Michał Boczek[1]

Instytut Matematyki
Politechnika Łódzka

O pewnych miarach ryzyka[2]

Streszczenie

Celem pracy jest wprowadzenie funkcjonałów zdefiniowanych dla pewnych rodzin zmiennych losowych przy użyciu pseudomiar, zwanych również miarami monotonicznymi lub miarami rozmytymi. Funkcjonały te mogą stać się alternatywnym narzędziem do mierzenia ryzyka. Podamy ich interpretację graficzną oraz wybrane własności.

Słowa kluczowe: uogólniona całka Sugeno, całka Choqueta, miara ryzyka, pseudomiara

1. Własności i przykłady miar ryzyka

Niech V będzie zbiorem zmiennych losowych określonych na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Definicja 1.1. Miarą ryzyka nazywamy dowolny monotoniczny funkcjonał $\Pi : V \to [0, \infty)$, tj. $\Pi(X) \le \Pi(Y)$ dla dowolnych $X, Y \in \mathrm{V}$ takich, że $X \le Y$.

Niech $X \in V$ będzie zmienną losową o dystrybuancie F_X. W literaturze rozważa się następujące własności miar ryzyka:

M1. $\Pi(X) \le \sup_{\omega\in\Omega} X(\omega)$,
M2. $\Pi(X) \ge \mathbb{E}X$,
M3. $\Pi(a1_{\Omega}) = a$ dla dowolnego $a > 0$,
M4. $\Pi(aX) = a\Pi(X)$ dla dowolnego $a \ge 0$,

[1] Autor tekstu chciałby podziękować anonimowym recenzentom za wartościowe uwagi oraz Markowi Kałuszce za trafne wskazówki i wszelką pomoc podczas przygotowywania pracy. Kontakt z autorem: Instytut Matematyki, Politechnika Łódzka, ul. Wólczańska 215, 90-924 Łódź, e-mail: michal-boczek@wp.pl.

[2] Badania zostały sfinansowane z dotacji na zadania służące rozwojowi młodych naukowców w ramach finansowania działalności statutowej Wydziału Fizyki Technicznej, Informatyki i Matematyki Stosowanej Politechniki Łódzkiej.

M5. $\Pi(X+c)=\Pi(X)+c$ dla dowolnego $c \ge 0$,
M6. $\Pi(X+Y) \le \Pi(X)+\Pi(Y)$ (subaddytywność),
M7. $\Pi(X+Y)=\Pi(X)+\Pi(Y)$, gdy X i Y są komonotoniczne, tzn. $\left(X(\omega_1)-X(\omega_2)\right)\left(Y(\omega_1)-Y(\omega_2)\right) \ge 0$ dla dowolnych $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ (komonotoniczna addytywność).

Do dzisiaj toczą się dyskusje na temat tego, jakie własności powinna mieć „dobra" miara ryzyka. Jedną z najbardziej znanych jest tzw. koherentna miara ryzyka, którą po raz pierwszy wprowadzili P. Artzner i inni[3].

Definicja 1.2. Miarą ryzyka nazywamy koherentną, gdy posiada własności M4–M6.

Uogólnieniem pojęcia koherentnej miary ryzyka jest miara wypukła.

Definicja 1.3. Mówimy, że miara ryzyka Π jest wypukła, jeśli spełnia warunek M5 oraz dla dowolnych $X, Y \in V$

$$\Pi(\lambda X+(1-\lambda)Y) \le \lambda\Pi(X)+(1-\lambda)\Pi(Y) \quad \text{dla } 0<\lambda<1.$$

Przykładami miar ryzyka są miary Wanga[4]

$$\Pi_W(X)=\int_0^\infty g\left(\bar{F}_X(t)\right)\mathrm{d}t, \tag{1}$$

gdzie $\bar{F}_X(t)=1-F_X(t)$ oraz g jest niemalejącą funkcją spełniającą warunki $g(0)=0$ i $g(1)=1$. W zależności od wyboru funkcji g możemy dostać różne miary ryzyka, np. VaR (*value at risk*) i TVaR (*tail value at risk*), które są najczęściej stosowane w praktyce. Zdefiniowane są one następująco:

$$\mathrm{VaR}_p(X)=F_X^{-1}(p), \quad p \in (0,1),$$

$$TVaR_p(X)=\frac{1}{1-p}\int_p^1 VaR_t(X)dt, \quad p \in (0,1),$$

gdzie $F_X^{-1}(p)=\inf\{t : F_X(t) \ge p\}$ jest uogólnioną funkcją odwrotną. Miarę VaR otrzymujemy, kładąc w (1)

[3] P. Artzner, F. Delbaen, J.-M. Eber, D. Heath, *Coherent Measures of Risk*, „Mathematical Finance" 1999, vol. 9, s. 203–228.

[4] M. Denuit, J. Dhaene, M. Goovaerts, R. Kaas, *Actuarial Theory for Dependent Risks. Measures, Orders and Models*, John Wiley and Sons, Chippenham 2005.

$$g_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x \in [1-p, 1] \\ 0, & \text{gdy } x \in [0, 1-p) \end{cases},$$

gdzie p oznacza rząd kwantyla zmiennej losowej X. Natomiast, jeżeli $g_2(x) = min(x/(1-p), 1)$, to dostajemy TVaR.

Własność 1.1. Miara Wanga ma własności: M1, M3, M4, M5 oraz M7. Gdy dodatkowo założymy wklęsłość funkcji g, to ma ona również własności M2, M3 i M6, czyli jest koherentną miarą ryzyka.

2. Nowe miary ryzyka

W klasycznej teorii ryzyka miary ryzyka i ich własności są wprowadzane przy użyciu miary probabilistycznej. W podejściu przedstawionym w tej pracy miarę probabilistyczną P zastępujemy pseudomiarą unormowaną μ.

Definicja 2.1. Pseudomiarą μ na przestrzeni mierzalnej $(\Omega, \mathcal{F})$ nazywamy odwzorowanie $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ spełniające dwa warunki: $\mu(\varnothing) = 0$ oraz jeśli $A, B \in \mathcal{F}$ i $A \subset B$, to $\mu(A) \leq \mu(B)$. Dodatkowo, gdy $\mu(\Omega) = 1$, to taką pseudomiarę nazywamy probabilistyczną albo unormowaną.

Powyższe pojęcie wprowadzili G. Choquet w 1953 r.[5] oraz niezależnie w 1974 r. w swojej rozprawie doktorskiej M. Sugeno[6]. W przypadku, gdy μ jest pseudomiarą, trójkę $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ nazywamy przestrzenią z pseudomiarą. Mówimy, że funkcja $X : \Omega \to [0,1]$ jest mierzalna, gdy $\{\omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$ dla każdego borelowskiego podzbioru $[0, \infty]$. Każdą funkcję mierzalną o wartościach w $[0,1]$ będziemy nazywać ryzykiem. Ograniczenie przez 1 oznacza, że rozważamy tylko zmienne wspólnie ograniczone przez pewną stałą, które można unormować, dzieląc przez tę stałą. Przez W oznaczymy zbiór wszystkich ryzyk.

Przykładowymi pseudomiarami są odwzorowania $\mu^*(A) = \sup_{P \in \mathcal{P}} P(A)$ oraz $\mu_*(A) = \inf_{P \in \mathcal{P}} P(A)$, $A \in \mathcal{F}$, gdzie $\mathcal{P}$ jest pewną rodziną miar probabilistycznych. W wielu sytuacjach mamy tylko część informacji, na podstawie których musimy podjąć decyzję. Przykładowo, gdy $\mathcal{P}$ oznacza zbiór poglądów ekspertów na temat zachowania się ceny akcji, to posługując się μ^*, przyjmujemy

5 G. Choquet, *Theory of capacities*, „Annales de l'Institut Fourier" 1953, vol. 5, s. 131–295.

6 M. Sugeno, *Theory of Fuzzy Integrals and its Applications*, Ph.D. Dissertation, Tokyo Institute of Technology, Tokyo 1974.

stanowisko najbardziej optymistyczne spośród wszystkich stanowisk, a stosując μ_*, przyjmujemy stanowisko przeciwne. Pseudomiary mają zatem pomóc w mierzeniu pewnych wielkości, gdy mamy niepełne dane lub subiektywne opinie. Innymi przykładami pseudomiar są pewne zniekształcenia miar prawdopodobieństwa[7], a także miara niepewności, która została wprowadzona przez B. Liu w 2014 r.[8] Spełnia ona dodatkowo własność przeliczalnej subaddytywności oraz dualności, tzn. $\mu(A)+\mu(A^c)=1$, gdzie $A^c=\Omega\setminus A$, dla dowolnego $A\in\mathcal{F}$. Szczególnym przypadkiem miary niepewności jest *credibility*[9], definiowana jako średnia arytmetyczna pseudomiar możliwości (*possibility*) *Pos* oraz konieczności (*necessity*) *Nec*

$$Pos(A)=\sup_{x\in A}\nu(x),\quad Nec(A)=1-\sup_{x\in A^c}\nu(x),\quad A\in\mathcal{F},$$

gdzie $\nu:\Omega\to[0,1]$ jest dowolną funkcją.

Pseudomiarę *credibility* zastosowano w różnych obszarach nauki, m.in. w finansach behawioralnych[10] oraz w pewnych modelach finansowych. Na ten temat ukazało się kilka prac w czasopiśmie „Insurance: Mathematics and Economics". Przykładowo, W.-G. Zhang i inni w 2011 r. przedstawili dwa problemy optymalizacyjne *mean-variance* na podstawie *credibility* z uwzględnieniem rozmytej stopy zwrotu, kosztów transakcji oraz różnych stóp procentowych pożyczki i kredytu[11]. Rok później ukazała się praca autorstwa J.S. Kamdemy i innych[12], prezentująca dwa modele wyboru portfela finansowego – *mean-variance-skewness* oraz *mean-variance-semikurtosis*, oparte również na *credibility*. Natomiast w pracy P. Gupty i innych[13] zaproponowano model wartości oczekiwanej do zmiany struktury portfela w wielokryterialnym rozmytym środowisku rozważający stopy zwrotu, ryzyko oraz płynność aktywów.

---

7 A. Tversky, D. Kahneman, *Advances in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty*, „Journal of Risk and Uncertainty" 1992, vol. 5, s. 297–323.

8 B. Liu, *Uncertainty Theory*, Springer, Dordrecht 2015.

9 I. Georgescu, *Possibility Theory and the Risk*, Springer, Berlin 2012.

10 Ibidem.

11 W.-G. Zhang, X. Zhang, Y. Chen, *Portfolio adjusting optimization with added assets and transaction costs based on credibility measures*, „Insurance: Mathematics and Economics" 2011, vol. 49, s. 353–360.

12 J.S. Kamdema, C.T. Deffo, L.A. Fono, *Moments and semi-moments for fuzzy portfolio selection*, „Insurance: Mathematics and Economics" 2012, vol. 51, s. 517–530.

13 P. Gupta, G. Mittal, M.K. Mehlawatb, *Expected value multiobjective portfolio rebalancing model with fuzzy parameters*, „Insurance: Mathematics and Economics" 2013, vol. 52, s. 190–203.

Naturalną konsekwencją wprowadzenia pseudomiary jest próba zdefiniowania całki względem niej. W 1953 r. G. Choquet zdefiniował funkcjonał, nazwany później całką Choqueta.

Definicja 2.2. Całka Choqueta dla mierzalnej funkcji $X:\Omega\to\left[0,\infty\right)$ względem pseudomiary μ po zbiorze mierzalnym A dana jest wzorem

$$(C)\int_A X\ \mathrm{d}\mu=\int_0^\infty \mu\left(A\cap\left\{X\geq t\right\}\right)\mathrm{d}t, \tag{2}$$

gdzie całka po prawej stronie nierówności (2) jest całką niewłaściwą Riemanna.

Łatwo dostrzec, że całka Choqueta jest miarą ryzyka. Jej własności są opisane w książce D. Denneberga[14]. Obecnie jest stosowana w ekonomii oraz w matematyce finansowej i ubezpieczeniowej. Zauważmy, że miara ryzyka Wanga jest szczególnym przypadkiem całki Choqueta.

Przedstawimy teraz inne propozycje całek, które okażą się również miarami ryzyka. Zanim jednak to uczynimy, wprowadźmy pomocnicze pojęcie.

Definicja 2.3. Funkcję $\circ:[0,1]^2\to\left[0,1\right]$ nazywamy działaniem pseudomultiplikatywnym, gdy spełnia następujące warunki[15]:

1) $\circ$ jest funkcją niemalejącą, tj. dla wszystkich $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2\in\left[0,1\right]$ takich, że $a_1\leq b_1$ i $a_2\leq b_2$, zachodzi $a_1\circ a_2\leq b_1\circ b_2$;
2) $a\circ 0=0\circ a=0$ dla dowolnego $a\in\left[0,1\right]$;
3) $\circ$ ma element neutralny różny od 0, tj. istnieje $e\in\left(0,1\right]$ taki, że dla każdego $a\in\left[0,1\right]$ zachodzi $a\circ e=e\circ a=a$.

Przykładem działania pseudomultiplikatywnego może być minimum, mnożenie albo T-norma[16].

2.1. Uogólniona całka Sugeno

Oznaczmy przez $\mathcal{Y}\subset\left[0,1\right]$ pewien niepusty zbiór.

Definicja 2.4. Uogólnioną całką Sugeno ze zmiennej losowej $X:\Omega\to\mathcal{Y}$ po mierzalnym zbiorze $A\subset\Omega$ nazywamy funkcjonał postaci

[14] D. Denneberg, *Non-Additive Measure and Integral*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht 1994.

[15] E.P. Klement, R. Mesiar, E. Pap, *Triangular norms*, Kluwer, Dordrecht 2000.

[16] E.P. Klement, R. Mesiar, E. Pap, *A universal integral as common frame for Choquet and Sugeno integral*, „IEEE Transactions Fuzzy Sets and Systems" 2010, vol. 18, s. 178–187.

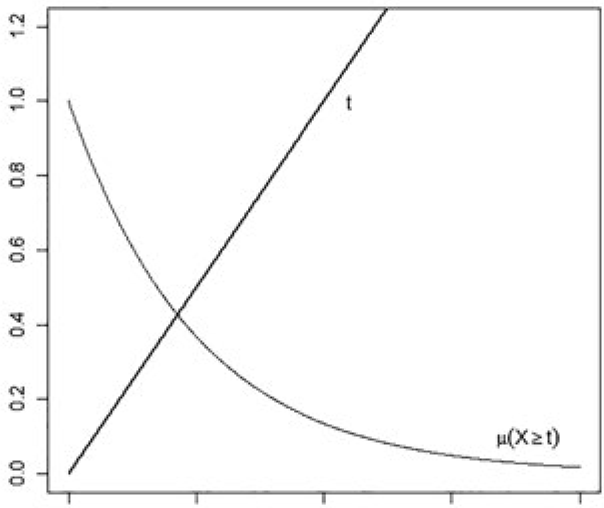
$$\Pi_{\circ, A}\left(X\right) := \sup_{a \in \mathcal{Y}} \left\{ a \circ \mu\left(A \cap \left\{X \geq a\right\}\right)\right\}, \tag{3}$$

gdzie $\left\{X \geq a\right\} = \left\{\omega \in \Omega : X\left(\omega\right) \geq a\right\}$ oraz $\circ : \mathcal{Y} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$ jest działaniem pseudomultiplikatywnym.

Korzystając z monotoniczności pseudomiary oraz działania pseudomultiplikatywnego, łatwo można sprawdzić, że uogólniona całka Sugeno jest miarą ryzyka zgodnie z przyjętą definicją 1.1.

Gdy $\circ = \wedge$, gdzie $a \wedge b = \min\left(a, b\right)$, to funkcjonał (3) nazywamy całką Sugeno[17], tj.

$$\Pi_{\wedge, A}\left(X\right) = \sup_{a \in \mathcal{Y}} \left\{ a \wedge \mu\left(A \cap \left\{X \geq a\right\}\right)\right\}. \tag{4}$$



Punkt przecięcia wykresów funkcji $g\left(t\right) = t$ i $\mu\left(\left\{X \geq t\right\}\right)$ wyznacza wartość całki Sugeno.

Rysunek 1. Interpretacja geometryczna całki Sugeno

Źródło: opracowanie własne.

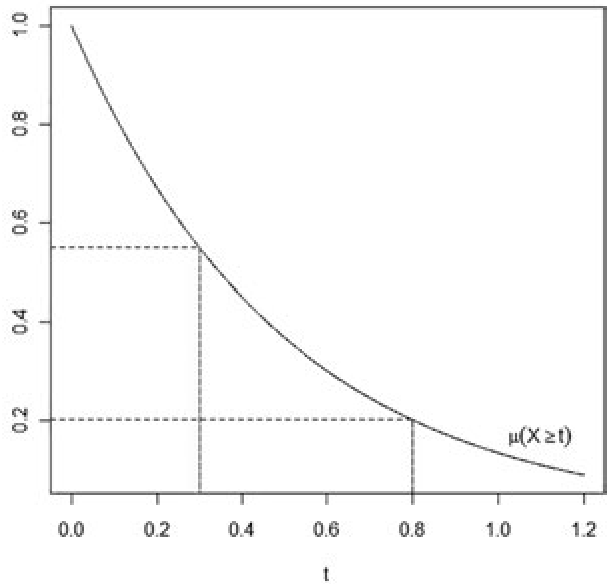
[17] M. Sugeno, op.cit.

Całka Sugeno znalazła wiele zastosowań w różnych dziedzinach nauki, także w matematyce finansowej i ekonomii. A. Chateauneuf i inni[18] podali charakterystykę całki Sugeno przy pomocy aksjomatów dla pewnej relacji. W teorii ryzyka okazuje się, że jedyną miarą siły (*robust measure*) będącą alternatywą dla koherentnej miary ryzyka jest właśnie całka Sugeno[19].

Gdy $\circ = \cdot$ w (3), otrzymujemy funkcjonał

$$\Pi_{\cdot}\left(X\right) = \sup_{a \in \mathcal{Y}} \left\{ a \cdot \mu\left(A \cap \left\{X \geq a\right\}\right)\right\},$$

nazywany całką Shilkreta[20] (patrz rysunek 2).



Największe pole prostokąta mieszczące się pod wykresem funkcji $\mu\left(\left\{X \geq t\right\}\right)$ podaje wartość całki Shilkreta.

Rysunek 2. Interpretacja geometryczna całki Shilkreta

Źródło: opracowanie własne.

[18] A. Chateauneuf, M. Grabisch, A. Rico, *Modeling attitudes toward uncertainty through the use of the Sugeno integral*, „Journal of Mathematical Economics" 2008, vol. 44, s. 1084–1099.

[19] L. Bonaccorso, S. Greco, B. Matarazzo, P. Platania, *Some new properties of risk measures*, „Modern Concepts of the Theory of the Firm'' 2004, s. 369–385.

[20] N. Shilkret, *Maxitive measure and integration*, „Indagationes Mathematicae" 1971, vol. 33, s. 109–116.

2.2. Własności całki Sugeno i Shilkreta

Zarówno całka Sugeno, jak i całka Shilkreta spełniają własność M1 i M3 (przypomnijmy, że $\mu(\Omega)=1$). L. Wu[21] pokazał dodatkowo, że całka Sugeno ma własność M6:

Twierdzenie 2.1. Niech $\phi_i:[0,1]\to[0,1]$, $i=1,2,3$, będą ciągłymi i rosnącymi funkcjami takimi, że $\phi_1(x)\ge\phi_j(x)$ dla $j=2,3$. Jeżeli $X,Y:\Omega\to[0,1]$ są komonotoniczne, to[22]

$$\phi_1^{-1}\left(\Pi_{\wedge,A}\left(\phi_1\left(X+Y\right)\right)\right)\le\phi_2^{-1}\left(\Pi_{\wedge,A}\left(\phi_2\left(X\right)\right)\right)+\phi_3^{-1}\left(\Pi_{\wedge,A}\left(\phi_3\left(Y\right)\right)\right).$$

W dalszej części tego podpunktu przedstawimy kilka nierówności dla uogólnionej całki Sugeno, które podają pewne związki między ryzykami[23]. Załóżmy, że $\mathcal{Y}$ będzie dowolnym zbiorem postaci $[0,\bar{y}]$ gdzie $\bar{y}\in(0,1]$, $\phi_i:\mathcal{Y}\to\mathcal{Y}$, $i=1,2,3$, będzie funkcją rosnącą taką, że $\phi_i(\mathcal{Y})=\mathcal{Y}$, co implikuje, że ϕ_i jest ciągła. Dodatkowo przyjmijmy, że $*:\mathcal{Y}\times\mathcal{Y}\to\mathcal{Y}$ jest rosnącym operatorem, tj. $a*c>b*d$, o ile $a>b$ i $c>d$, a także $\boxdot:\mathcal{Y}\times\mathcal{Y}\to[0,1]$ jest niemalejącą funkcją. Ustalmy również funkcję $\circ_i:\mathcal{Y}\to\mathcal{Y}$ dla $i=1,2,3$.

Twierdzenie 2.2. Przyjmijmy, że $b\mapsto a\circ_1 b$ jest niemalejącym działaniem dla $a\in\mathcal{Y}$, oraz funkcje $\alpha\mapsto\alpha\boxdot\beta$ i $b\mapsto a\boxdot b$ będą lewostronnie ciągłe dla $a,\beta\in\mathcal{Y}$. Niech $X,Y:\Omega\to\mathcal{Y}$ będą zmiennymi losowymi oraz $A,B\in\mathcal{F}$. Jeśli $X_{|_A}$ i $Y_{|_B}$ są komonotoniczne oraz dla dowolnych $a,b,c,d\in\mathcal{Y}$

$$\phi_1^{-1}\left(\phi_1\left(a*b\right)\circ_1\left(c\wedge d\right)\right)\ge\phi_2^{-1}\left(\phi_2\left(a\right)\circ_2 c\right)\boxdot\phi_3^{-1}\left(\phi_3\left(b\right)\circ_3 d\right)$$

albo $X_{|_A}$ i $Y_{|_B}$ są niezależne oraz dla dowolnych $a,b,c,d\in\mathcal{Y}$

$$\phi_1^{-1}\left(\phi_1\left(a*b\right)\circ_1\left(cd\right)\right)\ge\phi_2^{-1}\left(\phi_2\left(a\right)\circ_2 c\right)\boxdot\phi_3^{-1}\left(\phi_3\left(b\right)\circ_3 d\right),$$

to

$$\phi_1^{-1}\left(\Pi_{\circ_1,A\cap B}\left(\phi_1\left(X*Y\right)\right)\right)\ge\phi_2^{-1}\left(\Pi_{\circ_2,A}\left(\phi_2\left(X\right)\right)\right)\boxdot\phi_3^{-1}\left(\Pi_{\circ_3,B}\left(\phi_3\left(Y\right)\right)\right).\qquad(5)$$

---

21 L. Wu, J. Sun, X. Ye, L. Zhu, *Hölder type inequality for Sugeno integral*, „Fuzzy Sets and Systems" 2010, vol. 161, s. 2337–2347.

22 Ibidem.

23 Ogólniejsze wyniki można znaleźć w pracach: M. Kaluszka, A. Okolewski, M. Boczek, *On Chebyshev type inequalities for generalized Sugeno integrals*, „Fuzzy Sets and Systems" 2014, vol. 244, s. 51–62; M. Kaluszka, A. Okolewski, M. Boczek, *On the Jensen type inequality for generalized Sugeno integral*, „Information Sciences" 2014, vol. 266, s. 140–147.

Sformułujemy teraz w postaci wniosku z twierdzenia 2.2 kilka zależności między ryzykami, dających także odpowiedź na pytanie o to, jak można szacować z dołu np. miarę iloczynu dwóch komonotonicznych bądź niezależnych ryzyk.

Wniosek 2.1

1. Niech $X_{|_A}$ i $Y_{|_B}$ będą zmiennymi komonotonicznymi oraz $\boxdot = * = \circ_i = \cdot$ i $\phi_1(x) = x$. Gdy $\phi_i(x)/x$ jest funkcją nierosnącą, to prawdziwa jest nierówność typu Czebyszewa dla całki Shilkreta

$$\Pi_{\cdot,\ A\cap B}(XY) \geq \phi_2^{-1}\left(\Pi_{\cdot,\ A}\left(\phi_2(X)\right)\right)\phi_3^{-1}\left(\Pi_{\cdot,B}\left(\phi_3(Y)\right)\right).$$

2. Niech $X_{|_A}$ i $Y_{|_B}$ będą zmiennymi losowymi niezależnymi oraz $\boxdot = * = \cdot$ i $\circ_i = \wedge$. Jeżeli $\phi_2(x)\phi_3(y) \geq \phi_1(xy)$, to

$$\phi_1^{-1}\left(\Pi_{\wedge,\ A\cap B}\left(\phi_1(XY)\right)\right) \geq \phi_2^{-1}\left(\Pi_{\wedge,\ A}\left(\phi_2(X)\right)\right)\phi_3^{-1}\left(\Pi_{\wedge,B}\left(\phi_3(Y)\right)\right).$$

W pracy M. Kaluszki i innych[24] zostały podane również warunki konieczne prawdziwości zachodzenia nierówności (5), a także warunki równoważne nierówności odwrotnej do (5).

2.3. Całka benchmarkowa i jej własności

Teraz przedstawimy inną propozycję miary ryzyka – całkę benchmarkową, która w naturalny sposób uogólnia całkę Sugeno. Niech $\mathcal{Y} = [0,1]$. Dla ryzyka $X : \Omega \to \mathcal{Y}$ zdefiniujemy całkę benchmarkową po zbiorze $A \in \mathcal{F}$ z X dla μ i r jako

$$\Pi_{(\mu,r,\ A)}(X) = \sup\left\{a \in [0,1):\ \mu\left(A \cap \{X \geq t\}\right) \geq r(t,a)\ dla\ \ t \in \mathcal{Y}\right\}, \tag{6}$$

gdzie $r = \left\{r(x,a) : a \in [0,1), x \in \mathcal{Y}\right\}$ będzie rodziną funkcji spełniających następujące własności:

R1. $x \mapsto r(x,a)$ jest nierosnąca i $a \mapsto r(x,a)$ niemalejąca odpowiednio dla dowolnych a i x,

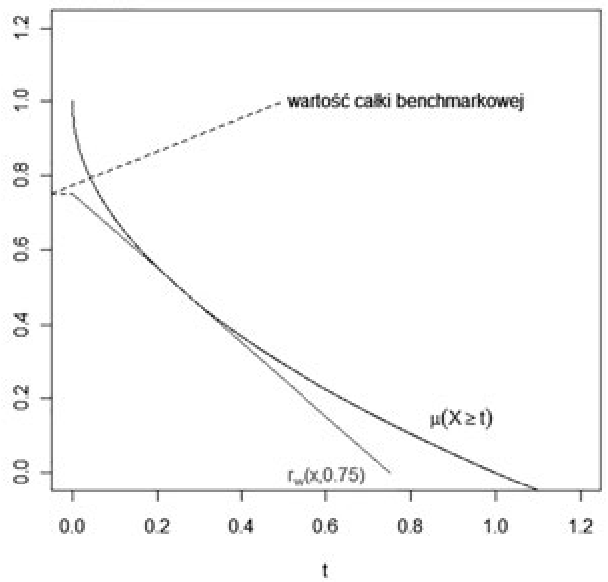
R2. $r(0,a) = r(0+,a) = a$ dla każdego a,

R3. dla dowolnego a, $r(x,a) > 0$, jeśli $x < a$ oraz $r(x,a) = 0$, gdy $x > a$, przy czym $r(0+,a)$ oznacza prawostronną granicę w punkcie $x = 0$.

Własności R2–R3 implikują $r(x,0) = 0$ dla $x \in \mathcal{Y}$, zapewniając, że całka (6) jest dobrze określona, podczas gdy R1–R2 gwarantują $0 \leq r(x,a) \leq r(0,a) =$

[24] M. Kaluszka, A. Okolewski, M. Boczek, *On Chebyshev type…*, op.cit.

$= a < \mu(\Omega)$ dla dowolnych a i x. Funkcję r można interpretować jako najlepsze symetryczne dopasowanie funkcji do ogona dystrybuanty zmiennej losowej X, gdzie oczywiście dystrybuanta zdefiniowana nie jest za pomocą miary probabilistycznej, lecz przy użyciu pseudomiary unormowanej (patrz rysunek 3). Przykładami funkcji r spełniającymi warunki R1–R3 mogą być: $r_S(x,a) = a1_{[0,a]}(x)$ albo $r_{GG}(x,a) = (a^p - x^p)_+^{1/p}$, $p \geq 1$, zaproponowana przez M. Gągolewskiego i P. Grzegorzewskiego[25], gdzie $(a)_+ = \max(a,0)$. Gdy $p = 1$, otrzymujemy szczególny przypadek funkcji benchmarkowej, zwanej funkcją Woegingera, $r_W(x,a) = (a - x)_+$.



Funkcja $r_W(x,0{,}75)$ jest najlepszym przybliżeniem ogona dystrybuanty zmiennej losowej X, $\mu(\{X \geq t\})$. Wartość całki benchmarkowej jest równa 0,75.

Rysunek 3. Interpretacja geometryczna całki benchmarkowej

Źródło: opracowanie własne.

[25] M. Gągolewski, P. Grzegorzewski, *A geometric approach to the construction of scientific impact indices*, „Scientometrics" 2009, vol. 81, s. 617–634.

Całka benchmarkowa $\Pi_{(\mu,r,A)}$ ma następujące własności:

Lemat 2.1. Niech $A \in \mathcal{F}$ oraz m i μ będą pseudomiarami określonymi na $(\Omega, \mathcal{F})$.

P1. Jeśli $X \leq Y$, to $\Pi_{(\mu,r,A)}(X) \leq \Pi_{(\mu,r,A)}(Y)$.

P2. Jeśli $\mu(A) \leq m(A)$, to $\Pi_{(\mu,r,A)}(X) \leq \Pi_{(m,r,A)}(X)$.

P3. Jeśli $\mu(\{X \geq t\}) = m(\{Y \geq t\})$ dla $t \in \mathcal{Y}$, to $\Pi_{(\mu,r,A)}(X) = \Pi_{(m,r,A)}(Y)$.

P4. $\Pi_{(\mu,r,A)}(X) = \Pi_{(\mu,r,\Omega)}(X1_A)$.

P5. Jeśli $X_c(\omega) = c1_A(\omega)$, $c \in \mathcal{Y}$, to

$$\Pi_{(\mu,r,A)}(X_c) = c \wedge \mu(A). \tag{7}$$

Dowód. Własności P1–P4 wynikają bezpośrednio z monotoniczności pseudomiary μ. Dowód przeprowadzimy dla P5. Zdefiniujmy

$$B_A(X) = \left\{a \in [0, \mu(\Omega)) \colon \ \mu(A \cap \{X \geq t\}) \geq r(t,a) \ \text{ dla } \ t \in \mathcal{Y}\right\}. \tag{8}$$

Zauważmy, że $\mu(\{X_c \geq t\}) = \mu(\Omega)$ dla $t = 0$, $\mu(\{X_c \geq t\}) = \mu(A)$ dla $0 < t \leq c$, i $\mu(\{X_c \geq t\}) = 0$ dla $t > c$.

Niech $\mu(A) \geq c$. Wtedy z R1 i R2, $r(t,c) \leq r(0,c) = c \leq \mu(A) \leq \mu(\{X_c \geq t\})$ dla każdego $t \leq c$, oraz z R3, $r(t,c) = 0 \leq \mu(\{X_c \geq t\})$ dla $t > c$. Stąd $c \in B_\Omega(X_c)$. Pokażemy, że $c = \sup B_\Omega(X_c)$. Przypuśćmy nie wprost, że istnieje takie $a > c$, że $a \in B_\Omega(X_c)$. Dla $\hat{a} = (a+c)/2$, $r(\hat{a},a) > 0 = \mu(\{X_c \geq \hat{a}\})$, bo $c < \hat{a} < a$ i R3. Dlatego $\hat{a} \notin B_\Omega(X_c)$ i $c = \sup B_\Omega(X_c)$.

Niech teraz $\mu(A) < c$. Korzystając z R1 i R2, dostajemy $\mu(\{X_c \geq t\}) \geq \mu(A) = r(0,\mu(A)) \geq r(t,\mu(A))$ dla $0 \leq t \leq c$. Dla $t > c > \mu(A)$ z R3 mamy $r(t,\mu(A)) = 0 \leq \mu(\{X_c \geq t\})$, stąd $\mu(A) \in B_\Omega(X_c)$. Pokażemy, że $\mu(A) = \sup B_\Omega(X_c)$. Przypuśćmy, że istnieje $a > \mu(A)$ i $a \in B_\Omega(X_c)$. Skoro $a = r(0,a) > \mu(A)$, prawostronna ciągłość funkcji $x \mapsto r(x,a)$ w punkcie 0 implikuje istnienie $\hat{t} \in (0,c)$

takie, że $r(\hat{t},a) > \mu(A) = \mu(\{X_c \geq \hat{t}\})$, więc $a \notin B_\Omega(X_c)$, sprzeczność, co kończy dowód. ∎

Własność P1 z lematu 2.1 pokazuje, że całka benchmarkowa jest miarą ryzyka zgodnie z definicją 1.1.

Uwaga 2.1. Zauważmy, że uogólniona całka Sugeno jest innym funkcjonałem niż całka benchmarkowa, gdyż $\Pi_{\circ,\ A}(c) = c \circ \mu(A) \neq \Pi_{(\mu, r,\ A)}(c)$ dla $\circ \neq \wedge$ z P5.

Teraz przedstawimy inne własności miary ryzyka, które spełnia całka benchmarkowa.

Twierdzenie 2.3

1. Całka benchmarkowa ma własności M1 i M3.

2. Załóżmy, że X, Y są komonotonicznymi ryzykami oraz funkcja r spełnia warunki R2–R3 oraz:

R1' dla dowolnego $a \geq 0$, funkcja $0 \leq x \mapsto r(x,a)$ jest nierosnąca i prawostronnie ciągła oraz dla każdego $x \geq 0$, funkcja $a \mapsto r(x,a)$ jest rosnąca na $[x, \infty)$ i lewostronnie ciągła na $(0, \infty)$,

R4 $r(x,a) \leq r(x+d, a+d)$ dla $x, a, d \geq 0$,

R5 dla dowolnego $a > 0$, $sup_{0 \leq x \leq a}(r(x+d, a+d) - r(x,a)) \to 0$, gdy $d \to 0$.

Wówczas $\Pi_{(\mu, r,\ A)}(X+Y) \leq \Pi_{(\mu, r,\ A)}(X) + \Pi_{(\mu, r,\ A)}(Y)$, czyli całka benchmarkowa jest komonotonicznie subaddytywna (M6).

Uwaga 2.2. Zauważmy, że założenie R1' jest założeniem mocniejszym od założenia R1.

Warunki R1' oraz R4–R5 spełniają m.in. takie funkcje benchmarkowe jak $r_S(x,a)$ albo $r_{GG}(x,a)$ dla $p \geq 1$.

3. Warunkowa wartość oczekiwana względem pseudomiar

Do tej pory zdefiniowaliśmy pseudomiarę oraz przedstawiliśmy różne całki, które mogą być odpowiednikiem wartości oczekiwanej w klasycznej teorii prawdopodobieństwa. Można się zastanawiać, czy udałoby się zdefiniować warunkową wartość oczekiwaną, która jest podstawowym narzędziem w matematyce ubezpieczeniowej do wyliczania składek. W tym punkcie przedstawimy koncepcję przedstawioną przez E. Lehrera z 2005 r.[26]

Niech Ω będzie zbiorem skończonym, natomiast $\mathcal{G}=2^{\Omega}$. Oznaczmy przez $\underline{X}(\omega)=\min_{\omega'\in\mathcal{G}(\omega)}X(\omega')$ oraz $\bar{X}(\omega)=\max_{\omega'\in\mathcal{G}(\omega)}X(\omega')$, gdzie $\mathcal{G}(\omega)\subset\mathcal{G}$ jest atomem ciała $\mathcal{G}$ zawierającym ω, czyli pewnym niepustym zbiorem $A\in\mathcal{G}$, takim że jedynym właściwym jego podzbiorem z $\mathcal{G}$ jest zbiór pusty.

Niech $\mathcal{N}(X,\mathcal{G})$ oznacza podzbiory tych $Y\in\mathcal{M}(\mathcal{G})$, gdzie $\mathcal{M}(\mathcal{G})$ oznacza rodzinę wszystkich funkcji $\mathcal{G}$-mierzalnych, które spełniają tzw. warunek nieobciążoności $(C)\int_{\Omega}(X-Y)\,\mathrm{d}\mu=0$ i $\underline{X}(\omega)\le Y(\omega)\le\bar{X}(\omega)$ dla dowolnego ω.

Definicja 3.1. Warunkową wartością oczekiwaną zmiennej losowej X względem pseudomiary (WWOP) pod warunkiem ciała $\mathcal{G}$, oznaczoną przez $\mathbb{E}(X\mid\mathcal{G})$ albo przez $\hat{Y}$, jest zmienna losowa $\hat{Y}\in\mathcal{N}(X,\mathcal{G})$ minimalizująca wyrażenie $(C)\int_{\Omega}(X-Y)^2\ d\mu$ [27]. Formalnie

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\in\operatorname{argmin}_{Y\in\mathcal{N}(X,\mathcal{G})}\ (C)\int_{\Omega}(X-Y)^2\ \mathrm{d}\mu.$$

Uwaga 3.1. Rozwiązanie poniższego problemu nie musi być jednoznaczne

$$\min_{Y\in\mathcal{N}(X,\mathcal{G})}(C)\int_{\Omega}(X-Y)^2\ \mathrm{d}\mu.$$

Własność 3.1. WWOP ma następujące własności:

1. Jeśli μ jest pseudomiarą σ-addytywną, to $\mathbb{E}(X\mid\mathcal{G})$ jest klasyczną warunkową wartością oczekiwaną.
2. Jeśli X jest $\mathcal{G}$-mierzalna, to $\mathbb{E}(X\mid\mathcal{G})=X$.
3. $\mathbb{E}(X\mid\mathcal{G}_0)=(C)\int_{\Omega}X\ d\mu$, gdzie $\mathcal{G}_0$ oznacza ciało trywialne.
4. $(C)\int_{\Omega}\left(X-\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\right)d\mu=0.$
5. $\mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X\mid\mathcal{G}))\mid\mathcal{G})=0.$
6. Jeśli $c\ge 0$, to $\mathbb{E}(cX|\mathcal{G})=c\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$.
7. Jeśli Z jest $\mathcal{G}$-mierzalna, to $\mathbb{E}(Z+X\mid\mathcal{F})=Z+\mathbb{E}(X\mid\mathcal{G})$.
8. $\mathbb{E}(X\mid\mathcal{G})(\omega)$ jest wartością pomiędzy minimum i maksimum X we wszystkich ω.

[26] E. Lehrer, *Updating non-additive probabilities – a geometric approach*, „Games and Economic Behavior" 2005, vol. 50, s. 42–57.

[27] Ibidem.

O ile wiemy, nie ma pracy, w której podano rozszerzenie definicji WWOP na przypadek, gdy przestrzeń Ω nie jest skończona. Pojawiły się natomiast prace definiujące WWOP w inny sposób, ale zawsze są one definiowane na ciele podzbiorów zbioru skończonego.

4. Podsumowanie

Pseudomiary zostały wprowadzone w połowie ubiegłego stulecia. Jednak przez wiele lat nie pamiętano o nich. Badania wznowiono w latach 90. XX w. W tym czasie powstało wiele prac związanych z ich zastosowaniami. W tym opracowaniu przedstawiliśmy jedno z nich, tj. zastosowanie do mierzenia ryzyka. Zaprezentowaliśmy dwa funkcjonały, które mogą służyć do pomiaru ryzyka, i podaliśmy ich własności.

Bibliografia

Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M., Heath D., *Coherent Measures of Risk*, „Mathematical Finance" 1999, vol. 9, s. 203–228.

Bonaccorso L., Greco S., Matarazzo B., Platania P., *Some new properties of risk measures*, „Modern Concepts of the Theory of the Firm'' 2004, s. 369–385.

Chateauneuf A., Grabisch M., Rico A., *Modeling attitudes toward uncertainty through the use of the Sugeno integral*, „Journal of Mathematical Economics" 2008, vol. 44, s. 1084–1099.

Choquet G., *Theory of capacities*, „Annales de l'Institut Fourier" 1953, vol. 5, s. 131–295.

Denneberg D., *Non-Additive Measure and Integral*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht 1994.

Denuit M., Dhaene J., Goovaerts M., Kaas R., *Actuarial Theory for Dependent Risks. Measures, Orders and Models*, John Wiley and Sons, Chippenham 2005.

Gągolewski M., Grzegorzewski P., *A geometric approach to the construction of scientific impact indices*, „Scientometrics" 2009, vol. 81, s. 617–634.

Georgescu I., *Possibility Theory and the Risk*, Springer, Berlin 2012.

Gupta P., Mittal G., Mehlawatb M.K., *Expected value multiobjective portfolio rebalancing model with fuzzy parameters*, „Insurance: Mathematics and Economics" 2013, vol. 52, s. 190–203.

Kaluszka M., Okolewski A., Boczek M., *On Chebyshev type inequalities for generalized Sugeno integrals*, „Fuzzy Sets and Systems" 2014, vol. 244, s. 51–62.

Kaluszka M., Okolewski A., Boczek M., *On the Jensen type inequality for generalized Sugeno integral*, „Information Sciences" 2014, vol. 266, s. 140–147.

Kamdema J.S., Deffo C.T., Fono L.A., *Moments and semi-moments for fuzzy portfolio selection*, „Insurance: Mathematics and Economics" 2012, vol. 51, s. 517–530.

Klement E.P., Mesiar R., Pap E., *A universal integral as common frame for Choquet and Sugeno integral*, „IEEE Transactions Fuzzy Sets and Systems" 2010, vol. 18, s. 178–187.

Klement E.P., Mesiar R., Pap E., *Triangular norms*, Kluwer, Dordrecht 2000.

Lehrer E., *Updating non-additive probabilities – a geometric approach*, „Games and Economic Behavior" 2005, vol. 50, s. 42–57.

Liu B., *Uncertainty Theory*, Springer, Dordrecht 2015.

Shilkret N., *Maxitive measure and integration*, „Indagationes Mathematicae" 1971, vol. 33, s. 109–116.

Sugeno M., *Theory of Fuzzy Integrals and its Applications*, Ph.D. Dissertation, Tokyo Institute of Technology, Tokyo 1974.

Tversky A., Kahneman D., *Advances in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty*, „Journal of Risk and Uncertainty" 1992, vol. 5, s. 297–323.

Wu L., Sun J., Ye X., Zhu L., *Hölder type inequality for Sugeno integral*, „Fuzzy Sets and Systems" 2010, vol. 161, s. 2337–2347.

Zhang W.-G., Zhang X., Chen Y., *Portfolio adjusting optimization with added assets and transaction costs based on credibility measures*, „Insurance: Mathematics and Economics" 2011, vol. 49, s. 353–360.

* * *

On some risk measures

Summary

The aim of this paper is to introduce functionals defined for some families of random variables by using pseudomeasures, also known as monotone measures or fuzzy measures. These functionals can become an alternative tool for measuring risk. We will give their graphical interpretation and selected properties.

Keywords: generalised Sugeno integral, Choquet integral, risk measure, non--additive measure