Marcin Topolewski, Michał Bernardelli

Kolegium Analiz Ekonomicznych
Szkoła Główna Handlowa w Warszawie

Optymalizacja reguł przejścia systemu bonus-malus o składkach Q-optymalnych

Streszczenie

Systemy bonus-malus są narzędziem różnicowania składek w procesie oceny ryzyka *a posteriori* stosowanym w ubezpieczeniach komunikacyjnych. W literaturze przedmiotu dobrze opisane są narzędzia analizy systemów oraz kryteria wyznaczania składek. Stosunkowo mało miejsca poświęca się natomiast optymalizacji reguł przejścia pomiędzy klasami systemu bonus-malus. Problem wydaje się szczególnie interesujący w kontekście projektowania systemów. Możliwość budowy systemu z góry spełniającego określone kryterium optymalności wydaje się pożądana. W pracy podejmujemy próbę optymalizacji reguł przejścia systemów bonus-malus różnych rozmiarów dla portfeli ubezpieczonych charakteryzujących się funkcją struktury ryzyka o różnych parametrach. Staramy się odpowiedzieć na pytania, czy optymalizacja reguł przejścia pozwoli usprawnić i zobiektywizować proces budowy systemu bonus-malus oraz czy dążenie do uzyskania dobrych własności statystycznych systemu bonus-malus idzie w parze z pożądanymi właściwościami użytkowymi.

Słowa kluczowe: system bonus-malus, reguły przejścia, optymalizacja, ubezpieczenia komunikacyjne

1. Wstęp

W literaturze przedmiotu obszernie opisane są zagadnienia związane z oceną funkcjonowania systemów bonus-malus, sposoby obliczania składek oraz aspekty optymalizacji związane z łaknieniem zniżek. Stosunkowo mało miejsca poświęca się natomiast optymalizacji reguł przejścia pomiędzy klasami systemu bonus-malus. Do tej pory brakuje ugruntowanych w praktyce metod takiej optymalizacji. Problem wydaje się szczególnie interesujący w kontekście projektowania systemów. Możliwość budowy systemu z góry spełniającego określone kryterium optymalności wydaje się pożądana.

Przy konstrukcji systemu przyjmuje się zwykle subiektywne założenia co do liczby klas, wyróżnianej liczby szkód oraz reguł przejścia. Powszechny sposób konstrukcji systemu bonus-malus polega na propozycji systemu, badaniu właściwości systemu, korekcie systemu i kolejnych iteracjach tych kroków do osiągnięcia zadowalającego efektu. W badaniu staramy się odpowiedzieć na pytanie, czy można usprawnić i zobiektywizować ten proces przez optymalizację reguł przejścia.

2. Zakres i cel badania

Inspiracją do przeprowadzenia niniejszego badania był artykuł z 1985 r. autorstwa M. Marlocka *Aspects of optimization in automobile insurance*[1], w którym została podjęta próba optymalizacji reguł przejścia ówczesnego niemieckiego systemu bonus-malus dla okresu 25 lat. W artykule zastosowano uproszczone podejście, w którym struktura ryzyka była modelowana za pomocą funkcji wykładniczej z parametrem 0,11.

Zakres opisanego w pracy badania obejmuje próbę optymalizacji reguł przejścia dla różnych systemów bonus-malus, różniących się liczbą klas (s) i liczbą wyróżnianych szkód (q). W tym celu modyfikujemy zaproponowane przez M. Marlocka[2] podejście optymalizacyjne, wyprowadzamy własną miarę jakości oceny ubezpieczonych, wykorzystujemy bardziej odpowiednią do modelowania rzeczywistych portfeli funkcję struktury ryzyka określoną rozkładem odwrotnym gaussowskim. Aby zbadać możliwie szerokie spektrum portfeli ubezpieczonych różniących się średnią i wariancją częstości szkód, stosujemy różne parametry rozkładu odwrotnego gaussowskiego. Otrzymane systemy analizujemy w świetle miar ich jakości. Badanie jest przeprowadzone dla stanu stacjonarnego.

Celem badania jest rozszerzenie i uogólnienie wniosków płynących z optymalizacji reguł przejścia systemu bonus-malus oraz odpowiedź na pytania, czy optymalizacja reguł przejścia pozwoli usprawnić i zobiektywizować proces budowy systemu bonus-malus oraz czy dążenie do uzyskania dobrych własności statystycznych systemu bonus-malus idzie w parze z pożądanymi właściwościami użytkowymi.

---

1 M. Marlock, *Aspects of optimization in automobile insuranc*e, Lecture Notes in Economics and Mathematics Systems, Springer, Berlin–New York 1985, s. 131–141.

2 Ibidem.

3. Charakterystyka ryzyka

W badaniu przyjmujemy typowe założenia dotyczące ryzyka związanego ze szkodowością. Zakładamy, że zmienne losowe określające wysokość pojedynczej szkody i liczbę zgłoszonych szkód są niezależne, a oczekiwana wysokość szkody wynosi jeden. Wówczas częstotliwość szkód (tradycyjnie oznaczana jako λ) jest utożsamiana ze szkodowością. Ponadto zakładamy, że w portfelu nie działa zjawisko łaknienia zniżek, czyli wszystkie szkody zaistniałe są zgłoszone. Wprowadzenie do analizy łaknienia zniżek wymagałoby określenia rozkładu wysokości szkód. Klasycznie przyjmujemy, że liczba szkód zgłoszonych przez pojedynczego ubezpieczonego w jednostkowym okresie ubezpieczenia (jeden rok) jest określona rozkładem Poissona z parametrem λ:

- K – liczba szkód zgłoszonych przez pojedynczego ubezpieczonego;
- $K \sim Poisson\ (\lambda)$ – rozkład Poissona.

Warunkowe prawdopodobieństwo spowodowania k szkód w jednostkowym okresie przez ubezpieczonego o szkodowości λ wynosi zatem

$$p_k(\lambda) = P(K = k / \Lambda = \lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}.$$

Częstotliwość zgłaszania szkód przez różnych ubezpieczonych jest zmienną losową Λ o rozkładzie zwanym funkcją struktury ryzyka i określonym rozkładem odwrotnym gaussowskim[3] z parametrami μ i θ:

- Λ – częstotliwość szkód (szkodowość);
- $\Lambda \sim IG(\mu, \theta)$ – rozkład odwrotny gaussowski.

Strukturę ryzyka w portfelu określa zatem rozkład prawdopodobieństwa lub dystrybuanta:

- $u(\lambda)$ – rozkład gęstości prawdopodobieństwa zmiennej Λ;
- $U(\lambda)$ – dystrybuanta zmiennej Λ.

Bezwarunkowe prawdopodobieństwo spowodowania k szkód jest określone mieszanym rozkładem Poissona i w jednostkowym okresie wynosi

$$p_k = P(K = k) = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} u(\lambda) d\lambda = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} dU(\lambda).$$

[3] G. Willmot, *The Poisson-Inverse Gaussian Distribution as an Alternative to the Negative Binomial*, „Scandinavian Actuarial Journal" 1987, vol. 1986, s. 113–127.

Można wykazać[4], że przy powyższych założeniach

$$E\Lambda = \mu, \quad Var\Lambda = \mu\theta \quad \text{oraz} \quad EK = \mu, \quad VarK = \mu + \mu\theta.$$

4. System bonus-malus

Przyjmuje się[5], że na system bonus-malus składają się:

- skończona liczba s klas $j \in S = \{1,2,\ldots,s\}$ takich, że ubezpieczony należy do jednej klasy w jednostkowym okresie ubezpieczenia (zwykle rok), a klasa w kolejnym okresie ubezpieczenia zależy tylko od klasy i liczby szkód zgłoszonych w poprzednim okresie,
- składki b_j, określone dla każdej klasy tak, że ubezpieczony należący do klasy j płaci składkę b_j,
- określona klasa startowa, do której trafiają ubezpieczający się po raz pierwszy.

Ponieważ nasza analiza dotyczy stanu stacjonarnego, a rozpatrywane przez nas systemy mają własność ergodyczności, ostatni warunek nie jest konieczny. Ponadto przyjmujemy, że klasą najlepszą (o najniższej składce i najkorzystniejszych regułach przejścia[6]) jest klasa o numerze 1, a najgorszą (o najwyższej składce i najmniej korzystnych regułach przejścia) klasa o numerze s oraz że w systemie wyróżnianych jest q szkód. Oznacza to, że ubezpieczony, który zgłosi w jednostkowym okresie więcej niż q szkód, jest traktowany jak przy zgłoszeniu dokładnie q szkód.

Zasady przejścia pomiędzy klasami można przedstawić w postaci tabeli przejść, pokazującej, do której klasy przechodzi ubezpieczony z klasy i po zgłoszeniu k szkód. Równoważnym sposobem przedstawienia reguł przejścia jest wykorzystanie macierzy przejść $\boldsymbol{T} = [t_{ik}]$.

Przykładowa tabela przejść i macierz przejść dla systemu o 10 klasach ($s = 10$), wyróżniającego do trzech szkód ($q = 3$), są przedstawione w tabeli 1.

[4] Zob. ibidem.

[5] Na przykład: J. Lemaire, *Automobile Insurance: Actuarial Models*, Kluwer Nijhoff, Boston 1985.

[6] W systemie może występować więcej klas niż jedna o takiej samej wysokości składki. Za najlepszą uważa się klasę o najniższej składce i najłagodniejszych regułach przejścia – nakładających najniższe kary za spowodowanie szkód. Takie reguły określa się jako najkorzystniejsze.

Tabela 1. Przykładowa tabela przejść i macierz przejść T systemu bonus-malus (klasa najlepsza oznaczona numerem 1)

	$k =$	*0*	*1*	*2*	*3+*
Klasa	*1*	1	2	3	5
	2	1	3	5	5
	3	2	5	6	6
	4	3	6	6	7
	5	4	6	7	7
	6	5	7	7	8
	7	6	7	8	8
	8	7	8	8	9
	9	8	9	9	10
	10	9	10	10	10

$$\boldsymbol{T} = [t_{ik}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 6 & 6 \\ 3 & 6 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 7 & 7 \\ 5 & 7 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 8 & 8 \\ 7 & 8 & 8 & 9 \\ 8 & 9 & 9 & 10 \\ 9 & 10 & 10 & 10 \end{bmatrix}$$

Źródło: opracowanie własne.

5. Model systemu bonus-malus

Ponieważ system bonus-malus ma własność Markowa (klasa w kolejnym okresie zależy tylko od klasy i liczby szkód w poprzednim okresie), zwykle modelem takiego systemu jest odpowiedni łańcuch Markowa[7]. Aby skonstruować macierz prawdopodobieństwa przejścia łańcucha będącego modelem systemu, wygodnie jest wyznaczyć macierze transformacji określające możliwość przejścia pomiędzy klasami i oraz j w przypadku zgłoszenia k szkód. Macierzą transformacji nazywamy macierz postaci

$$\boldsymbol{T}_k = [t_{ij}(k)],$$

gdzie:

$$t_{ij}(k) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t_{ik} = j \\ 0 & \text{dla } t_{ik} \neq j \end{cases}.$$

[7] J. Lemaire, *Automobile Insurance…*, op.cit.; J. Lemaire, *Bonus-malus Systems in Automobile Insurance*, Kluwer Nijhoff, Boston 1995.

Warunkowe prawdopodobieństwo przejścia z klasy i do j można wówczas zapisać jako

$$p_{ij}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda) t_{ij}(k),$$

a macierz prawdopodobieństw przejścia dla ubezpieczonego o szkodowości λ jako

$$\boldsymbol{P}(\lambda) = [p_{ij}(\lambda)]_{i,j=1}^{s} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda) \boldsymbol{T}_k .$$

Dla regularnej macierzy prawdopodobieństw przejścia łańcuch ma własność ergodyczności, czyli niezależnie od stanu początkowego jest zbieżny do rozkładu stacjonarnego[8]

$$\boldsymbol{e}(\lambda) = [e_1(\lambda), \ldots, e_s(\lambda)],$$

który można uzyskać, rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}(\lambda)\boldsymbol{P}(\lambda) = \boldsymbol{e}(\lambda) \\ \boldsymbol{e}(\lambda)\boldsymbol{1} = 1 \end{cases},$$

gdzie ***1*** jest wektorem jedynek o odpowiednich wymiarach. Bezwarunkowy rozkład stacjonarny dany jest zależnością

$$\boldsymbol{e} = [e_1, \ldots, e_s] = \left[\int_0^{\infty} e_1(\lambda) u(\lambda)\, d\lambda, \ldots, \int_0^{\infty} e_s(\lambda) u(\lambda)\, d\lambda \right].$$

6. Systemy dopuszczalne

Modelem rozpatrywanych przez nas systemów bonus-malus będzie nieprzywiedlny i ergodyczny łańcuch Markowa. Na modele nakładamy jednak dodatkowe warunki ograniczające. W badaniu analizujemy mianowicie systemy spełniające następujące warunki:

---

8 J. Kemény, J. Snell, *Finite Markov Chains*, Van Nostrand, New York 1960.

- wiersze tabeli przejść ***T*** są niemalejące (słaba monotoniczność w wierszach) – oznacza to, że w każdej klasie kara[9] za spowodowanie większej liczby szkód jest nie mniejsza niż kara za spowodowanie mniejszej liczby szkód;
- kolumny tabeli przejść ***T*** są niemalejące (słaba monotoniczność w kolumnach) – oznacza to, że w każdej klasie kara za spowodowanie takiej samej liczby szkód w klasie gorszej nie może być mniejsza niż w klasie lepszej (z wyjątkiem klasy najgorszej);
- systemy są nieprzywiedlne (modelem systemu jest łańcuch nieprzywiedlny) – żaden z elementów wektora stacjonarnego nie jest równy zero;
- systemy są ergodyczne (modelem systemu jest łańcuch ergodyczny) – rozkład stacjonarny nie zależy od klasy startowej.

Systemy takie nazywamy dalej systemami dopuszczalnymi. Jest to rozszerzenie definicji systemu sprawiedliwego w sensie przejść między klasami[10], polegające na zastosowaniu nierówności nieostrych.

7. Składki

W celu obliczenia składek dla badanych systemów wykorzystujemy asymptotyczne kryterium Norberga[11], które opiera się na minimalizacji błędu średniokwadratowego oceny ubezpieczonego. W przypadku systemów bonus-malus jest to minimalizacja wartości oczekiwanej kwadratu odchylenia składki stacjonarnej od prawdziwej szkodowości

$$Q(\boldsymbol{b}) = \int_0^\infty \sum_{j \in S} \left(b_j - \lambda\right)^2 e_j(\lambda) u(\lambda) d\lambda \rightarrow \min .$$

Minimalizacja powyższego wyrażenia ze względu na $\boldsymbol{b} = [b_j]$ prowadzi do uzyskania składek Q-optymalnych netto (minimalizujących błąd średniokwadratowy oceny ubezpieczonych) wyrażonych jako[12]

[9] Kara rozumiana jest tu jako przejście do gorszej klasy taryfowej, a nie jako kara finansowa – na tym etapie abstrahujemy od wysokości składek. Składki zostaną włączone do analizy w dalszej części badania.

[10] M. Podgórska, B. Cieślik, B. Kryszeń, M. Niemiec, M. Topolewski, *System bonus-malus sprawiedliwy w sensie przejść między klasami*, Instytut Ekonometrii SGH, Warszawa 2006.

[11] R. Norberg, *A credibility theory for automobile bonus systems*, „Scandinavian Actuarial Journal" 1976, vol. 1976, s. 92–107.

[12] Ibidem.

$$b_j = \frac{\int_0^\infty \lambda e_j(\lambda) u(\lambda)\, d\lambda}{\int_0^\infty e_j(\lambda) u(\lambda)\, d\lambda},$$

gdzie b_j oznacza składkę Q-optymalną w klasie j. Dla tak obliczonych składek funkcja strat Q przyjmuje wartość[13] (ponieważ wykorzystujemy tylko składki Q-optymalne, oznaczenie Q ($\boldsymbol{b}$) zastępujemy po prostu przez Q)

$$Q = -\sum_{j\in S} e_j b_j^2 + E\Lambda^2 = E\Lambda^2 - \sum_{j\in S} e_j b_j^2.$$

Ponieważ dla określonego portfela ubezpieczonych (określonego rozkładu Λ) wielkość $E\Lambda^2$ jest stała, miarą dokładności oceny ubezpieczonych przez system o składkach Q-optymalnych może być wartość

$$\sum_{j\in S} e_j b_j^2,$$

co pozwala porównać dokładność ocen systemów o składkach Q-optymalnych i różnych regułach przejścia dla określonego portfela ubezpieczonych.

Ważną własnością systemów o składkach Q-optymalnych jest to, że są one finansowo zbilansowane, czyli oczekiwana składka netto jest równa średniej częstości szkód

$$\sum_{j\in S} e_j b_j = E\Lambda.$$

W dalszej części korzystamy tylko ze składek Q-optymalnych w ujęciu netto.

8. Wskaźnik dokładności oceny ubezpieczonych

Biorąc pod uwagę błąd średniokwadratowy oceny ubezpieczonych przez system o składkach Q-optymalnych (ponieważ wykorzystujemy tylko składki Q-optymalne, zamiast oznaczenia Q ($\boldsymbol{b}$) używamy Q)

$$Q = E\Lambda^2 \quad \sum_{j\in S} e_j b_j^2$$

[13] M. Topolewski, *System bonus-malus jako łańcuch Markowa z wypłatami*, praca doktorska, Instytut Ekonometrii SGH, Warszawa 2002.

i przyjmując

$$E\Lambda^2 = Q1$$

oraz

$$\sum_{j \in S} e_j b_j^2 = Q2,$$

otrzymujemy

$$Q = Q1 \quad Q2,$$

gdzie $Q1$ jest wartością stałą dla określonego portfela ubezpieczonych (określonego rozkładu Λ). Analizując dalej wartości, jakie może przyjmować $Q2$, dochodzimy do wniosku, że:

- dla „systemu" najgorszego – o stałej składce (brak zróżnicowania składek)

$$b_j = E\Lambda \quad \Rightarrow \quad \sum_{j \in S} e_j b_j^2 = E^2\Lambda \quad \text{lub} \quad Q2 = E^2\Lambda;$$

- dla „systemu" najlepszego $Q = 0$ (doskonała ocena ubezpieczonych)

$$Q = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{j \in S} e_j b_j^2 = E\Lambda^2 \quad \text{lub} \quad Q2 = E\Lambda^2 = Q1.$$

W przypadku rzeczywistych systemów bonus-malus o składkach Q-optymalnych wartość $Q2$ podlega zatem ograniczeniom

$$E^2\Lambda \le \sum_{j \in S} e_j b_j^2 \le E\Lambda^2 \quad \text{lub równoważnie} \quad E^2\Lambda \le Q2 \le Q1.$$

Powyższe ograniczenie pozwala wyprowadzić unormowaną miarę dokładności oceny ubezpieczonych przez system. Nasza unormowana miara dokładności oceny ubezpieczonych przez system o składkach Q-optymalnych wynosi

$$QN = \frac{\sum_{j \in S} e_j b_j^2 - E^2\Lambda}{E\Lambda^2 - E^2\Lambda} \quad \text{lub równoważnie} \quad QN = \frac{Q2 - E^2\Lambda}{Q1 - E^2\Lambda}.$$

Miara QN przyjmuje wartości od 0 do 1 i wskazuje, gdzie leży wartość $Q2$ na odcinku pomiędzy swoją najmniejszą a największą wartością dla systemu bonus-malus o składkach Q-optymalnych i określonym rozkładzie Λ.

9. Charakterystyki systemu bonus-malus

Aby lepiej ocenić badane systemy i zilustrować ich własności, wykorzystujemy w dalszej części badania szereg typowych dla systemów bonus-malus miar.

Składka stacjonarna[14]

$$b_e = \sum_{j \in S} b_j e_j$$

to średnia składka, jaką płacą ubezpieczeni po osiągnięciu przez system stanu stacjonarnego.

Współczynnik zmienności składki stacjonarnej[15]

$$V_{b_e} = \frac{\sqrt{\sum_{j \in S} (b_j - b_e)^2 e_j}}{b_e}$$

pozwala określić stopień zróżnicowania składek w stanie stacjonarnym. Jest jednocześnie miarą niepewności ubezpieczonych co do tego, jaką składkę będą płacić. Z jednej strony wyższa wartość tego współczynnika świadczy o większym zróżnicowaniu składek w portfelu, z drugiej strony zbyt duże zróżnicowanie składek będzie niekorzystne dla ubezpieczonych, gdyż wiąże się z dużym stopniem ryzyka. Przyjmuje się[16], że wartości tego współczynnika powyżej 1 nie są korzystne dla ubezpieczonych, i budzą wątpliwości nadzoru ubezpieczeniowego.

Unormowana składka stacjonarna (*Relative Stationary Average Level* – RSAL)[17]

$$\mathrm{RSAL} = \frac{b_e - b_{\min}}{b_{\max} - b_{\min}}$$

jest to unormowana miara pokazująca umiejscowienie składki stacjonarnej pomiędzy składką minimalną i maksymalną. Może być traktowana jako wskaźnik surowości systemu.

---

[14] K. Loimaranta, *Some Asymptotic Properties of Bonus Systems*, „ASTIN Bulletin” 1972, vol. 6, part 3, s. 233–245.

[15] J. Lemaire, *Automobile Insurance*…, op.cit.; J. Lemaire, *Bonus-malus*…, op.cit.

[16] J. Lemaire, H. Zi, *High deductibles instead of bonus-malus. Can it work?*, „Astin Bulletin” 1994, vol. 24, no. 1, s. 75–86.

[17] J. Lemaire, *Automobile Insurance*…, op.cit.; J. Lemaire, *Bonus-malus*…, op.cit.

Elastyczność składki stacjonarnej[18]

$$\eta(\lambda) = \frac{\frac{\partial b_e}{b_e}}{\frac{\partial \lambda}{\lambda}} = \frac{\partial b_e}{\partial \lambda} \frac{\lambda}{b_e}$$

pokazuje, czy system proporcjonalnie zwiększa składkę w stosunku do wzrostu poziomu ryzyka mierzonego jako średnia częstotliwość szkód. Miara ta może być traktowana jako wskaźnik poprawności oceny ubezpieczonych o określonym poziomie szkodowości. Pożądane są wartości elastyczności bliskie jedności dla możliwie szerokiego przedziału parametru λ, choć w praktyce systemy zwykle wykazują przebieg elastyczności daleki od oczekiwanego.

Elastyczność całkowita[19]

$$\eta = \int_0^\infty \eta(\lambda) u(\lambda) d\lambda$$

jest elastycznością składki stacjonarnej ważoną funkcją gęstości prawdopodobieństwa rozkładu ubezpieczonych (funkcją struktury ryzyka) i może być traktowana jako syntetyczna miara poprawności oceny ubezpieczonych o różnej częstości szkód dla portfela. Należy jednak pamiętać o tym, że tendencje systemu do ponadproporcjonalnego i mniej niż proporcjonalnego karania ubezpieczonych (w sensie zmiany składki stacjonarnej) będą się przynajmniej częściowo znosiły.

10. Optymalizacja reguł przejścia

M. Marlock[20] dokonał w 1985 r. optymalizacji reguł przejścia ówczesnego niemieckiego systemu bonus-malus dla rozkładu po 25 latach, stosując – jak pisze – „heurystyczną procedurę zbliżoną do podejścia opartego na kolejnych iteracjach wykorzystywanego w maksymalizacji problemów wypukłych”. Jak tłumaczy autor, „w procedurze tej każdy kolejny element tabeli przejść staje się

[18] K. Loimaranta, op.cit.

[19] N. De Pril, *The Efficiency of a Bonus-Malus System*, „ASTIN Bulletin” 1978, vol. 10, part 1, s. 59–72.

[20] M. Marlock, op.cit.

zmienną", pozwalając (przy odpowiednich warunkach) maksymalizować $Q2$. Autor nie przytacza jednak dowodu na to, że opisany algorytm znajduje optimum globalne. Ogranicza się do stwierdzenia – „good experience was made" („otrzymano dobre wyniki"). Zaznacza, że z różnych punktów startowych osiągano to samo rozwiązanie (to samo rozwiązanie było wskazywane jako najlepsze).

W naszym badaniu rozważamy przypadek asymptotyczny (stan stacjonarny systemu), co ma wyeliminować konieczność przyjęcia subiektywnych założeń odnośnie do rozkładu łańcucha Markowa. Wprowadzamy warunki monotoniczności zarówno w wierszach, jak i w kolumnach tabeli systemu bonus-malus. Z naszych doświadczeń wynika, że brak warunku na monotoniczność w kolumnach może prowadzić do wskazania systemów, które nie mogą być przyjęte w rzeczywistości. Z tych samych względów ograniczamy się do systemów nieprzywiedlnych i ergodycznych. Systemy spełniające wszystkie te założenia nazywamy dopuszczalnymi. Warto zauważyć, że M. Marlock w swojej publikacji nie wprowadził warunku monotoniczności w kolumnach, a jedynie w wierszach.

Tak postawiony problem optymalizacyjny stanowi przykład zadania programowania całkowitoliczbowego wielu zmiennych przy nieliniowej funkcji celu, w którym to problemie warunki ograniczające zależą od wyniku optymalizacji sąsiednich zmiennych – warunki monotoniczności w wierszach i kolumnach. Zmiennymi decyzyjnymi są tu elementy t_{ik} macierzy przejść $\boldsymbol{T}$. W celu znalezienia rozwiązania kolejno dla każdego elementu t_{ik} macierzy przejść $\boldsymbol{T}$ zmieniamy jego wartości, uwzględniając warunki monotoniczności oraz nieprzywiedlności i ergodyczności systemu. Dla każdej możliwej wartości t_{ik} obliczamy składki Q-optymalne $\boldsymbol{b}$ i wartość $Q2$. Wybieramy wartość t_{ik}, maksymalizującą $Q2$. Po optymalizacji wszystkich elementów macierzy $\boldsymbol{T}$ procedurę powtarzamy i porównujemy wyniki z poprzednią iteracją. Jeżeli w dwóch kolejnych krokach iteracyjnych algorytm wskaże to samo rozwiązanie, procedurę przerywamy.

Przedstawiony algorytm stosujemy na dwa sposoby, dokonując zmian w kolejnych wierszach i w kolejnych kolumnach. Sprawdzamy zbieżność algorytmu do rozwiązania dla różnych rozwiązań początkowych (rozpoczynając od różnych systemów dopuszczalnych).

W większości przypadków znalezione rozwiązanie było takie samo niezależnie od kierunku zmian w macierzy przejść (w wierszach lub kolumnach) i rozwiązania początkowego, ale w niektórych przypadkach wskazane przez algorytm rozwiązania były różne. Wówczas wybierano rozwiązanie odpowiadające wyższej wartości $Q2$. Dla kierunku poszukiwania w wierszach algorytm potrzebował zwykle mniej iteracji niż w kolumnach. Należy podkreślić fakt, że (tak jak u M. Marlocka) nie ma pewności, czy znalezione rozwiązanie jest globalnie optymalne, dlatego mówimy o rozwiązaniu wskazanym przez algorytm. Warto również dodać, że implementacja powyższego algorytmu wiąże się z dużym kosztem obliczeniowym, a to głównie za sprawą trudności z wielokrotnym obliczaniem składek i samego bezwarunkowego rozkładu stacjonarnego. Złożoność algorytmu rośnie wykładniczo ze względu na wielkość rozpatrywanych systemów, czyli liczbę klas (s) i maksymalną liczbę wyróżnianych szkód (q).

Tabela 2. Porównanie wyników działania algorytmu M. Marlocka (z lewej) i proponowanego w badaniu (z prawej)

	k	*0*	*1*	*2*	*3+*
klasa	*1*	1	2	5	7
	2	1	5	7	9
	3	2	6	8	10
	4	3	7	9	10
	5	4	7	9	11
	6	5	8	10	12
	7	6	9	11	12
	8	7	10	12	13
	9	8	11	13	14
	10	9	12	13	15
	11	10	13	14	16
	12	11	14	15	16
	13	12	15	16	16
	14	13	16	16	16
	15	14	16	16	16
	16	15	16	16	16

	Q	0,004863949
	*Q*1	0,0242
	*Q*2	0,019336051
	QN	0,598020779

	k	*0*	*1*	*2*	*3+*
klasa	*1*	1	**3**	5	7
	2	1	**6**	7	9
	3	2	6	8	10
	4	3	7	9	**11**
	5	4	**8**	**10**	11
	6	5	8	10	**11**
	7	6	9	11	12
	8	7	10	12	13
	9	8	11	13	14
	10	9	12	13	15
	11	10	13	14	16
	12	11	14	15	16
	13	12	15	16	16
	14	13	16	16	16
	15	14	16	16	16
	16	15	16	16	16

	Q	0,004854348
	*Q*1	0,0242
	*Q*2	0,019345652
	QN	0,598814204

Przedstawiono rozwiązania wskazane przez algorytm jako optymalne oraz wartości miar. Wyróżniono różnice w regułach przejścia pomiędzy oboma rozwiązaniami.
Źródło: obliczenia własne.

W celu przetestowania algorytmu zastosowano go początkowo do powtórzenia badania wykonanego przez M. Marlocka, przyjmując te same założenia co do funkcji struktury ryzyka i rozkładu ubezpieczonych pomiędzy klasy. Porównanie wyników przedstawiono w tabeli 2. Wskazuje ono, że prezentowany przez nas algorytm znalazł rozwiązanie lepsze niż opisane w artykule M. Marlocka. Obserwujemy niższą wartość błędu średniokwadratowego Q oraz wyższe wartości $Q2$ i unormowanego wskaźnika QN. Może to jednak wynikać z przyjętej dokładności obliczeń lub niedokładnego powtórzenia przez nas badania na podstawie nie do końca precyzyjnego opisu prezentowanego przez M. Marlocka. Jednakże na podstawie porównania wyników wnioskujemy, że proponowany przez nas algorytm, jako nie gorszy, może zostać wykorzystany do rozszerzenia badania na różne funkcje struktury portfela w stanie stacjonarnym.

11. Opis badania

Zaimplementowany algorytm znajdowania optymalnych reguł przejścia został zastosowany do znalezienia systemów Q-optymalnych oraz zweryfikowania ich własności w sensie zaproponowanych miar. Poczyniono przy tym kilka założeń.

Przyjmujemy, że struktura portfela ubezpieczonych (struktura średniej częstości szkód λ) jest określona rozkładem odwrotnym gaussowskim. Rozpatrujemy systemy o dziesięciu klasach wyróżniające do trzech szkód dla funkcji struktury różniących się parametrami (IG), aby zbadać portfele od niskiej częstości szkód i małej wariancji do wysokiej częstości szkód i wysokiej wariancji. Wyróżnionych zostało dziewięć portfeli o parametrach, które mogłyby być zaobserwowane w rzeczywistych rozkładach:

portfel	s1
μ	0,05
θ	0,01

portfel	s2
μ	0,05
θ	0,05

portfel	s3
μ	0,05
θ	0,15

portfel	s4
μ	0,15
θ	0,01

portfel	s5
μ	0,15
θ	0,05

portfel	s6
μ	0,15
θ	0,15

portfel	s7
μ	0,3
θ	0,01

portfel	s8
μ	0,3
θ	0,05

portfel	s9
μ	0,3
θ	0,15

Rozpatrujemy systemy różnej wielkości:

- różną liczbę klas dla systemów wyróżniających do trzech szkód dla funkcji struktury IG (0,15; 0,05);

- różną liczbę szkód wyróżnianych przez systemy o dziesięciu klasach i funkcji struktury *IG* (0,15; 0,05).

12. Wyniki i wnioski

Systemy wskazane przez algorytm jako optymalne dla dziewięciu portfeli różniących się średnią i wariancją częstości szkód zostały przedstawione w tabeli 3. Optymalizacja reguł przejścia dla różnych portfeli prowadzi do uzyskania systemów skrajnie różniących się od siebie. Najbardziej charakterystyczne są systemy otrzymane dla portfeli s3 o niskiej średniej i wysokiej wariancji szkodowości oraz s7 o wysokiej średniej i niskiej wariancji szkodowości. W portfelu s3 prawie za każdą szkodę ubezpieczony jest karany przesunięciem do najgorszej klasy niezależnie od tego, w której klasie się znajduje.

Tabela 3. Systemy wskazane przez algorytm dla różnych portfeli

s1 $\mu = 0,05$ $\theta = 0,01$

0	*1*	*2*	*3+*
1	2	4	6
1	4	6	7
2	6	7	7
3	6	7	8
4	7	8	8
5	7	8	9
6	8	9	9
7	9	9	10
8	9	10	10
9	10	10	10

s2 $\mu = 0,05$ $\theta = 0,05$

0	*1*	*2*	*3+*
1	3	8	10
1	8	10	10
2	8	10	10
3	10	10	10
4	10	10	10
5	10	10	10
6	10	10	10
7	10	10	10
8	10	10	10
9	10	10	10

s3 $\mu = 0,05$ $\theta = 0,15$

0	*1*	*2*	*3+*
1	5	10	10
1	10	10	10
2	10	10	10
3	10	10	10
4	10	10	10
5	10	10	10
6	10	10	10
7	10	10	10
8	10	10	10
9	10	10	10

s4 $\mu = 0,15$ $\theta = 0,01$

0	*1*	*2*	*3+*
1	1	2	3
1	3	4	4
2	4	4	4
3	4	4	5
4	5	5	6
5	5	5	7

s5 $\mu = 0,15$ $\theta = 0,05$

0	*1*	*2*	*3+*
1	2	3	5
1	3	5	5
2	5	6	6
3	6	6	7
4	6	7	7
5	7	7	8

s6 $\mu = 0,15$ $\theta = 0,15$

0	*1*	*2*	*3+*
1	2	3	5
1	3	5	7
2	5	7	8
3	7	8	8
4	7	8	9
5	8	9	9

5	5	6	8
6	6	6	9
6	6	6	10
7	8	8	10

6	7	8	8
7	8	8	9
8	9	9	10
9	10	10	10

6	8	9	10
7	9	10	10
8	10	10	10
9	10	10	10

s7 $\mu = 0{,}3$ $\theta = 0{,}01$

0	*1*	*2*	*3+*
1	1	1	2
1	2	2	3
2	2	2	4
2	2	2	5
2	2	2	6
2	2	2	7
2	2	2	8
2	2	2	9
2	2	2	10
2	3	3	10

s8 $\mu = 0{,}3$ $\theta = 0{,}05$

0	*1*	*2*	*3+*
1	1	2	3
1	3	3	4
2	3	4	4
3	4	4	5
4	5	5	6
5	5	5	7
5	5	6	8
6	6	6	9
6	6	7	10
7	8	8	10

s9 $\mu = 0{,}3$ $\theta = 0{,}15$

0	*1*	*2*	*3+*
1	1	2	4
1	4	5	5
2	5	5	5
3	5	6	6
4	6	6	7
5	6	7	7
6	7	7	8
7	8	8	9
8	8	9	10
9	10	10	10

Źródło: obliczenia własne.

Natomiast w portfelu s7 kary są najłagodniejsze, co w praktyce oznacza, że w większości klas za spowodowanie jednej szkody lub dwóch szkód ubezpieczony dostaje nagrodę w postaci przesunięcia do klasy lepszej. Zjawisko takie obserwowane jest np. w systemie tajwańskim[21].

Analiza reguł przejścia systemów pozwala wyciągnąć ostrożny wniosek, że wzrost wariancji liczby szkód w portfelu o niskiej szkodowości powoduje zaostrzenie reguł przejścia systemów *Q*-optymalnych, natomiast wzrost częstości szkód przy niskiej wariancji prowadzi do łagodzenia zasad przejścia systemów *Q*-optymalnych. Jak się wydaje, jednoczesny wzrost średniej liczby szkód i ich wariancji nie prowadzi do wyraźnie ukierunkowanych zmian w regułach przejścia – systemy wskazane przez algorytm dla portfeli s1, s5, s9 są dosyć podobne. Jednocześnie są to systemy o regułach przejścia zbliżonych do tych najczęściej obserwowanych w rzeczywistości. Reguły przejścia stanowią również o rozkładzie stacjonarnym ubezpieczonych, który z kolei jest wykorzystywany do obliczania wielu charakterystyk systemu. Nie należy również zapominać, że własności systemu są definiowane nie tylko przez reguły przejścia, ale również przez składki, a następstwem określenia przez algorytm odpowiednich reguł przejścia jest odpowiadający im wektor składek.

[21] Zob. J. Lemaire, *Bonus-malus…*, op.cit.

Charakterystyki systemów wskazanych przez algorytm oraz składki zostały przedstawione w tabeli 4. Biorąc pod uwagę charakterystyki systemów, dochodzimy do wniosku, że system s3, który w świetle reguł przejścia wydawał się najsurowszy, z powodu małej rozpiętości składek oraz najniższego wśród badanych systemów współczynnika zmienności składki stacjonarnej Vb_e jest najłagodniejszy. I odwrotnie – najłagodniejszy w świetle samych reguł przejścia system s7 jest najsurowszy przy wzięciu pod uwagę współczynnika zmienności składki stacjonarnej i rozpiętości składek (patrz także tabela 6). Część otrzymanych systemów charakteryzuje się zbyt dużą zmiennością składki stacjonarnej, która uniemożliwia ich rzeczywiste funkcjonowanie. Przyjmuje się, że współczynnik zmienności składki stacjonarnej powinien być niższy od 1 lub nieznacznie go przekraczać[22]. W przypadku otrzymanych systemów tylko s2, s3, s6 i ewentualnie s9 spełniają ten warunek. System s3 charakteryzuje się ponadto najbardziej zróżnicowanym rozkładem stacjonarnym ubezpieczonych, co przekłada się na stosunkowo wysoką wartość wskaźnika RSAL, podczas gdy dla innych systemów RSAL przyjmuje typowe niskie wartości, wskazując na kumulację ubezpieczonych w klasie najlepszej. Najwyższe wartości elastyczności całkowitej osiągają systemy o stosunkowo dużej częstości i wariancji szkód (patrz tabela 6), z których najlepiej pod tym względem wypada system s9. Większy współczynnik zmienności liczby szkód sprzyja bardziej proporcjonalnej ocenie ubezpieczonych.

Tabela 4. Charakterystyki i składki dla systemów wskazanych przez algorytm

s1										
b%	7%	26%	49%	54%	73%	80%	100%	125%	157%	237%
b	0,032	0,116	0,222	0,243	0,333	0,363	0,453	0,568	0,713	1,074
e	0,93	0,031	0,006	0,007	0,004	0,006	0,005	0,004	0,004	0,002
μ	θ	VarΛ	VarK	Vbe	RSAL	η	Q	Q1	Q2	QN
0,05	0,01	0,001	0,051	1,775	0,017	0,213	0,005	0,015	0,01	0,63
s2										
b%	31%	54%	56%	86%	90%	95%	100%	106%	139%	147%
b	0,041	0,072	0,075	0,116	0,121	0,127	0,134	0,142	0,186	0,197
e	0,861	0,037	0,039	0,007	0,008	0,009	0,01	0,012	0,007	0,009
μ	θ	VarΛ	VarK	Vbe	RSAL	η	Q	Q1	Q2	QN
0,05	0,05	0,003	0,053	0,541	0,058	0,21	0,002	0,005	0,003	0,293
s3										
b%	57%	74%	75%	77%	78%	98%	100%	102%	104%	106%

[22] J. Lemaire, H. Zi, op.cit.

b	0,045	0,059	0,06	0,061	0,062	0,078	0,079	0,081	0,083	0,084
e	0,776	0,036	0,038	0,041	0,043	0,011	0,012	0,013	0,014	0,015
μ	θ	VarΛ	VarK	Vbe	RSAL	η	Q	Q1	Q2	QN
0,05	0,15	0,008	0,058	0,199	0,121	0,112	0,001	0,003	0,003	0,119
s4										
***b*%**	2%	20%	29%	38%	65%	86%	100%	125%	135%	221%
b	0,059	0,551	0,803	1,077	1,818	2,425	2,809	3,508	3,804	6,212
e	0,945	0,009	0,009	0,016	0,009	0,004	0,002	0,001	0,001	0,004
μ	θ	VarΛ	VarK	Vbe	RSAL	η	Q	Q1	Q2	QN
0,15	0,01	0,002	0,152	3,462	0,015	0,198	0,068	0,36	0,292	0,799
s5										
b%	11%	25%	41%	58%	64%	79%	100%	137%	197%	285%
b	0,08	0,183	0,306	0,425	0,471	0,587	0,739	1,016	1,455	2,106
e	0,82	0,072	0,022	0,011	0,017	0,019	0,02	0,01	0,004	0,005
μ	θ	VarΛ	VarK	Vbe	RSAL	η	Q	Q1	Q2	QN
0,15	0,05	0,008	0,158	1,491	0,035	0,344	0,017	0,09	0,073	0,741
s6										
***b*%**	26%	41%	58%	74%	79%	94%	100%	117%	139%	170%
b	0,108	0,171	0,241	0,309	0,328	0,39	0,416	0,484	0,579	0,706
e	0,79	0,093	0,026	0,01	0,014	0,01	0,016	0,015	0,013	0,014
μ	θ	VarΛ	VarK	Vbe	RSAL	η	Q	Q1	Q2	QN
0,15	0,15	0,023	0,173	0,747	0,071	0,334	0,01	0,045	0,035	0,557
s7										
***b*%**	2%	43%	62%	75%	85%	93%	100%	106%	110%	266%
b	0,092	1,901	2,777	3,361	3,813	4,174	4,47	4,718	4,931	11,88
e	0,958	0,018	0,006	0,003	0,002	0,001	0,001	0,001	0	0,011
μ	θ	VarΛ	VarK	Vbe	RSAL	η	Q	Q1	Q2	QN
0,3	0,01	0,003	0,303	4,385	0,018	0,158	0,969	2,79	1,821	0,641
s8										
***b*%**	5%	22%	31%	45%	67%	86%	100%	123%	133%	206%
b	0,129	0,607	0,858	1,251	1,882	2,393	2,793	3,441	3,726	5,753
e	0,887	0,024	0,027	0,022	0,017	0,007	0,003	0,003	0,002	0,008
μ	θ	VarΛ	VarK	Vbe	RSAL	η	Q	Q1	Q2	QN
0,3	0,05	0,015	0,315	2,197	0,03	0,307	0,106	0,63	0,524	0,804
s9										
***b*%**	15%	37%	48%	53%	63%	76%	100%	136%	169%	239%
b	0,163	0,399	0,518	0,57	0,68	0,826	1,083	1,473	1,834	2,586
e	0,818	0,021	0,014	0,023	0,031	0,04	0,026	0,011	0,004	0,012
μ	θ	VarΛ	VarK	Vbe	RSAL	η	Q	Q1	Q2	QN
0,3	0,15	0,045	0,345	1,244	0,057	0,411	0,041	0,27	0,229	0,774

Źródło: obliczenia własne.

W tabeli 4 składki ***b*** są składkami Q-optymalnymi. Składki procentowe ***b%*** są podane jedynie w celach zilustrowania rozpiętości składek dla otrzymanych systemów i wyrażone jako procent składki w klasie 7, co jest subiektywnie przyjętym założeniem. Nie są one używane do obliczania miar jakości systemów.

W celu syntetycznego przedstawienia powyższych wyników w tabeli 5 utworzono ranking systemów według unormowanego wskaźnika QN (wyższe wartości są lepsze) wraz z niektórymi charakterystykami. Analizując wartości unormowanej miary dokładności oceny ubezpieczonych QN (tabela 5), dostrzega się wyraźnie, że różne portfele ubezpieczonych (różniące się parametrami funkcji struktury ryzyka) pozwalają na różną dokładność oceny dla systemu o zadanych rozmiarach (w tym przypadku dziesięć klas i trzy wyróżniane szkody).

Tabela 5. Ranking systemów według wartości *QN* oraz wartości innych wskaźników

	μ	θ	Q	$Q2$	$\boldsymbol{QN}$	η	Vb_e	RSAL
s8	0,3	0,05	0,1057	0,5243	**0,8043**	0,3070	2,1967	0,0304
s4	0,15	0,01	0,0678	0,2922	**0,7990**	0,1976	3,4620	0,0148
s9	0,3	0,15	0,0406	0,2294	**0,7743**	0,4109	1,2444	0,0567
s5	0,15	0,05	0,0175	0,0725	**0,7413**	0,3438	1,4913	0,0346
s7	0,3	0,01	0,9695	1,8205	**0,6409**	0,1581	4,3850	0,0177
s1	0,05	0,01	0,0046	0,0104	**0,6302**	0,2132	1,7751	0,0173
s6	0,15	0,15	0,0100	0,0350	**0,5575**	0,3343	0,7466	0,0710
s2	0,05	0,05	0,0018	0,0032	**0,2925**	0,2100	0,5409	0,0578
s3	0,05	0,15	0,0007	0,0026	**0,1192**	0,1123	0,1993	0,1214

Źródło: obliczenia własne.

W tym rankingu system s3, który najlepiej wypadał pod względem wartości RSAL i rozdysponowania ubezpieczonych pomiędzy klasy w stanie stacjonarnym, jest zdecydowanie najgorszy, osiągając bardzo niską wartość QN. Generalnie systemy wskazane przez algorytm wykazują bardzo silne zróżnicowanie pod względem możliwości oceny ubezpieczonych. Widać tu pewną prawidłowość. Mianowicie, systemy s6, s2, s3 o słabych możliwościach oceny (niskie QN) charakteryzują się akceptowalnymi wartościami współczynnika zmienności składki stacjonarnej Vb_e. Wyjątkiem jest tu system s9, który przy wysokiej, ale akceptowalnej wartości Vb_e ma dosyć wysoką wartość QN.

Z kolei w tabeli 6 przedstawiono ranking systemów wskazanych przez algorytm według różnych wskaźników.

Tabela 6. Ranking systemów według wartości różnych wskaźników – od wartości najwyższych do najniższych

Vb_e	RSAL	η	Q	$Q1$	$Q2$	QN
s7	s3	s9	s7	s7	s7	s8
s4	s6	s5	s8	s8	s8	s4
s8	s2	s6	s4	s4	s4	s9
s1	s9	s8	s9	s9	s9	s5
s5	s5	s1	s5	s5	s5	s7
s9	s8	s2	s6	s6	s6	s1
s6	s7	s4	s1	s1	s1	s6
s2	s1	s7	s2	s2	s2	s2
s3	s4	s3	s3	s3	s3	s3

Q – niższe wartości są lepsze; $Q1$ – wartość stała zależna od funkcji struktury ryzyka; $Q2$, QN – wyższe wartości są lepsze; η – preferowane wartości bliskie 1, tu wyższe wartości są lepsze, ponieważ dla wszystkich portfeli $\eta < 1$; Vb_e – niskie wartości świadczą o słabym zróżnicowaniu składek, wysokie o silnym, preferowane są wartości bliskie 1.

Źródło: obliczenia własne.

W tabeli 6 pokazano, że dążenie do jak najlepszej (w świetle błędu średniokwadratowego) oceny ubezpieczonych nie zapewnia innych dobrych własności systemu. Porównanie kolejności systemów względem miar *QN*, RSAL, η wskazuje, że systemy lepsze pod jednym względem są gorsze, jeśli chodzi o inne kryterium. Ważnym wnioskiem płynącym z tych rozważań jest to, że optymalizacja reguł przejścia systemu dążąca do minimalizacji błędu średniokwadratowego nie zapewnia innych pożądanych cech systemu, takich jak elastyczność, brak kumulacji ubezpieczonych w najlepszej klasie czy odpowiednia zmienność składki stacjonarnej. Obowiązuje tu raczej zasada „coś za coś".

W dalszej części badania rozważamy wpływ liczby klas s oraz liczby wyróżnianych przez system szkód q na dokładność oceny ubezpieczonych mierzoną jako błąd średniokwadratowy, a wyrażoną za pomocą unormowanej miary błędu oceny *QN*. Wykorzystujemy tu portfel o „umiarkowanych" parametrach, tzn. funkcję struktury ryzyka *IG* (0,15; 0,05).

Skutki zwiększania liczby klas w systemie wyróżniającym maksymalnie trzy szkody przedstawiono w tabeli 7. Wnioski płynące z obserwacji wartości *QN* dla różnej liczby klas w systemie potwierdzają intuicyjne przekonanie, że większa liczba klas w systemie pozwala na dokładniejszą ocenę ubezpieczonych. Dodanie kolejnej klasy powoduje spadek błędu średniokwadratowego oceny *Q* i wzrost unormowanej miary *QN*. Przy czym należy podkreślić fakt, że prezentowane tu systemy są systemami wskazanymi przez algorytm jako optymalne.

W ogólnym przypadku nieoptymalny system o większej liczbie klas może gorzej oceniać ubezpieczonych niż optymalny system o mniejszej liczbie klas. Dla innych parametrów funkcji struktury otrzymano podobne wyniki.

Tabela 7. Systemy różniące się liczbą klas, $q = 3$, Λ~*IG* (0,15; 0,05)

s	6	7	8	9	10	11
Q	0,0250	0,0222	0,0202	0,0187	0,0175	0,0164
*Q*1	0,0900	0,0900	0,0900	0,0900	0,0900	0,0900
*Q*2	0,0650	0,0678	0,0698	0,0713	0,0725	0,0736
QN	**0,6301**	**0,6715**	**0,7014**	**0,7231**	**0,7413**	**0,7569**

Źródło: obliczenia własne.

Z kolei w tabeli 8 zilustrowano efekty zwiększania liczby szkód wyróżnianych przez system. Wykorzystano system o dziesięciu klasach.

Tabela 8. Systemy różniące się liczbą wyróżnianych szkód, $s = 10$, Λ~*IG* (0,15; 0,05)

q	1	2	3	4
Q	0,021	0,0182	0,0175	0,0173
*Q*1	0,09	0,09	0,09	0,09
*Q*2	0,069	0,0718	0,0725	0,0727
QN	**0,6887**	**0,7306**	**0,7413**	**0,7432**

Źródło: obliczenia własne.

Również w tym przypadku wnioski są zgodne z intuicją. Zwiększenie liczby wyróżnianych szkód prowadzi do lepszej oceny ubezpieczonych, choć – jak się wydaje – krańcowy przyrost dokładności oceny szybko maleje wraz z kolejną wyróżnianą szkodą. Jest to spowodowane bardzo niskim prawdopodobieństwem zgłoszenia dużej liczby szkód.

13. Podsumowanie

W badaniu podjęto próbę optymalizacji reguł przejścia systemów bonus-malus o składkach *Q*-optymalnych. Badano systemy o różnej liczbie klas i różnej liczbie wyróżnianych szkód dla różnych parametrów funkcji struktury ryzyka. Zaproponowano nową unormowaną miarę jakości oceny ubezpieczonych przez system. Otrzymane systemy analizowano za pomocą powszechnie używanych wskaźników. Badanie wykazało m.in., że stosowanie reguł przejścia minimalizujących błąd średniokwadratowy oceny ubezpieczonych nie gwarantuje innych dobrych własności systemu (np. wektor składek, elastyczność całkowita, współczynnik zmienności składki stacjonarnej). Minimalizacja błędu średniokwadratowego *Q* może prowadzić do systemu nieakceptowanego ze względu na inne kryteria. Jakość otrzymanych w ten sposób systemów w znacznym stopniu zależy od funkcji struktury ryzyka w portfelu i nie wydaje się, aby stosowanie reguł przejścia zapewniających jak najmniejszy błąd średniokwadratowy oceny ubezpieczonych *Q* było pożądane dla wszystkich portfeli, niezależnie od funkcji struktury ryzyka. Ostatecznie nic nie wskazuje na to, aby minimalizacja *Q* pozwoliła „zautomatyzować" i zobiektywizować proces budowy systemu bonus-malus.

Jako kierunki dalszych badań można wskazać optymalizację reguł przejścia przy składkach obliczanych według innych kryteriów, w tym przy składkach określonych przez decydenta, oraz optymalizację reguł przejścia względem innych charakterystyk systemu bonus-malus.

Bibliografia

Borgan Ø., Hoem J.M., Norberg R., *A Nonasymptotic Criterion for Evaluation of Automobile Bonus Systems*, „Scandinavian Actuarial Journal" 1981, s. 165–178.

De Pril N., *The Efficiency of a Bonus-Malus System*, „ASTIN Bulletin" 1978, vol. 10, part 1, s. 59–72.

Gilde V., Sundt B., *On Bonus Systems with Credibility Scale*, „Scandinavian Actuarial Journal" 1989, vol. 1989, s. 13–22.

Kemény J., Snell J., *Finite Markov Chains*, Van Nostrand, New York 1960.

Lemaire J., *Automobile Insurance: Actuarial Models*, Kluwer Nijhoff, Boston 1985.

Lemaire J., *Bonus-malus Systems in Automobile Insurance*, Kluwer Nijhoff, Boston 1995.

Lemaire J., Zi H., *High deductibles instead of bonus-malus. Can it work?*, „Astin Bulletin" 1994, vol. 24, no. 1, s. 75–86.

Loimaranta K., *Some Asymptotic Properties of Bonus Systems*, „ASTIN Bulletin" 1972, vol. 6, part 3, s. 233–245.

Marlock M., *Aspects of optimization in automobile insurance*, Lecture Notes in Economics and Mathematics Systems, Springer, Berlin–New York 1985, s. 131–141.

Norberg R., *A credibility theory for automobile bonus systems*, „Scandinavian Actuarial Journal" 1976, vol. 1976, s. 92–107.

Podgórska M., Cieślik B., Kryszeń B., Niemiec M., Topolewski M., *System bonus--malus sprawiedliwy w sensie przejść między klasami*, Instytut Ekonometrii SGH, Warszawa 2006.

Topolewski M., *System bonus-malus jako łańcuch Markowa z wypłatami*, praca doktorska, Instytut Ekonometrii SGH, Warszawa 2002.

Willmot G., *The Poisson-Inverse Gaussian Distribution as an Alternative to the Negative Binomial*, „Scandinavian Actuarial Journal" 1987, vol. 1986, s. 113–127.

* * *

Optimisation of transition rules of bonus-malus system with Q-optimal premiums

Summary

Bonus-malus systems are used to differentiate premiums ex post in the risk assessment process in the vehicle insurance. While the tools of system analysis and premium calculation criteria are well-described in the literature, relatively little attention has been given to the optimisation of transition rules between classes of the bonus-malus system. The problem appears to be particularly interesting from the viewpoint of system design. The possibility of building a system that meets the specified optimality criterion in advance seems to be desirable. In this paper, we try to optimise the transition rules of bonus-malus systems of different sizes for insured portfolios characterised by the function of the risk structure of various parameters. We try to check whether the optimisation of transition rules can improve and objectify the process of building the bonus-malus system, and whether the aim to create a bonus-malus system with good statistical properties conforms with the desired market utility performance of the system.

Keywords: bonus-malus system, transition rules, optimisation, automobile insurance