

MICHAŁ BERNARDELLI, MONIKA DĘDYS

Kolegium Analiz Ekonomicznych
Szkoła Główna Handlowa w Warszawie

Przełącznikowe modele Markowa w analizie synchronizacji cykli koniunkturalnych

Streszczenie

W pracy zbadano możliwość wykorzystania ścieżek Viterbiego do analizy dwuwymiarowych szeregów makroekonomicznych za pomocą przełącznikowych modeli Markowa z czterostanowym ukrytym łańcuchem Markowa. Modelowaniu poddano szeregi indeksów produkcji przemysłowej Polski, Włoch i Niemiec. Do modelowania wykorzystano przełącznikowy model Markowa z dwuwymiarowymi rozkładami normalnymi dla dwóch par gospodarek – Polski i Niemiec oraz Włoch i Niemiec. Dla każdej z par wyznaczono najbardziej prawdopodobną ścieżkę ukrytego łańcucha Markowa i zestawiono ją z analogicznymi ścieżkami otrzymanymi dla szeregów jednowymiarowych i modeli z dwustanowymi ukrytymi łańcuchami Markowa. Wyniki przemawiają za tym, że czterostanowe ścieżki Viterbiego dostarczają znacznie bogatszych informacji o synchronizacji cykli gospodarczych dwóch gospodarek w porównaniu z wnioskami, które można wyciągnąć na podstawie zestawienia ścieżek dwustanowych.

Słowa kluczowe: przełącznikowe modele Markowa, ścieżka Viterbiego, synchronizacja cykli koniunkturalnych

1. Wstęp

W pracy proponujemy zastosowanie tzw. ścieżek Viterbiego do wyznaczania punktów zwrotnych i badania synchronizacji cykli koniunkturalnych. Ścieżki Viterbiego, czyli najbardziej prawdopodobne realizacje łańcucha Markowa ukrytego w przełącznikowym modelu Markowa, stanowią podstawowe narzędzie stosowane w rozpoznawaniu mowy czy analizie sekwencji DNA. Mimo ugruntowanej pozycji przełącznikowych modeli Markowa wśród nieliniowych modeli ekonometrycznych analiza ścieżek Viterbiego jest niemal nieobecna w ekonometrii. Zaletą tej metody jest, jak się wydaje, prosta interpretacja wyników. Ma to znaczenie zwłaszcza w przypadku, gdy ukryty łańcuch Markowa ma więcej niż dwa stany. Skuteczność i przydatność rozważanej metody w analizie cykli koniunkturalnych na podstawie jednowymiarowych szeregów czasowych

potwierdzają badania empiryczne¹. W pracy pokazujemy, że ścieżki Viterbiego mogą stanowić wartościowe narzędzie analizy dwuwymiarowych szeregów czasowych, których składowymi są szeregi makroekonomiczne charakteryzujące dwie powiązane ze sobą gospodarki – „słabszą” i „silniejszą”. Nie szukamy przy tym wspólnego cyklu koniunkturalnego. Dążąc do sytuacji, w której stany ukrytego łańcucha Markowa odzwierciedlają zmiany klimatu koniunktury obydwu gospodarek, rozważamy łańcuch ukryty o czterech stanach.

2. Przełącznikowe modele Markowa w analizie cyklu koniunkturalnego

Historia zastosowań przełącznikowych modeli Markowa (MS) do analizy gospodarczego cyklu koniunkturalnego sięga początków obecności tych modeli w ekonometrii². Modele te wykorzystuje się przede wszystkim do wyznaczania stóp wzrostu oraz punktów zwrotnych cyklu koniunkturalnego. Ogromna różnorodność wykorzystywanych rodzajów modeli dotyczy postaci zarówno składowej obserwowalnej, jak i składowej nieobserwowalnej.

Często modelowaniu poddaje się np. szeregi PKB, produkcji sprzedanej, indeksu produkcji czy stopy bezrobocia. Upraszczając, zakłada się przy tym, że składowa obserwowalna jest generowana przez proces AR (ang. *autoregression*) lub VAR (ang. *vector autoregression*) ze zmieniającymi się w czasie parametrami. Mówimy wówczas o modelach odpowiednio MS-AR oraz MS-VAR.

Składową nieobserwowalną może stanowić zarówno jednorodny, jak i niejednorodny łańcuch Markowa. W przypadku niejednorodnym rozważa się prawdopodobieństwa przejścia będące funkcjami logistycznymi pewnych zmiennych egzogenicznych. Modele takie nazywamy przełącznikowymi modelami Markowa ze zmiennymi w czasie prawdopodobieństwami przejścia (MS-TVTP)³. Należy podkreślić fakt, że w przypadku jednorodnym i niejednorodnym dominują modele z dwuelementową lub trzejelementową przestrzenią stanów. W celu wyodrębnienia fazy przyspieszenia i spowolnienia

¹ M. Bernardelli, M. Dędyś, *Ukryte modele Markowa w analizie wyników testu koniunktury gospodarczej*, „Prace i Materiały” Instytutu Rozwoju Gospodarczego SGH, nr 90, Warszawa 2012, s. 159–181.

² J.D. Hamilton, *A New approach to the economic analysis of non-stationary time series and business cycle*, „Econometrica” 1989, no. 57, s. 357–384.

³ E. Moolman, *A Markov switching regime model of South African business cycle*, „Economic Modelling” 2004, no. 21, s. 631–646; P.W. Simpson, D.R. Osborn, M. Sensier, *Modelling Business Cycle Movements in UK Economy*, „Economica” 2001, no. 68, s. 243–267.

stosuje się modele MS z dwustanowymi ukrytymi łańcuchami Markowa. Powstały również opracowania, w których rozważa się łańcuchy Markowa z trzema stanami, odpowiadającymi fazie spowolnienia, standardowego przyspieszenia oraz znacznego przyspieszenia⁴.

Jednym z głównych zastosowań modeli MS jest detekcja punktów zwrotnych cyklu koniunkturalnego. Na ogół identyfikacja różnych faz cyklu odbywa się na podstawie filtrowanych lub wygładzonych prawdopodobieństw przebywania w danym stanie⁵. Prawdopodobieństwa te mogą stanowić podstawę do analizy synchronizacji cykli koniunkturalnych różnych gospodarek. Porównania dokonuje się, korzystając z wyników otrzymanych na bazie odrębnych modeli MS-AR dla poszczególnych gospodarek i odpowiednio skonstruowanych mierników⁶. Czasem w poszukiwaniu wspólnego cyklu wykorzystuje się modele MS-VAR⁷. Ciekawą alternatywę stanowią modele TVTP typu MS-AR, w których składowa obserwowalna jest związana z makroekonomicznym szeregiem czasowym charakteryzującym gospodarkę danego państwa. Ewentualny związek z fluktuacjami koniunktury innej gospodarki znajduje odzwierciedlenie w składowej nieobserwowalnej. Ścisłej rzecz ujmując, można stwierdzić, że prawdopodobieństwa przejścia ukrytego łańcucha Markowa w takim modelu są funkcjami zmiennych opisujących drugą z rozpatrywanych gospodarek⁸. Inna propozycja analizy synchronizacji cykli koniunkturalnych pary gospodarek wiąże się z rozpatrywaniem dwuwymiarowej składowej obserwowalnej oraz ukrytego łańcucha Markowa z czterema stanami mającymi odzwierciedlać klimat koniunktury dla obydwu gospodarek⁹. W pracy nawiązujemy do tego właśnie podejścia.

⁴ M. Artis, H.M. Krolzig, J. Toro, *The European business cycle*, Oxford Papers no. 56, 2004, s. 1–44; M.D. Boldin, *A check on the robustness of Hamilton's Markov Switching Model Approach to the Economic Analysis of the business cycle*, „Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics” 1996, vol. 1, no. 1, s. 1–14.

⁵ M. Chauvet, J.D. Hamilton, *Dating business cycle turning points*, NBER Working Paper no. 11422, 2005, <http://www.nber.org/papers/w11422>.

⁶ P.A. Smith, P.M. Summers, *How well do Markov Switching Models describe actual business cycles? The case of synchronization*, „Journal of Applied Econometrics” 2005, vol. 20, no. 2, s. 253–274.

⁷ Ibidem.

⁸ G. Dufrénot, B. Keddad, *Business cycle synchronization in East Asia: A Markov Switching approach*, „Economic Modelling” 2014, no. 42, s. 186–197.

⁹ K.L. Phillips, *A two-country model of stochastic output with changes in regime*, „Journal of International Economics” 1991, no. 31, s. 121–142.

3. Opis modelu i charakterystyka danych

W pracy wykorzystujemy przełącznikowy model Markowa, w którym tzw. przełączanie dotyczy parametrów rozkładu normalnego. Wyrażając się precyzyjniej, można stwierdzić, że rozważamy częściowo obserwowalny proces $\{(X_t, Y_t)\}_{t=1}^{\infty}$, spełniający następujące warunki:

1. Składowa nieobserwowalna $\{X_t\}_{t=1}^{\infty}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa ze skończoną przestrzenią stanów S_X .
2. Obserwowalne zmienne losowe Y_1, Y_2, \dots, Y_t są przy warunku (X_1, X_2, \dots, X_t) niezależne, przy czym rozkład zmiennej losowej Y_t przy tym warunku zależy jedynie od zmiennej losowej X_t .

Łańcuch Markowa $\{X_t\}_{t=1}^{\infty}$ nazywamy ukrytym łańcuchem Markowa, zaś modele tego typu są znane pod nazwą ukrytych modeli Markowa (ang. *Hidden Markov Models* – HMM) i pojawiły się w literaturze w latach 60. ubiegłego stulecia, a więc na długo przed pierwszymi pracami J.D. Hamiltona¹⁰.

Jednym z ważnych problemów analizy szeregu czasowego za pomocą modelu MS jest znalezienie oceny nieobserwowalnej zmiennej X_t w dowolnym momencie t , gdzie $t \leq T$, na podstawie znajomości realizacji składowej obserwowalnej do chwili T . Umożliwia to wyodrębnienie faz cyklu koniunkturalnego. W rozwiązaniu tego problemu wykorzystuje się na ogół¹¹ prawdopodobieństwa wygładzone

$$w_t(i) = P(X_t = i | Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, \dots, Y_T = y_T) \quad (1)$$

lub filtrowane

$$f_t(i) = P(X_t = i | Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, \dots, Y_n = y_n), \quad (2)$$

a więc warunkowe prawdopodobieństwa zdarzenia, że w chwili t ukryty łańcuch Markowa znalazł się w stanie i .

Na podstawie oceny prawdopodobieństwa wygładzonego lub filtrowanego, stosując różne procedury, wyznacza się ocenę stanu ukrytego łańcucha Markowa w chwili t ¹². W najprostszym przypadku za ocenę stanu w chwili t przyjmuje się $\underset{i}{\operatorname{argmax}} w_t(i)$,

¹⁰ O. Cappé, E. Moulines, T. Rydén, *Inference in Hidden Markov Models*, Springer Series in Statistics, New York 2005.

¹¹ J.D. Hamilton, *Time Series Analysis*, Princeton University Press, Princeton 1994.

¹² M. Chauvet, J.D. Hamilton, op.cit.; D. Harding, A. Pagan, *A comparison of two business cycle dating methods*, „Journal of Economics & Control” 2012, no. 27, s. 1681–1690.

względnie $\operatorname{argmax}_i f_i(i)$. Niestety, w przypadku łańcucha Markowa z liczniejszą przestrzenią stanów takie „lokalne dekodowanie” realizacji ukrytego łańcucha Markowa może okazać się nieefektywne.

W pracy wykorzystujemy alternatywną metodę rozwiązania powyższego problemu, polegającą na znalezieniu realizacji ukrytego łańcucha Markowa w ujęciu „globalnym”. Szukamy mianowicie najbardziej prawdopodobnej ścieżki przebytej przez ukryty łańcuch Markowa w całym rozpatrywanym okresie. Formalnie rzecz ujmując: wyznaczamy ścieżkę $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_T^*) \in S_X^T$ taką, że:

$$P(X_1 = x_1^*, X_2 = x_2^*, \dots, X_T = x_T^* | Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, \dots, Y_T = y_T) = \quad (3)$$

$$\max_{(x_1, x_2, \dots, x_T) \in S_X^T} \left\{ P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_T = x_T | Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, \dots, Y_T = y_T) \right\}.$$

Ścieżkę tę od nazwiska twórcy algorytmu służącego do jej wyznaczania nazywamy ścieżką Viterbiego (ang. *Viterbi path*).

Do wyznaczenia parametrów ukrytych modeli Markowa wykorzystano iteracyjny algorytm Bauma–Welcha. Wyniki działania tego deterministycznego algorytmu zależą jednakże od przyjętych początkowych wartości prawdopodobieństw i w związku z tym mogą być dalekie od optymalnych. W celu zwiększenia szans znalezienia faktycznego (pod względem numerycznym) rozwiązania obliczenia można wykonać wielokrotnie dla tych samych danych, ale różnych wartości startowych. Jest to równoważne z wykonaniem symulacji Monte Carlo. Dla każdego z k -stanowych modeli HMM jest wymagane dobranie prawdopodobieństw:

- startowych dla poszczególnych stanów (k parametrów);
- przejścia pomiędzy stanami (k^2 parametrów);
- emisji symbolu w danym stanie ($2k$ parametrów)¹³.

Liczba wykonanych symulacji dla użytych przy analizie szeregów czasowych zawierała się w przedziale 1000–5000, w zależności od liczby stanów oraz stabilności obliczeń numerycznych. Wartości parametrów były losowane z rozkładu jednostajnego na przedziale 0;1. Spośród wyznaczonych modeli wybrano najlepszy, przy czym jako kryteria wyboru¹⁴ były uwzględniane następujące wskaźniki:

¹³ Przy założeniu, że rozkład prawdopodobieństwa emisji symbolu w danym stanie jest normalny. W przypadku innych rozkładów prawdopodobieństwa, w tym wielowymiarowych, liczba parametrów może być inna.

¹⁴ Zob. M. Bernardelli, *The procedure of business cycle turning points identification based on hidden Markov models*, „Prace i Materiały” Instytutu Rozwoju Gospodarczego SGH, Warszawa 2014 (w druku);

- kryterium informacyjne Akaikego (AIC);
- bayesowskie kryterium informacyjne (BIC);
- wartość logarytmu funkcji wiarygodności;
- częstość uzyskiwania danego rozwiązania w algorytmie Bauma–Welcha (z dokładnością do jednego miejsca po przecinku).

Dla modelu uznanego za najlepszy pod względem przyjętych kryteriów była generowana najbardziej prawdopodobna ścieżka ukrytego łańcucha Markowa w całym rozpatrywanym okresie. Do znalezienia stanów tej ścieżki został wykorzystany algorytm Viterbiego¹⁵. Warto podkreślić fakt, iż mimo deterministycznego charakteru każdego z zastosowanych algorytmów, tj. Bauma–Welcha oraz Viterbiego, metoda wyznaczania stanów ukrytego łańcucha Markowa jako całość jest niedeterministyczna.

W pracy rozważamy modele MS, w których warunkowy rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej Y_t jest jedno- lub dwuwymiarowym rozkładem normalnym, zaś przestrzeń stanów S_x jest zbiorem dwu- lub czteroelementowym. Przełącznikowe modele Markowa z dwustanowym ukrytym łańcuchem Markowa wykorzystujemy do analizy jednowymiarowych szeregów czasowych. W tym przypadku $S_x = \{0, 1\}$, zaś

$$Y_t |_{x_t=0} \sim N(\mu_0, \sigma_0), \quad Y_t |_{x_t=1} \sim N(\mu_1, \sigma_1), \quad (4)$$

przy czym $\mu_0 < \mu_1$. Stan 0 odpowiada okresom związanym z fazą spowolnienia, zaś stan 1 – okresom związanym z fazą wzrostu.

Chcąc uchwycić możliwe interakcje między parami gospodarek, wprowadzamy model zbliżony do modelu zaproponowanego w pracy *A two-country model of stochastic output with changes in regime*¹⁶. Analizie poddajemy mianowicie dwuwymiarowy szereg czasowy, którego składowymi są szeregi czasowe związane z badanymi gospodarkami. Rozważamy ukryty łańcuch Markowa z przestrzenią stanów $S_x = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$, spodziewając się, że stan $(0,0)$ będzie odpowiadał okresom, w których obie gospodarki będą w fazie spowolnienia. Pozostałe stany interpretujemy analogicznie. W przeciwieństwie do modelu prezentowanego we wspomnianej wyżej pracy¹⁷ rozważamy najprostszy model MS z warunkowymi normalnymi rozkładami prawdopodobieństwa. Nie nakładamy też żadnych restrykcji na wektory wartości oczekiwanych tych rozkładów. Dodatkowo wnioski dotyczące ewentualnych interakcji

M. Bernardelli, M. Dędyś, *The Viterbi path of hidden Markov models in an analysis of business tendency surveys*, „Prace i Materiały” Instytutu Rozwoju Gospodarczego SGH, Warszawa 2014 (w druku).

¹⁵ O. Cappé, E. Moulines, T. Rydén, op.cit.

¹⁶ K.L. Phillips, op.cit.

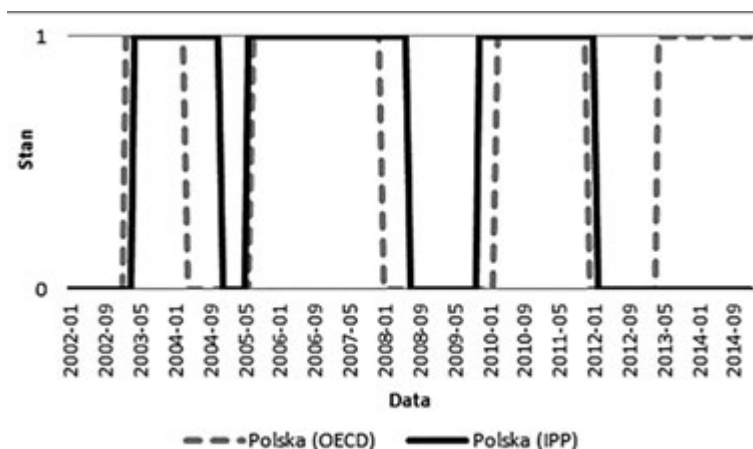
¹⁷ Ibidem.

między gospodarkami wyciągamy na podstawie ścieżek Viterbiego, a nie na podstawie macierzy prawdopodobieństw przejścia.

W pracy poddajemy analizie miesięczne indeksy wolumenu produkcji przemysłowej (IPP) Polski, Niemiec i Włoch z okresu od stycznia 2002 r. do stycznia 2015 r. Dane pochodzą z bazy Eurostatu. Jako jednostkę obrano procentową zmianę w stosunku do analogicznego miesiąca roku poprzedniego, unikając w ten sposób konieczności desezonalizacji szeregów czasowych i związanych z tym problemów¹⁸.

4. Wyniki badania empirycznego

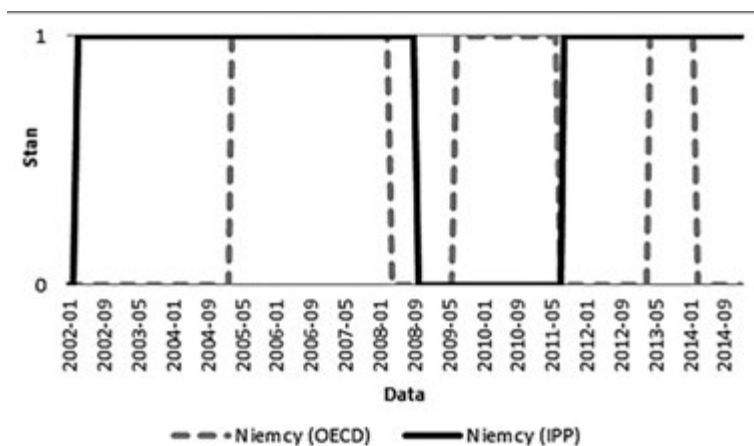
Na wstępie należy zaznaczyć, że model MS z warunkowymi normalnymi rozkładami prawdopodobieństwa nie jest uniwersalnym narzędziem analizy szeregów czasowych. Chcąc zbadać skuteczność przeprowadzonej dekompozycji szeregów, wyznaczone ścieżki Viterbiego dwustanowych łańcuchów Markowa zestawiono z datowaniami punktów zwrotnych cyklu koniunkturalnego wyznaczonymi przez OECD na podstawie wskaźnika wyprzedzającego *Composite Leading Index* (rysunki 1–3).



Rysunek 1. Porównanie najbardziej prawdopodobnej ścieżki Viterbiego dwustanowego HMM dla indeksów produkcji przemysłowej Polski z szeregiem referencyjnym OECD

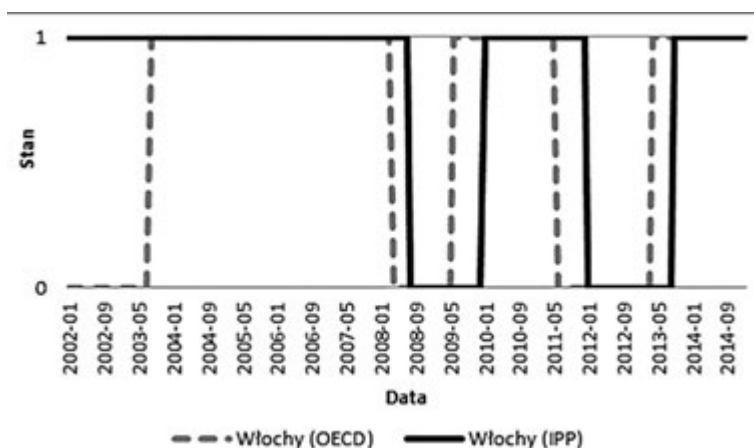
Źródło: opracowanie własne.

¹⁸ A. Matas-Mir, D.R. Osborn, M.J. Lombardi, *The effect of seasonal adjustment on the properties of business cycle regimes*, „Journal of Applied Econometrics” 2008, no. 23, s. 257–278.



Rysunek 2. Porównanie najbardziej prawdopodobnej ścieżki Viterbiego dwustanowego HMM dla indeksów produkcji przemysłowej Niemiec z szeregiem referencyjnym OECD

Źródło: opracowanie własne.

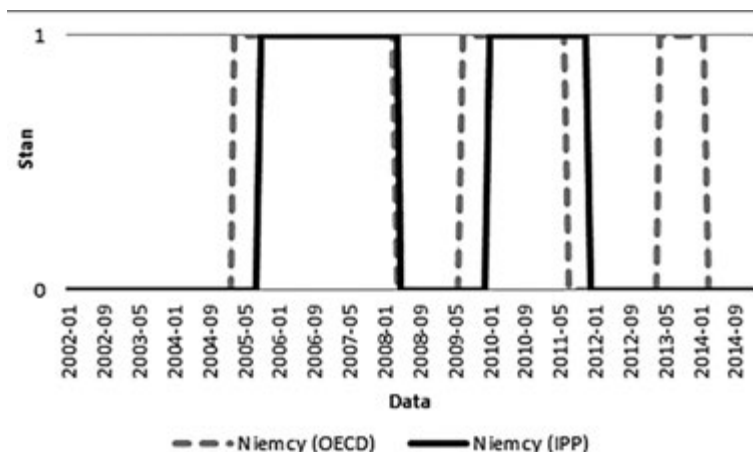


Rysunek 3. Porównanie najbardziej prawdopodobnej ścieżki Viterbiego dwustanowego HMM dla indeksów produkcji przemysłowej Włoch z szeregiem referencyjnym OECD

Źródło: opracowanie własne.

Niestety w przypadku Niemiec (rysunek 2) skutki kryzysu finansowego w 2008 r. były tak głębokie, że uniemożliwiły sensowną dekompozycję szeregu. W związku z tym zdecydowano się na „lokalne wygładzenie” tego szeregu (sierpień 2008–kwiecień 2010) przez proporcjonalne do pozostałych kryzysów w latach poprzedzających 2008 r.

zwiększenie wartości. Rezultaty zastosowanej procedury zamieszczono na rysunku 4. Tak przekształcony szereg stał się podstawą dalszych analiz.



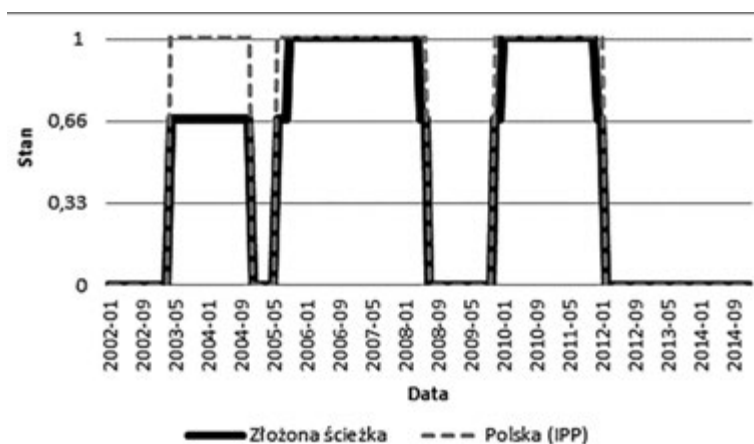
Rysunek 4. Porównanie najbardziej prawdopodobnej ścieżki Viterbiego dwustanowego HMM dla wygładzonego lokalnie szeregu indeksów produkcji przemysłowej Niemiec z szeregiem referencyjnym OECD

Źródło: opracowanie własne.

Warto podkreślić fakt, że w ścieżkach Viterbiego znalazły się odpowiedniki niemal wszystkich punktów zwrotnych wyznaczonych przez OECD. W przypadku Polski i Niemiec nie udało się wychwycić dwóch punktów zwrotnych, zaś w przypadku Włoch jednego punktu zwrotnego. Na ogół sygnały o punktach zwrotnych pojawiają się w ścieżkach Viterbiego z opóźnieniem, przy czym opóźnienia te wynoszą 2–8 miesięcy, 1–6 miesięcy, 3–6 miesięcy odpowiednio w przypadku Polski, Niemiec i Włoch. Jedynie w przypadku Polski niektóre punkty zwrotne były sygnalizowane przez ścieżkę Viterbiego z wyprzedzeniem. Były to dwa dna, zaś wyprzedzenie wynosiło 2–4 miesiące.

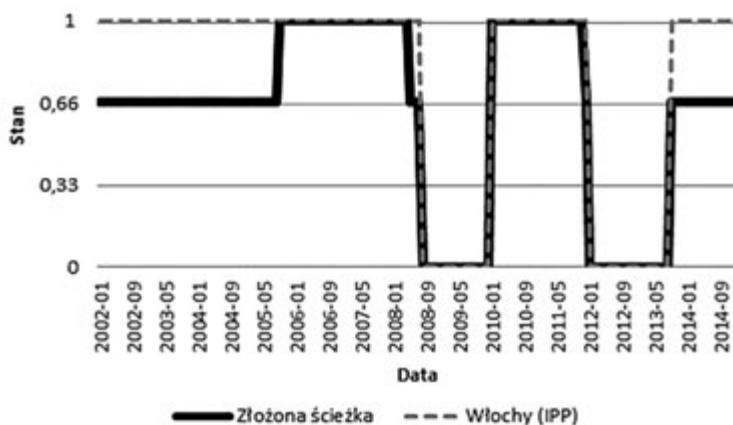
W pracy, analizując cykle koniunkturalne, bazujemy wyłącznie na przebiegu ścieżek Viterbiego. Chcąc uchwycić w obrazach tych ścieżek argumenty przemawiające za wpływem fluktuacji klimatu koniunktury państwa o silniejszej gospodarce na analogiczne fluktuacje państwa, którego gospodarka jest słabsza, modelowaniu poddajemy dwuwymiarowe szeregi IPP. Rozważamy dwa takie szeregi – szereg ze składowymi indeksu produkcji przemysłowej Polski i Niemiec oraz szereg ze składowymi indeksu produkcji przemysłowej Włoch i Niemiec. Do dekompozycji tych szeregów wykorzystujemy opisany w poprzednim paragrafie model MS z czterostanowym ukrytym łańcuchem Markowa. W celu uzyskania przejrzystości prezentacji graficznej ścieżek Viterbiego przenumerowujemy stany łańcucha ukrytego. Stan (1,1) oznaczymy przez 1,

stan (0,0) przez 0. Stanom (1,0) oraz (0,1) odpowiadają stany pośrednie $2/3$ oraz $1/3$. O ile interpretacje stanów 0 oraz 1 okazały się zgodne z założeniami, o tyle po oszacowaniu parametrów modeli okazało się, że stany pośrednie mają nieco inną interpretację od pierwotnie zamierzonej. Ścieżki Viterbiego wyznaczone dla tych szeregów przedstawiono na tle ścieżek Viterbiego gospodarek słabszych na rysunkach 5 i 6.



Rysunek 5. Porównanie najbardziej prawdopodobnej ścieżki Viterbiego czterostanowego HMM dla szeregu indeksów produkcji przemysłowej Polski i Niemiec ze ścieżką Viterbiego dwustanowego HMM dla IPP Polski

Źródło: opracowanie własne.

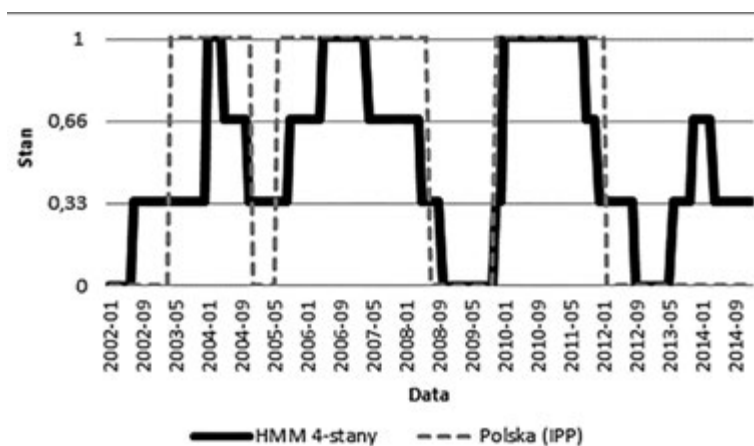


Rysunek 6. Porównanie najbardziej prawdopodobnej ścieżki Viterbiego czterostanowego HMM dla szeregu indeksów produkcji przemysłowej Włoch i Niemiec ze ścieżką Viterbiego dwustanowego HMM dla IPP Włoch

Źródło: opracowanie własne.

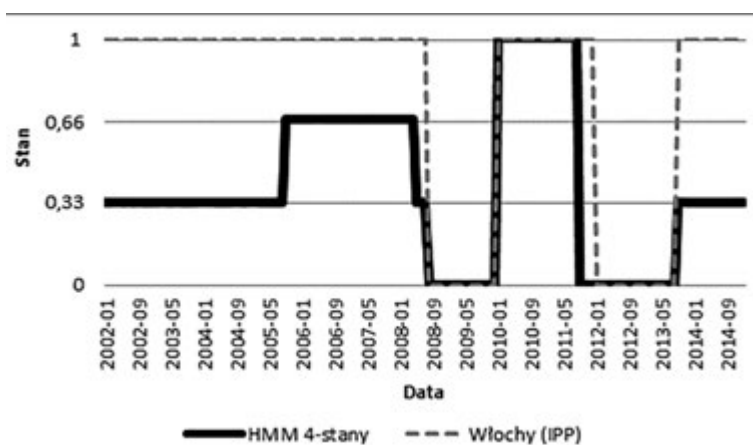
Dodatkowo, wykorzystując ścieżki Viterbiego dwóch państw uzyskane dla jednowymiarowych szeregów IPP i dwustanowych ukrytych łańcuchów Markowa, skonstruowano „ścieżki złożone” w następujący sposób. Jeśli w okresie t ścieżki dla obu państw zgodnie wskazywały na fazę wzrostu, to w chwili t w ścieżce złożonej przyjmujemy stan o wartości 1. Jeśli obie ścieżki zgodnie wskazują fazę spowolnienia, to w chwili t w ścieżce złożonej mamy wartość 0. Złożone ścieżki w zamierzeniu odwzorowują informacje płynące z cykli rozważanych rozłącznie. Ścieżki te przedstawiono na rysunkach 7 (Polska i Niemcy) i 8 (Włochy i Niemcy) na tle gospodarek słabszych, zaś na tle gospodarki Niemiec na rysunkach 9 (Polska) i 10 (Włochy).

Wydaje się, że ścieżki Viterbiego czterostanowych łańcuchów Markowa wzbogacają wnioskowanie na temat punktów zwrotnych cykli koniunkturalnych słabszych gospodarek. Sygnały o zakończeniu fazy wzrostu pojawiają się wcześniej od analogicznych sygnałów w ścieżkach dwustanowych. W przypadku Niemiec taki efekt na ogół nie jest obserwowany. Wyjątek stanowi wcześniejsze datowanie jednego szczytu z listopada 2011 r. w szeregu z IPP Polski i w szeregu z IPP Włoch.



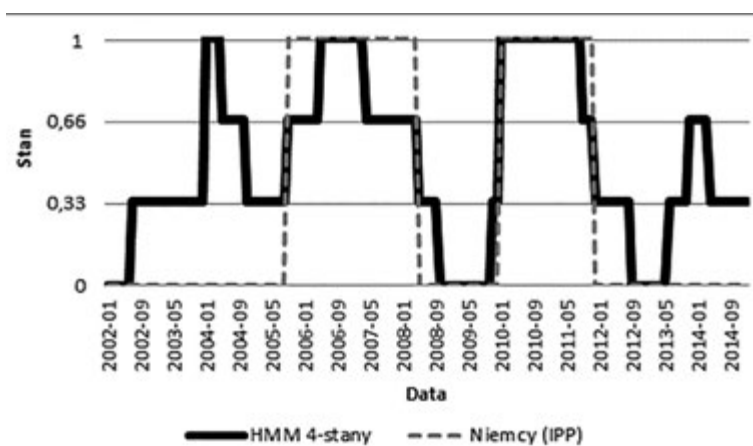
Rysunek 7. Porównanie złożonej czterostanowej ścieżki Viterbiego wyznaczonej na podstawie dwustanowych HMM dla szeregów indeksów produkcji przemysłowej Polski i Niemiec ze ścieżką Viterbiego dwustanowego HMM dla IPP Polski

Źródło: opracowanie własne.



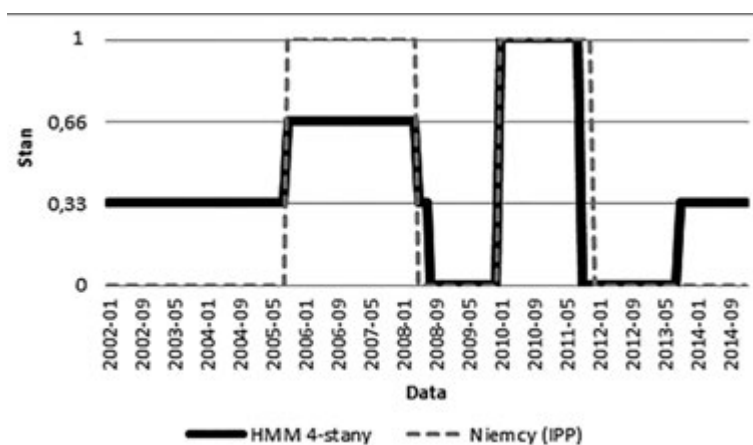
Rysunek 8. Porównanie złożonej czterostanowej ścieżki Viterbiego wyznaczonej na podstawie dwustanowych HMM dla szeregów indeksów produkcji przemysłowej Włoch i Niemiec ze ścieżką Viterbiego dwustanowego HMM dla IPP Włoch

Źródło: opracowanie własne.



Rysunek 9. Porównanie złożonej czterostanowej ścieżki Viterbiego wyznaczonej na podstawie dwustanowych HMM dla szeregów indeksów produkcji przemysłowej Polski i Niemiec ze ścieżką Viterbiego dwustanowego HMM dla IPP Niemiec

Źródło: opracowanie własne.



Rysunek 10. Porównanie złożonej czterostanowej ścieżki Viterbiego wyznaczonej na podstawie dwustanowych HMM dla szeregów indeksów produkcji przemysłowej Włoch i Niemiec ze ścieżką Viterbiego dwustanowego HMM dla IPP Niemiec

Źródło: opracowanie własne.

5. Podsumowanie

Wyniki pracy przemawiają za tym, że ścieżki Viterbiego mogą stanowić wartościowe narzędzie analizy dwuwymiarowych szeregów czasowych, których składowymi są szeregi makroekonomiczne charakteryzujące dwie powiązane ze sobą gospodarki. Przydatność ścieżek Viterbiego testowano na przykładzie dwuwymiarowych szeregów czasowych, których składowymi były indeksy produkcji przemysłowej par gospodarek – Polski i Niemiec oraz Włoch i Niemiec. Do analizy wykorzystano model MS z dwuwymiarowymi normalnymi warunkowymi rozkładami prawdopodobieństwa i czterostanowym ukrytym łańcuchem Markowa. Wyznaczone w ramach tego modelu ścieżki Viterbiego dostarczają bardziej wartościowych informacji od wniosków, które można wyciągnąć na podstawie zestawienia ścieżek Viterbiego wyznaczonych dla odrębnych modeli MS z jednowymiarową składową obserwowalną.

Bibliografia

- Artis M., Krolzig H. M., Toro J., *The European business cycle*, Oxford Papers no. 56, 2004, s. 1–44.
- Bernardelli M., *The procedure of business cycle turning points identification based on hidden Markov models*, „Prace i Materiały” Instytutu Rozwoju Gospodarczego SGH, Warszawa 2014 (w druku).
- Bernardelli M., Dędyś M., *The Viterbi path of hidden Markov models in an analysis of business tendency surveys*, „Prace i Materiały” Instytutu Rozwoju Gospodarczego SGH, Warszawa 2014 (w druku).
- Bernardelli M., Dędyś M., *Ukryte modele Markowa w analizie wyników testu koniunktury gospodarczej*, „Prace i Materiały” Instytutu Rozwoju Gospodarczego SGH, nr 90, Warszawa 2012, s. 159–181.
- Boldin M. D., *A check on the robustness of Hamilton’s Markov Switching Model Approach to the Economic Analysis of the business cycle*, „Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics” 1996, vol. 1, no. 1, s. 1–14.
- Boldin M., *Dating turning points in the business cycle*, „Journal of Business” 1994, no. 67, issue 1, s. 97–131.
- Çakmakli C., Paap R., Dijk D. van, *Measuring and predicting heterogeneous recessions*, „Journal of Economic Dynamics & Control” 2013, no. 37, s. 2195–2216.
- Cappé O., Moulines E., Rydén T., *Inference in Hidden Markov Models*, Springer Series in Statistics, New York 2005.
- Chauvet M., Hamilton J. D., *Dating business cycle turning points*, NBER Working Paper no. 11422, 2005, <http://www.nber.org/papers/w11422>.
- Dufrénot G., Keddad B., *Business cycle synchronization in East Asia: A Markov Switching approach*, „Economic Modelling” 2014, no. 42, s. 186–197.
- Hamilton J. D., *A New approach to the economic analysis of non-stationary time series and business cycle*, „Econometrica” 1989, no. 57, s. 357–384.
- Hamilton J. D., *Time Series Analysis*, Princeton University Press, Princeton 1994.
- Harding D., Pagan A., *A comparison of two business cycle dating methods*, „Journal of Economics & Control” 2012, no. 27, s. 1681–1690.
- Matas-Mir A., Osborn D. R., Lombardi M. J., *The effect of seasonal adjustment on the properties of business cycle regimes*, „Journal of Applied Econometrics” 2008, no. 23, s. 257–278.
- Moolman E., *A Markov switching regime model of South African business cycle*, „Economic Modelling” 2004, no. 21, s. 631–646.
- Phillips K. L., *A two-country model of stochastic output with changes in regime*, „Journal of International Economics” 1991, no. 31, s. 121–142.
- Simpson P. W., Osborn D. R., Sensier M., *Modelling Business Cycle Movements in UK Economy*, „Economica” 2001, no. 68, s. 243–267.
- Smith P. A., Summers P. M., *How well do Markov Switching Models describe actual business cycles? The case of synchronization*, „Journal of Applied Econometrics” 2005, vol. 20, no. 2, s. 253–274.

Markov switching models in the analysis of business cycle synchronization

Summary

In this paper the investigation of the possibility of using the Viterbi paths for the analysis of two-dimensional macroeconomic time series has been done. Two-dimensional Gaussian Markov–Switching model with four-state hidden Markov chain was considered. Two pairs of monthly indexes of industrial production were modelled. Industrial production of Italy and Germany was one pair under consideration and industrial production of Poland and Germany was the second one. The most likely sequence of states of the hidden Markov chain was found for each pair. The comparison of that sequence and analogous sequences determined for one-dimensional model with two-state hidden Markov chain was done. The results of comparison suggests that four-state Viterbi path provides more valuable information about business cycle synchronization of two economies, than two separate two-state Viterbi paths.

Keywords: Markov switching models, Viterbi path, business cycle synchronization

JEL: C63, E37, E27

Zgodnie z oświadczeniem autorów, ich udział w powstawaniu artykułu był następujący: Michał Bernardelli – 50%, Monika Dędyś – 50%.