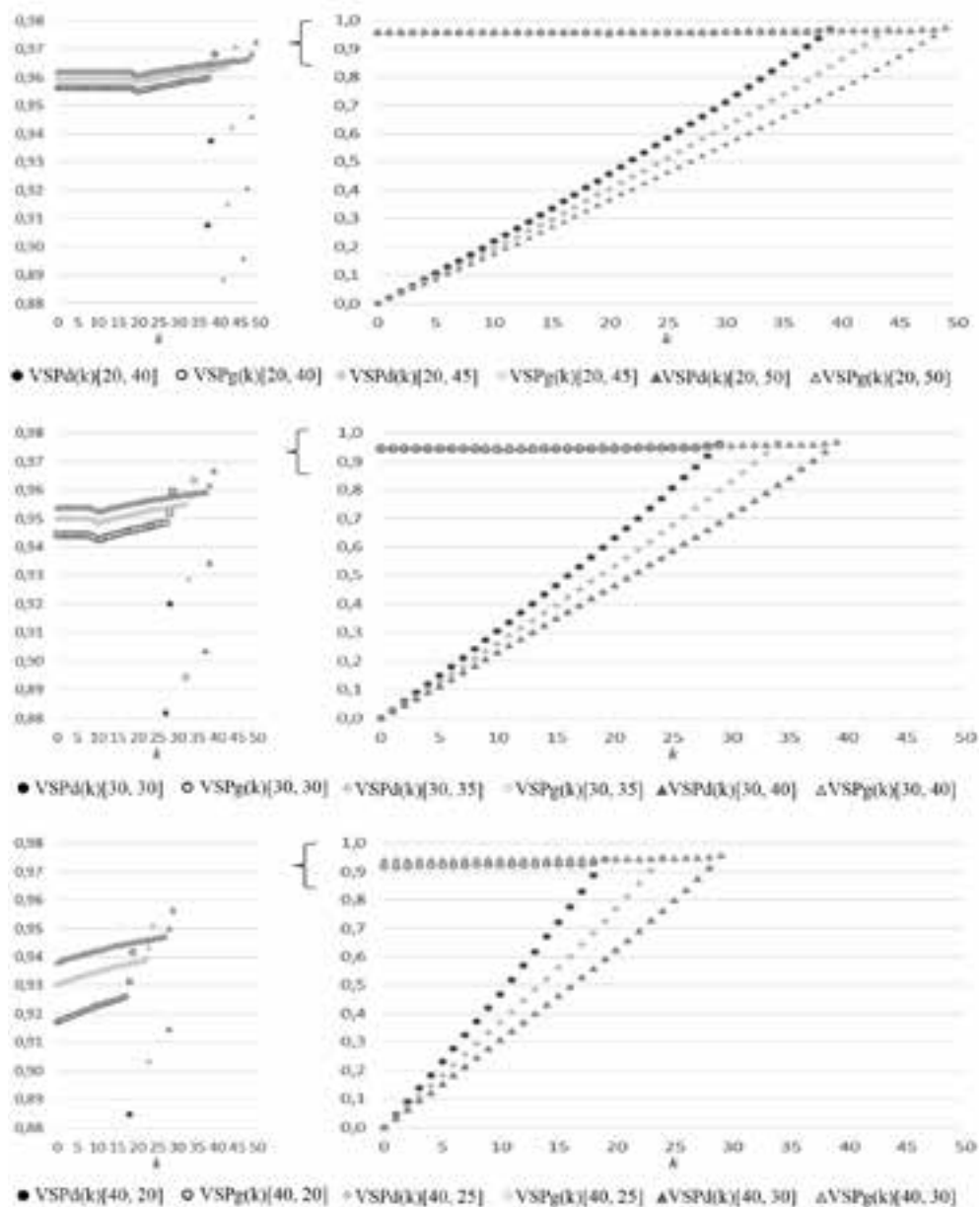
Tabela 2. Składki roczne płacone przez cały okres ubezpieczenia

$[x, n]$	Mężczyzna	Kobieta
[20, 40]	0,021733	0,020715
[20, 45]	0,019397	0,018146
[20, 50]	0,017695	0,016170
[30, 30]	0,030605	0,029165
[30, 35]	0,026457	0,024686
[30, 40]	0,023592	0,021441
[40, 20]	0,048425	0,046157
[40, 25]	0,039306	0,036563
[40, 30]	0,033621	0,030342

Źródło: opracowanie własne

Zauważmy, że zakres wartości odsprzedaży zmniejsza się z kolejnymi latami okresu ubezpieczenia. W danym roku trwania umowy ubezpieczenia zakres *VSP* zależy od tego, ile lat zostało do końca okresu ubezpieczenia. Im krótszy jest ten okres, tym mniejszy jest zakres *VSP*, a ubezpieczony może liczyć na wyższą wartość odsprzedaży. Zauważmy, że w ostatnich latach trwania umowy ubezpieczenia ograniczenia górne *VSP* są coraz większe, co jest bezpośrednio związane z krótszym okresem trwania umowy wiarykalnej, ze względu na wypłatę świadczenia z tytułu dożycia końca umowy ubezpieczenia. Ponadto dla ubezpieczeń zawartych przez 20-latków w okolicy 40 roku życia ($k = 20$) obserwujemy lekkie obniżenie górnego ograniczenia *VSP*, co jest związane ze specyfiką zachorowań na raka płuc¹⁸. Analogiczną sytuację obserwujemy dla 30-latków w dziesiątym roku trwania umowy ubezpieczenia. Wykresy dla kobiet mają podobny kształt, dlatego też nie zostały zamieszczone.

¹⁸ J. Dębicka, B. Zmyślona, *Construction of Multi-State Life Tables for Critical Illness Insurance – Influence of Age and Sex on the Incidence of Health Inequalities*, „Silesian Statistical Review” 2016, no. 14, s. 41–63.



Rysunek 3. Zakres wartości odsprzedaży dla wybranych umów ubezpieczenia mężczyzn

Źródło: opracowanie własne

5. Zakres zysków inwestora

Oczekiwany zysk inwestora $EP_\alpha(k)$ na początku k -tego roku trwania umowy ubezpieczenia jest różnicą między oczekiwanymi świadczeniami a oczekiwanymi składkami oraz wartością odsprzedaży:

$$EP_\alpha(k) = EB_\alpha(k) + EC_\alpha(k) - \alpha VSP(k).$$

Bazując na (5), można określić zakres możliwych zysków inwestora. Mamy więc:

$$EP_\alpha^{MAX}(k) = \alpha(EB(k) + EC(k) - VSP_d(k)) = \alpha(EB(k) + EC(k) - V(k))$$

oraz

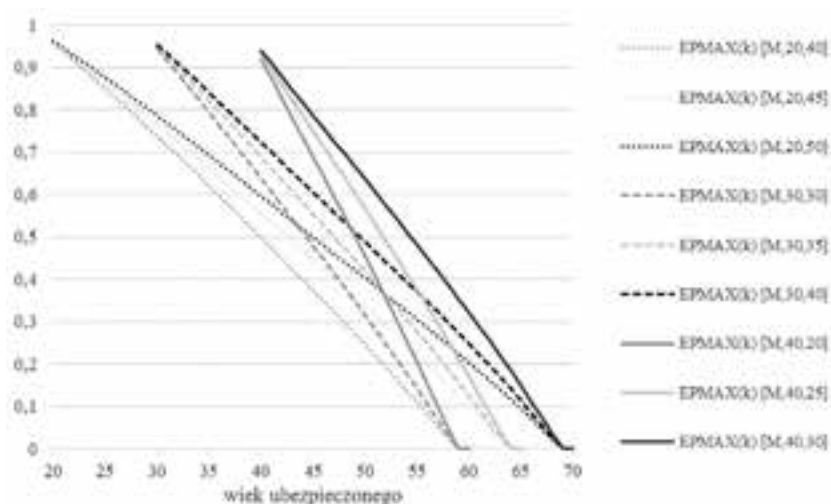
$$EP_\alpha^{MIN}(k) = \alpha(EB(k) + EC(k) - VSP_g(k)) = 0.$$

Zatem:

$$0 < E_\alpha P(k) < \alpha(EB(k) + EC(k) - V(k)).$$

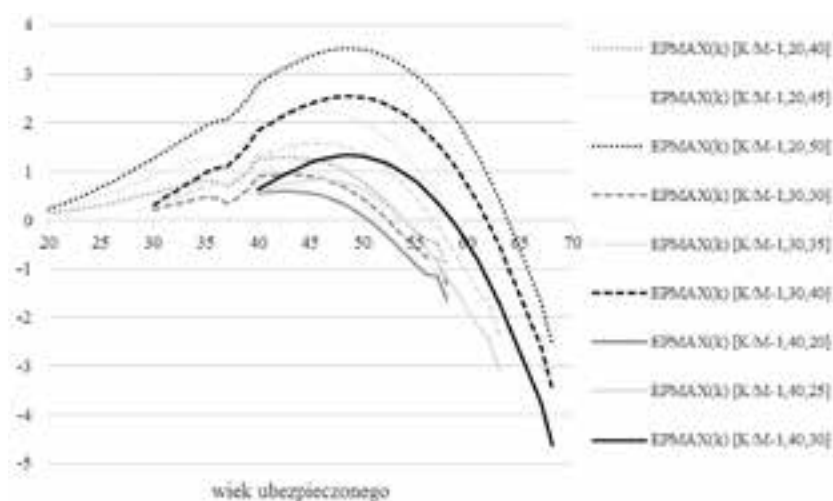
Przykład 2 (Ubezpieczenie na życie i dożycie – zakres zysków inwestora)

Na rysunku 4 przedstawione zostały wykresy oczekiwanych maksymalnych zysków inwestora $EP_1^{MAX}(k)$ dla ubezpieczeń (określonych w przykładzie 1) zawartych przez mężczyzn.



Rysunek 4. Zakres maksymalnych zysków inwestora

Źródło: opracowanie własne



Rysunek 5. Procentowa różnica między maksymalnym zakresem zysków inwestora przy zakupie praw do świadczenia od kobiety i mężczyzny

Źródło: opracowanie własne

Wykresy oczekiwanych maksymalnych zysków inwestora $EP_1^{MAX}(k)$ dla ubezpieczeń zawartych przez kobiety wyglądają podobnie, ale różnią się wartościami. Rysunek 5 jest ilustracją graficzną tych różnic, wyliczonych zgodnie ze wzorem:

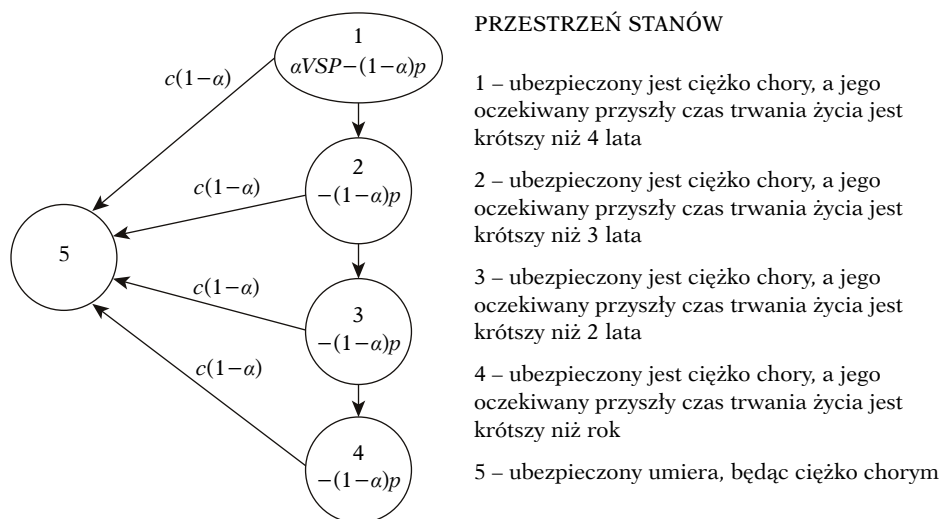
$$\left(\frac{EP_1^{MAX,K}(k)}{EP_1^{MAX,M}(k)} - 1 \right) \cdot 100\%,$$

gdzie $EP_1^{MAX,K}(k)$, $EP_1^{MAX,M}(k)$ oznaczają odpowiednio maksymalny oczekiwany zysk dla kobiet i mężczyzn. Zauważmy, że zazwyczaj dla inwestora korzystniejsze jest odkupienie prawa do świadczenia od kobiety, z wyjątkiem końcowego okresu trwania umowy ubezpieczenia, gdy zyski osiągnięte z odkupienia ubezpieczenia od mężczyzny mogą być nawet o około 5% większe.

6. Optymalny poziom odsprzedaży

Problem optymalizacji umowy odsprzedaży praw do świadczenia ubezpieczeniowego z punktu widzenia ubezpieczonego polega na określeniu wysokości tej części nominalnej wartości świadczenia, którą ubezpieczony zamierza odsprzedać, aby wysokość uzyskanych świadczeń i wpłaconych składek maksymalizowała

przeciętną wysokość funduszy, którymi dysponuje ubezpieczony. Wszystkie przepływy pieniężne powstałe w wyniku umowy odsprzedaży praw do świadczenia ubezpieczeniowego zostały przedstawione na wykresie (rysunek 6).



Rysunek 6. Wielostanowy model umowy odsprzedaży praw do świadczenia ubezpieczeniowego wraz z przepływami pieniężnymi ubezpieczonego

Źródło: opracowanie własne

Wysokość funduszu, jakim dysponuje ubezpieczony jest zmienną losową i zależy od realizacji procesu $\{X_k(t) : t = 0, 1, 2, 3, 4\}$. Niech $Y_k(t)$ będzie sumą zdyskontowanych przepływów pieniężnych do roku t , gdzie t jest rokiem trwania umowy wiarykalnej (t jest liczony od momentu zachorowania k). Wartości $Y_k(t) = y_t$ dla wszystkich możliwych realizacji umowy odsprzedaży praw do świadczenia ubezpieczeniowego zostały przedstawione w tabeli nr 3. Umieszczone tam prawdopodobieństwa $P(Y_k = y_t) = q_t$ wyznaczane są na podstawie Wielostanowych Tabeł Trwania Życia dla osób chorych.

Tabela 3. Aktualna wartość przepływów pieniężnych w umowie wiarykalnej z punktu widzenia ubezpieczonego

t	Realizacje procesu $\{X_k(t) : t = 0, 1, 2, 3, 4\}$	$Y_k(t) = y_t$	$P(X_k(t) = 5) = P(Y_k(t) = y_t) = q_t$
1	1 → 5	$y_1 = \alpha VSP(k) - (1 - \alpha)p + v(1 - \alpha)c$	q_1

2	1 → 2 → 5	$y_2 = \alpha VSP(k) - \sum_{i=0}^1 v^i (1-\alpha)p + v^2 (1-\alpha)c$	q_2
3	1 → 2 → 3 → 5	$y_3 = \alpha VSP(k) - \sum_{i=0}^2 v^i (1-\alpha)p + v^3 (1-\alpha)c$	q_3
4	1 → 2 → 3 → 4 → 5	$y_4 = \alpha VSP(k) - \sum_{i=0}^3 v^i (1-\alpha)p + v^4 (1-\alpha)c$	q_4

Źródło: opracowanie własne

Oczekiwana wartość przepływów pieniężnych w umowie odsprzedaży praw do świadczenia jest następująca (por. tabela 3):

$$EY_k = \sum_{t=1}^4 y_t q_t = \alpha VSP(k) - (1-\alpha)p \sum_{t=1}^4 \sum_{i=0}^{t-1} v^i q_t + (1-\alpha)c \sum_{t=1}^4 v^t q_t. \quad (6)$$

Okazuje się, że maksymalizując (6) ze względu na α otrzymujemy¹⁹:

$$\arg \max_{\alpha \in [0,1]} EY_k = \begin{cases} 0 & \text{dla } VSP(k) < \sum_{t=1}^4 \left(v^t c - p \sum_{i=0}^{t-1} v^i \right) q_t \\ 1 & \text{dla } VSP(k) > \sum_{t=1}^4 \left(v^t c - p \sum_{i=0}^{t-1} v^i \right) q_t \end{cases}. \quad (7)$$

Z (7) wynika, że w zależności od wartości odsprzedaży optymalną strategią dla ubezpieczonego jest odsprzedać w całości prawo do świadczenia ubezpieczeniowego ($\alpha = 1$), albo wcale nie podpisywać umowy na wtórnym rynku ubezpieczeń ($\alpha = 0$).

Średnia wartość przepływów pieniężnych jest tylko jednym z elementów oceny umowy pod względem finansowym. Istnieje obszerna literatura na temat różnych rodzajów ludzkich zachowań w ryzykownych warunkach, a poważna choroba to zdecydowanie taka sytuacja. Dlatego też należy rozważyć optymalne decyzje ubezpieczonego, a w szczególności optymalny wybór wartości parametru odsprzedaży α . Jednym ze sposobów znalezienia optymalnego rozwiązania jest skorzystanie z zasady Bernoulliego (która polega na maksymalizacji oczekiwanej użyteczności zdyskontowanych przepływów pieniężnych powstających w czasie realizacji umowy). Kolejnym krokiem jest wzięcie pod uwagę

¹⁹ J. Dębicka, S. Heilpern, *The optimization of insurance contracts on the viatical market*, manuskrypt.

subiektywnego podejścia ubezpieczonego do wartości prawdopodobieństwa. W tym wypadku, w celu znalezienia optymalnego α stosuje się teorię RDU²⁰ oraz teorię perspektyw Kahnemana i Twerskiego (CPT)²¹. W teorii CPT uwzględnia się również fakt, że ludzie traktują zyski i straty w różny sposób.

Założmy, że ubezpieczony podejmuje decyzje zgodnie z zasadami teorii użyteczności²² i maksymalizuje oczekiwaną użyteczność przepływów pieniężnych wynikających z realizacji umowy odsprzedaży $E(U(Y_k))$. Przepływy pieniężne są zdyskontowane, więc zastosujemy użyteczność zdyskontowaną²³, która ma w naszym przypadku następującą postać:

$$E(U(Y_k)) = \sum_{t=1}^4 U(y_t)q_t = \sum_{t=1}^4 \left(u(VSP(k) - (1-\alpha)p) + u((\alpha-1)p) \sum_{i=1}^{t-1} v^i + u((1-\alpha)c)v^t \right) q_t.$$

Globalna funkcja użyteczności $U(y)$ jest wtedy sumą użyteczności $u(y)$ przepływów pieniężnych, w każdym okresie zdyskontowanych do początku zawarcia umowy. Zakładamy, że ubezpieczony ma awersję do ryzyka, co oznacza, że funkcja użyteczności u jest funkcją ciągłą, wklęsłą, rosnącą, taką, że $u(0) = 0$.

Problem polega więc na znalezieniu takiego optymalnego parametru odsprzedaży, aby maksymalizował oczekiwaną użyteczność przepływów pieniężnych wynikających z realizacji umowy, tj.:

$$\alpha_{opt,k} = \arg \max_{\alpha \in [0,1]} E(U(Y_k)).$$

Rozwiązanie tego problemu w świetle teorii użyteczności oraz teorii RDU zostało przedstawione w tabeli 4, a przy założeniu teorii skumulowanych perspektyw Kahnemana i Twerskiego – w tabeli 5.

Po raz pierwszy wymienione teorie użyteczności zostały zastosowane w odniesieniu do znalezienia optymalnego parametru α w umowach odsprzedaży praw do świadczenia z umów ubezpieczenia na całe życie. W przykładzie 3 optymalizujemy parametr odsprzedaży w odniesieniu do umów rynku wtórnego dotyczących ubezpieczeń na życie i dożycie.

²⁰ S. Heilpern, *A rank-dependent generalization of zero utility principle*, „Insurance: Mathematics and Economics” 2003, vol. 33, s. 67–73.

²¹ M. Kałużska, M. Krzeszowiec, *Pricing insurance contracts under Cumulative Prospect Theory*, „Insurance: Mathematics and Economics” 2012, vol. 50, s. 159–166.

²² J. von Neumann, O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton 1944.

²³ J.D. Hey, *Intermediate Microeconomics: People are Different*, Mc Graw-Hill, London 2004.

Tabela 4. Optymalny współczynnik odsprzedaży według uogólnionej teorii użyteczności

Funkcja użyteczności	$u(y) = (y + p)^\beta - p^\beta$
Funkcja zniekształcająca prawdopodobieństwa	$w(q) = \frac{q^\gamma}{(q^\gamma + (1-q)^\gamma)^{1/\gamma}}$
Problem	Optymalny współczynnik odsprzedaży
EU $\max_{\alpha \in [0,1]} E(U(Y_k))$ dla $\gamma = 1$	$\alpha_{opt,k} = \frac{(c+p) \left(c \sum_{t=1}^4 v^t q_t \right)^{1/(\beta-1)}}{\left((VSP(k)+p)^\beta + p^\beta \sum_{k=2}^4 \left(\sum_{i=1}^{t-1} v^i \right) q_t \right)^{1/(\beta-1)} + c^{\beta/(\beta-1)} \left(\sum_{t=1}^4 v^t q_t \right)^{1/(\beta-1)}}$
RDEU $\max_{\alpha \in [0,1]} E(U(Y_k))$ dla $\gamma < 1$	$\alpha_{opt,k} = \frac{(c+p) \left(c \sum_{t=1}^4 v^t w_t \right)^{1/(\beta-1)}}{\left((VSP(k)+p)^\beta + p^\beta \sum_{t=2}^4 \left(\sum_{i=1}^{t-1} v^i \right) w_t \right)^{1/(\beta-1)} + c^{\beta/(\beta-1)} \left(\sum_{t=1}^4 v^t w_t \right)^{1/(\beta-1)}}$ gdzie $w_1 = w(q_1)$, $w_2 = w(q_1 + q_2) - w(q_1)$, $w_3 = w(1 - q_4) - w(q_1 + q_2)$, $w_4 = 1 - w(1 - q_4)$

Źródło: opracowanie własne na podstawie: J. Dębicka, S. Heilpern, *The optimization...*

Dla ubezpieczeń terminowych, takich jak ubezpieczenie na życie i dożycie, wzory na α_{opt} należy zmodyfikować dla $k > n - 4$; por. (3) i (4).

Przykład 3 (Ubezpieczenie na życie i dożycie – optymalny poziom odsprzedaży)

W tabeli 6 podane zostały wartości parametrów użytych do wyznaczenia funkcji użyteczności i funkcji zniekształcającej przyjętych w analizie numerycznej.

Optymalne wartości parametru odsprzedaży zostały wyznaczone w sytuacji, gdy ubezpieczony zachorował w wieku 45, 50, 55, 60, 65 lat ($k = 25, 30, 35, 40, 45$). Dlatego też oznaczenia w legendzie wykresów rozszerzone zostały o jeszcze jeden parametr, mianowicie płeć, wiek wstępu, okres ubezpieczenia, wiek zachorowania – płeć, $x, n, x+k$.

Tabela 5. Optymalny współczynnik odsprzedaży według teorii skumulowanych perspektyw (CTP)

Funkcja użyteczności	$u(y) = \begin{cases} y^\beta & y \geq 0 \\ -\lambda(-y)^\beta & y < 0 \end{cases}, \text{ gdzie } \beta < 1 \text{ i } \lambda > 1$
----------------------	--

Funkcja zniekształcająca prawdopodobieństwo	dla dodatnich przepływów pieniężnych $w_+(q) = \frac{q^{\gamma^+}}{(q^{\gamma^+} + (1-q)^{\gamma^+})^{1/\gamma^+}}$ dla ujemnych przepływów pieniężnych $w_-(q) = \frac{q^{\gamma^-}}{(q^{\gamma^-} + (1-q)^{\gamma^-})^{1/\gamma^-}}$
Problem	Optymalny współczynnik odsprzedaży
CPT $\max_{\alpha \in [0,1]} E(U(Y_k))$ dla $\gamma^+, \gamma^- < 1$	$\alpha_{opt,k} = \max_{\alpha \in \{0, \alpha_{0,k}, \alpha_{1,k}\}} E(U(Y_k)),$ gdzie $\alpha_{0,k} = \frac{p(VSP(k) + p)^{1/(\beta-1)} + B^{1/(\beta-1)}}{(VSP(k) + p)^{\beta/(\beta-1)} + B^{1/(\beta-1)}} \quad \text{dla } \alpha \geq \frac{p}{VSP(k) + p}$ $\alpha_{1,k} = \frac{B^{1/(\beta-1)} - p(\lambda(VSP(k) + p))^{1/(\beta-1)}}{B^{1/(\beta-1)} - \lambda^{1/(\beta-1)}(VSP(k) + p)^{\beta/(\beta-1)}} \quad \text{dla } \alpha < \frac{p}{VSP(k) + p}$ oraz $B = c^\beta \left(\sum_{t=1}^4 v^t w_{+,t} \right) - \lambda p^\beta \left(\sum_{t=2}^4 \left(\sum_{i=1}^{t-1} v^i \right) w_{+,t} \right)$ $w_{+,1} = w_+(q_1), w_{+,2} = w_+(q_1 + q_2) - w_+(q_1),$ $w_{+,3} = w_+(1 - q_4) - w_+(q_1 + q_2), w_{+,4} = 1 - w_+(1 - q_4)$

Źródło: opracowanie własne na podstawie: J. Dębicka, S. Heilpern, *The optimization...*

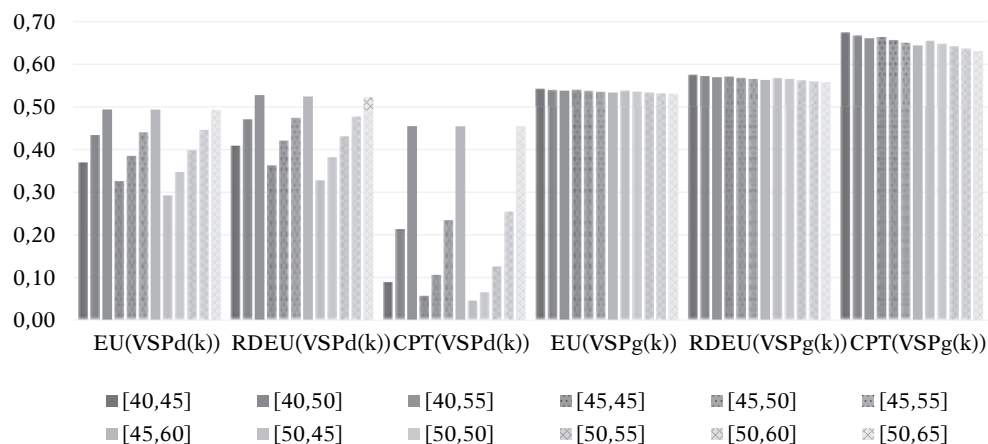
Tabela nr 6. Wartości parametrów funkcji użyteczności i funkcji zniekształcającej prawdopodobieństwo

Teoria	Parametry $u(x)$	Parametry $w(q)$
EU	$\beta = 0,6$	$\gamma = 1$
RDEU	$\beta = 0,6$	$\gamma = 0,61$
CTP	$\beta = 0,88$ $\lambda = 2,25$	$\gamma^+ = 0,61$ $\gamma^- = 0,69$

Źródło: opracowanie własne na podstawie: J. Dębicka, S. Heilpern, *The optimization...*

Rysunek 7 jest ilustracją graficzną optymalnego poziomu parametru odsprzedaży dla ubezpieczenia zawartego przez mężczyznę w wieku 20 lat z okresem ubezpieczenia do 60, 65 i 70 roku życia. Optymalny parametr odsprzedaży został wyznaczony dla górnego i dolnego ograniczenia wartości odsprzedaży, w sytuacji, gdyby ubezpieczony zachorował w wieku 45, 50, 55, 60, 65 lat, dla każdej z teorii użyteczności osobno. Zauważmy, że im wyższa wartość odsprzedaży VSP, tym optymalny parametr odsprzedaży jest większy. Obserwując wyniki dla dolnego ograniczenia VSP wyraźnie widzimy, że w im późniejszym

wieku ubezpieczony zachoruje, tym większą część praw do świadczenia mógłby odsprzedać. Porównywalne wartości parametru odsprzedaży uzyskuje się dla teorii EU i RDEU, a najmniejsze dla CPT. Natomiast dla górnego ograniczenia VSP wyraźnie wyższe wartości parametru odsprzedaży obserwujemy dla teorii CPT, jednak niezależnie od przyjętej teorii moment zachorowania nie ma większego wpływu na wartość parametru odsprzedaży i dla EU i RDEU waha się między 50 a 60%, a w przypadku CPT – między 60 a 70%.



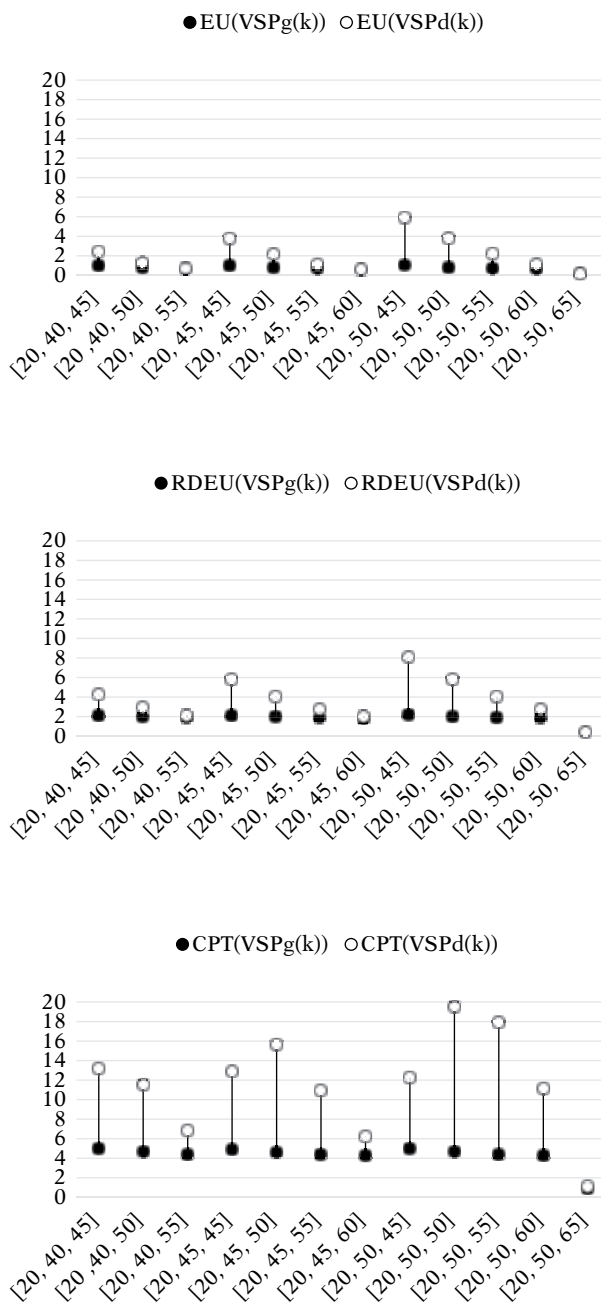
Rysunek 7. Optymalny poziom parametru odsprzedaży dla ubezpieczenia zawartego przez mężczyznę w wieku 20 lat ($x = 20$) na okres ubezpieczenia $n = 40, 45, 50$, w sytuacji, gdyby zachorował w wieku $k = 25, 30, 35, 40, 45$ lat ($[n, k]$)

Źródło: opracowanie własne

Analogiczny do rysunku 7 wykres skonstruowany dla kobiet okazał się podobny. Dlatego na rysunku 8 zamieszczone zostały procentowe różnice między optymalnymi parametrami odsprzedaży dla mężczyzny $\alpha_{opt,k}^M$ i kobiety $\alpha_{opt,k}^K$ według następującej formuły:

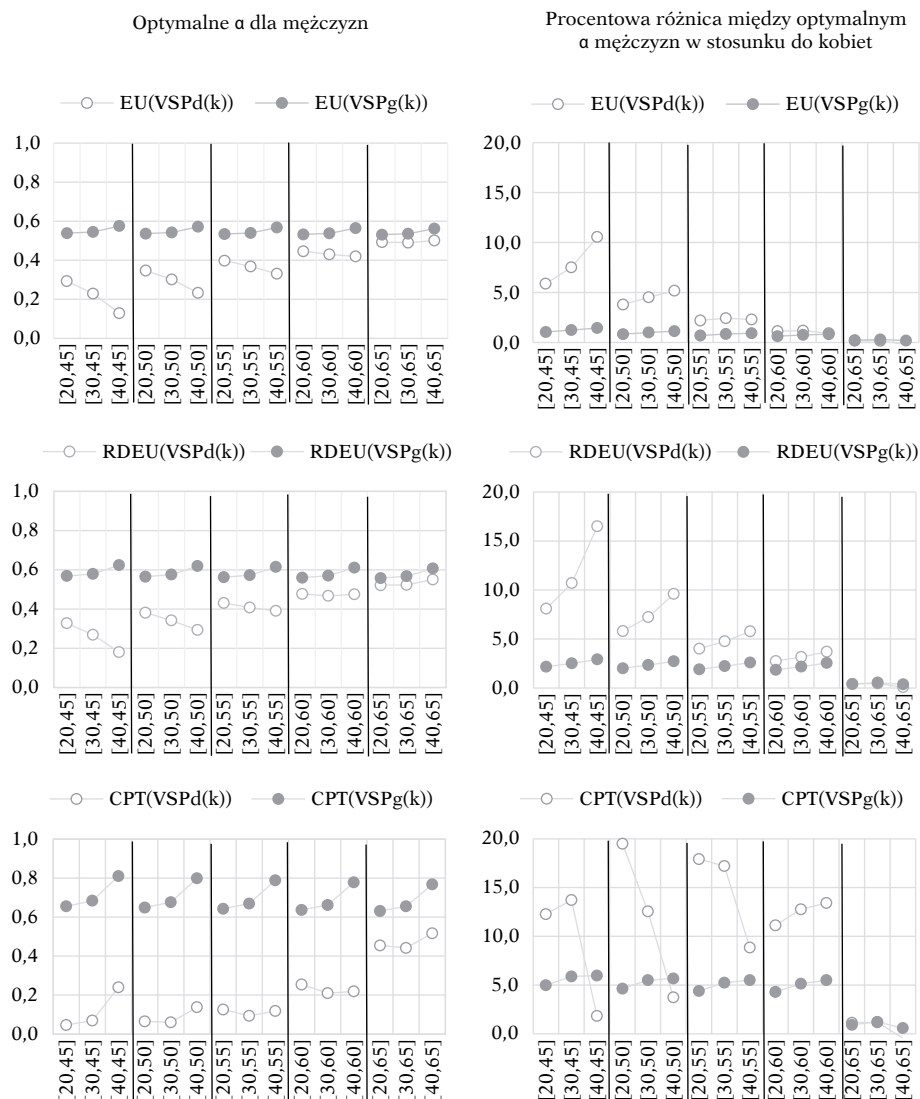
$$\left(\frac{\alpha_{opt,k}^M}{\alpha_{opt,k}^K} - 1 \right) \cdot 100\%. \quad (8)$$

Zauważmy, że w każdym przypadku parametr odsprzedaży dla mężczyzn okazał się wyższy niż dla kobiet. Największe różnice są widoczne dla górnego ograniczenia VSP. W tym przypadku znaczenie ma także przyjęta teoria: największe różnice (nawet 30%) obserwujemy dla teorii CPT, a najniższe (maksymalnie około 7%) – dla teorii EU.



Rysunek 8. Procentowa różnica między optymalnym poziomem parametru odsprzedaży dla ubezpieczenia zawartego przez mężczyznę i kobietę w wieku 20 lat ($[x, n, k]$ gdzie $x = 20$; $n = 40, 45, 50$; $k = 25, 30, 35, 40, 45$).

Źródło: opracowanie własne



Rysunek 9. Optymalny poziom parametru odsprzedaży w ubezpieczeniach zawartych do 70 roku życia w zależności od sposobu optymalizacji, momentu zachorowania oraz zawarcia umowy ubezpieczenia ($[x, k]$, gdzie $x = 20, 30, 40$ i $k = 45, 50, 55, 60, 65$)

Źródło: opracowanie własne

Zakres VSP zależy od tego, jak długo trwa ubezpieczenie, zatem kolejna analiza została przeprowadzona przy założeniu, że ubezpieczony zachorował w wieku 45, 50, 55, 60, 65 lat dla ubezpieczeń, które zostały zawarte przez osoby w wieku 20, 30, 40 lat na okres do 70 roku życia. Dla wymienionych ubezpieczeń

i momentów zachorowania oraz przyjętych teorii użyteczności optymalne wartości parametru odsprzedaży dla mężczyzn i różnicy między parametrami α dla mężczyzn i kobiet zgodnie ze wzorem (8) zostały zilustrowane na rysunku 9. Analizując wykresy, możemy dojść do następujących wniosków (jednakowych niezależnie od wyboru teorii użyteczności):

- im większa wartość odsprzedaży VSP, tym większy optymalny parametr odsprzedaży,
- im później ubezpieczony zachoruje, tym bardziej maleje różnica między $\alpha_{opt,k}^M(VSP_g(k))$ i $\alpha_{opt,k}^M(VSP_d(k))$,
- dla danego momentu zachorowania im krócej trwa ubezpieczenie, tym $\alpha_{opt,k}^M(VSP_d(k))$ jest mniejsze (przy czym największe różnice są obserwowane, gdy zastosuje się teorię CTP).

Dla uogólnionej teorii użyteczności i danego momentu zachorowania im krócej trwa ubezpieczenie, tym $\alpha_{opt,k}^M(VSP_g(k))$ jest większe. Takiej zależności nie obserwuje się w przypadku teorii CTP.

Zasadniczo, niezależnie od wysokości VSP dla momentów zachorowania od 45 do 60 roku życia, optymalne parametry odsprzedaży dla mężczyzn są większe niż dla kobiet. Różnice zwiększają się, gdy ubezpieczenie trwa krócej. Sytuacja się zmienia, gdy zachoruje 65-latek. Wtedy, jeżeli ubezpieczenie trwa krótko, możemy zaobserwować, że optymalne parametry odsprzedaży są minimalnie większe dla kobiet.

Podsumowując, należy wskazać, że wycena umów na wtórnym rynku ubezpieczeń, a w szczególności umów wiatykalnych, dowiodła, że istotnym elementem umowy pozwalającym określić wartość odsprzedaży (a tym samym wartość oczekiwanych zysków inwestora) są wiek, w którym ubezpieczony zawarł umowę ubezpieczenia, jego płeć, długość okresu ubezpieczenia i moment zachorowania na ciężką chorobę. W przypadku optymalizacji parametru odsprzedaży ważnym elementem okazało się także podejście ubezpieczonego do ryzyka, istotnie wpływające na wybór techniki optymalizacyjnej.

Bibliografia

- Bell M.G., Powell G.V. (red.), *Financing Long-Term Care Needs, America's Health Insurance Plans*, Washington 2005.
- Bhuyan V.B., *Life Markets: Trading mortality and longevity risk with life settlements and linked securities*, Wiley, New York 2009.

- Bowers N.L., Gerber H.U., Hickman J.C., Jones D.A., Nesbitt C.J., *Actuarial Mathematics*, Society of Actuaries, Itasca 1986.
- Condon B.J., Sinha T., *Global Lessons from the AIDS Pandemic: Economic, Financial, Legal and Political Implication*, Springer-Verlag, Berlin 2008.
- Dębicka J., *Modelowanie strumieni finansowych w ubezpieczeniach wielostanowych*, seria: Statystyka i Ryzyko, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu, Wrocław 2012.
- Dębicka J., Heilpern S., *The optimization of insurance contracts on the viatical market*, manuskrypt.
- Dębicka J., Zmysłona B., *Construction of Multi-State Life Tables for Critical Illness Insurance – Influence of Age and Sex on the Incidence of Health Inequalities*, „Silesian Statistical Review” 2016, no. 14, s. 41–63.
- Dębicka J., Zmysłona B., *Modelling of lung cancer survival data for critical illness insurances*, manuskrypt (dostępny na arXiv:1602.08696)
- Dictionary of Health Insurance and Managed Care*, D.E. Marcinko (red.), Springer Publishing Company, Inc., New York 2006.
- Haberman S., Pitacco E., *Actuarial Models for Disability Insurance*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton 1999.
- Heilpern S., *A rank-dependent generalization of zero utility principle*, „Insurance: Mathematics and Economics” 2003, vol. 33, s. 67–73.
- Hey J.D., *Intermediate Microeconomics: People are Different*, Mc Graw-Hill, London 2004.
- Kałuszką M., Krzeszowiec M., *Pricing insurance contracts under Cumulative Prospect Theory*, „Insurance: Mathematics and Economics” 2012, vol. 50, s. 159–166.
- Kim H.S., *Life settlement in US*, Research report in KIDI, 2009.
- Kowalewski E., *Risk posed by viatical settlement practices in the Polish life insurance market*, „Wiadomości Ubezpieczeniowe” 2014, nr 4, s. 29–38.
- Neumann J. von, Morgenstern O., *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton 1944.

Źródła sieciowe

- Dębicka J., Heilpern S., *Investor’s expected profit from viatical settlements*, Proceedings of 20th AMSE – Applications of Mathematics in Economics, International Scientific Conference, Szklarska Poręba, 30 sierpnia – 3 września 2017, http://amse.ue.wroc.pl/papers/2017/Debicka_Heilpern.pdf (data odczytu: 31.10.2017).
- Neeraj S., *Cashing Out Life Insurance: An Analysis of the Viatical Settlements Market*, RAND Corporation, Santa Monica 2013, http://www.rand.org/pubs/rgs_dissertations/RGSD175 (data odczytu: 31.10.2017).
- <https://encyklopedia.pwn.pl/szukaj/wiatyk.html> (data odczytu: 31.10.2017).

<https://en.wikipedia.org/wiki/Viaticum> (data odczytu: 31.10.2017).

<http://www.lisa.org/industry-resources/history-of-life-settlements-in-the-us> (data odczytu: 31.10.2017).

* * *

Valuation and optimization of contracts on the secondary insurance market

Summary

For an insured person who needs money because of suffering from a terminal illness that requires costly diagnosis and treatment, the easiest way of receiving money from life insurance is to withdraw from the contract of insurance. Then the insurer is obliged to pay the surrender value of policy. It appears that there is another possibility for the insured to receive prior financial gratification from life insurance. The insured can sell his policy on the secondary market of life insurance (the viatical market). In such a situation he obtains an amount that is greater than the surrender value (and less than the death benefit). Then the viatical company takes a fee for the insurance premiums, and in case of death of the insured gets the death benefits. Such agreements to resell the rights to death benefits are offered to people who have become terminally ill (viatical settlement).

The aim of the paper is twofold. Firstly, we study the influence of the moment of falling ill (compared to the age and sex of the insured and duration of insurance) on the viatical settlement payments and expected profit of the viatical company. For this purpose, we apply the methodology used by insurance companies in the valuation of the contract. Secondly, we analyse the problem of optimizing the viatical settlement from the point of view of the insured. It will consist in determining the amount of the nominal value of the benefit (the whole or a part) which the insured intends to sell in such a way that the amount of benefits (derived from a viatical settlement and the insurance contract) and premiums maximize the average amount of funds available to the insured. We use various approaches of the insured to risk find an optimal solution, which also allows to take different kinds of human behaviour in risky conditions into consideration.

All numerical examples were made on the assumption that the insured person has the endowment insurance and he would like to resale rights to the benefit because he fell ill with lung cancer.

Keywords: viatical market, life insurance, multistate model, Bernoulli principle, Rank Dependent Utility Theory, Cumulative Prospect Theory

