

WOJCIECH BIJAK

Kolegium Analiz Ekonomicznych
Szkoła Główna Handlowa w Warszawie

Ubezpieczeniowy Fundusz Gwarancyjny

Łączenie i agregacja systemów bonus-malus w ubezpieczeniach komunikacyjnych

Streszczenie

W ubezpieczeniach komunikacyjnych OC i AC powszechną praktyką jest stosowanie systemów bonus-malus (BM) w taryfikacji. Składka dla ubezpieczonego jest ustalana m.in. w zależności od historii jego szkód. Do opisu systemów BM wykorzystuje się często łańcuchy Markowa konstruowane dla pojedynczego ubezpieczonego. W pracy przedstawiono koncepcję wykorzystania działań na systemach BM do konstruowania m.in. ubezpieczeń wielu osób lub takich, które dotyczą ryzyka związanego z wieloma osobami lub pojazdami. Zaprezentowano dwa działania – łączenia i agregacji systemów BM. Łączenie pozwala na tworzenie ubezpieczeń obejmujących coraz liczniejsze grupy ubezpieczonych lub jednostek ryzyka, natomiast agregacja na traktowanie od strony ubezpieczeniowej określonej grupy jako odrębnego podmiotu (statusu), z którym związane jest ryzyko. Rozpatrywane są ubezpieczenia z czasem mierzonym w sposób dyskretny. Przyjęto założenie, że w przypadku ubezpieczeń wielu osób lub wielu pojazdów rozpatrywane zmienne losowe określające liczbę szkód są stochastycznie niezależne lub mają wielowymiarowy rozkład Poissona lub wielowymiarowy uogólniony rozkład Poissona.

Słowa kluczowe: ubezpieczenie komunikacyjne, systemy bonus-malus, łączenie, agregacja, łańcuchy Markowa, wielowymiarowy rozkład Poissona, wielowymiarowy uogólniony rozkład Poissona

1. Wstęp

Praca dotyczy ubezpieczeń, w których składka jest kalkulowana w zależności od klasy taryfowej, do której jest zaliczany ubezpieczony na podstawie historii przebiegu ubezpieczenia. Będziemy rozpatrywać umowy okresowe (np. roczne)

odnawialne. Do tej kategorii ubezpieczeń należą m.in. ubezpieczenia komunikacyjne OC posiadaczy pojazdów mechanicznych (OC p.p.m.) oraz ubezpieczenia autocasco (AC) ze składką ustalaną przy wykorzystaniu systemów bonus-malus (systemów BM).

Ubezpieczeniom z systemami BM jest poświęcona bogata literatura aktuarialna¹. Autorzy zwykle koncentrują się na ubezpieczeniu pojedynczej osoby lub pojazdu. Ostatnio daje się zauważyć wzmożone zainteresowanie ubezpieczeniami małych flot pojazdów². Niniejsza praca dotyczy ubezpieczeń wielu obiektów, m.in. ubezpieczeń jednej osoby (jeden podmiot) i wielu pojazdów lub jednego pojazdu i jednocześnie wielu osób (podmiotów). O tym, że zagadnienie to może być istotne dla zakładów ubezpieczeń, świadczą dane przedstawione w tabelach 1 i 2.

Tabela 1. Struktura portfela umów AC i OC p.p.m. zawartych przez jeden podmiot według liczby pojazdów ubezpieczonych

Liczba pojazdów	AC	OC p.p.m.
1	85%	65%
2–5	14%	33%
6–10	1%	2%
>10	0%	0%

Źródło: dane UFG (stan na wrzesień 2014r.).

Tabela 2. Struktura portfela umów AC i OC p.p.m. zawartych na jeden pojazd według liczby podmiotów ubezpieczonych

Liczba podmiotów	AC	OC p.p.m.
1	69%	80%
2–5	31%	20%
6–10	0%	0%
>10	0%	0%

Źródło: dane UFG (stan na wrzesień 2014r.).

¹ Na przykład: J. Lemaire, *Bonus-Malus Systems in Automobile Insurance*, Kluwer Academic Publishers, Boston 1995; M. Denuit, X. Maréchal, S. Pitrebois, J. Walhin, *Actuarial Modelling of Claim Counts: Risk Classification, Credibility and Bonus-Malus Systems*, John Wiley & Sons Ltd, Chichester 2007.

² Tej tematyce są poświęcone np. prace: J.F. Angers, D. Desjardins, G. Dionne, F. Guertin, *Vehicle and Fleet Random Effects in a Model of Insurance Rating for Fleets of Vehicles*, „ASTIN Bulletin” 2006, vol. 36, no. 1, s. 25–77; D. Desjardins, G. Dionne, J. Pinquet, *Experience Rating Schemes for Fleets of Vehicles*, „ASTIN Bulletin” 2001, vol. 31, no. 1, s. 81–105.

W praktyce zakłady ubezpieczeń wykorzystują historię szkód ubezpieczonego do wyznaczenia jego składki. W ramach prezentowanego podejścia można uwzględnić dłuższą niż tylko jednookresowa historię szkód w systemach bonus-malus, tworząc obiekty łączące osoby (ubezpieczone podmioty) z okresami.

W kolejnych punktach pracy (2 i 3) sformalizowano opis ubezpieczeń z wielostanowym systemem taryfowym, omówiono modelowanie systemów bonus-malus za pomocą łańcuchów Markowa oraz wprowadzono działania łączenia (w punkcie 4.1) i agregacji (w punkcie 4.2) systemów bonus-malus. W punkcie 4.1 zaproponowano wykorzystanie wielowymiarowego rozkładu Poissona lub wielowymiarowego uogólnionego rozkładu Poissona jako rozkładów liczby szkód związanych z wieloma obiektami objętymi ubezpieczeniem. Rozważania teoretyczne zilustrowano przykładami.

2. Umowy ubezpieczenia z wielostanowym systemem taryfowym

W dalszych rozważaniach będzie nas interesować klasa umów ubezpieczenia krótkookresowego (np. rocznych) odnawialnych, w których wysokość składki zależy od historii ubezpieczenia. Ubezpieczeniem objętych jest wiele obiektów mających wspólną część ekspozycji na ryzyko. Obiektem może być np. osoba ubezpieczona w powiązaniu z okresem ubezpieczenia, pojazd w powiązaniu z okresem ubezpieczenia, ubezpieczony w powiązaniu z pojazdem, pojazd w powiązaniu z ubezpieczonym, rodzaje szkód objętych ubezpieczeniem.

Przyjmujemy następujące założenia dotyczące ubezpieczenia:

- ubezpieczeniem objętych jest M obiektów;
- k -ty obiekt jest opisany przez ciągi $N_k = (\lambda_k, N_{k1}, N_{k2}, \dots)$ oraz

$$X_k = \left(X_{k1}^{(1)}, X_{k1}^{(2)}, \dots, X_{k1}^{(N_{k1})}, X_{k2}^{(1)}, X_{k2}^{(2)}, \dots, X_{k2}^{(N_{k2})}, \dots \right)$$
 dla $k = 1, 2, \dots, M$, gdzie N_{kt} oznacza liczbę szkód zaszłych w okresie $[t-1, t)$ znaną w momencie analizy³ $t + \tau$, $\tau = 0, 1, 2, \dots$, λ_k wyraża indywidualne narażenie na ryzyko k -tego obiektu, a $X_{kt}^{(j)}$ jest wysokością j -tej szkody przypisanej do k -tego obiektu

³ W momencie t zakład ubezpieczeń zna tylko liczbę szkód zgłoszonych w okresie $[t-1, t)$. W dalszej części pracy będziemy rozważać również sytuacje, gdy będzie analizowana historia ubezpieczenia dłuższa niż jednookresowa, stąd mówimy o szkodach zaszłych, chociaż nie wszystkie muszą być znane w momencie analizy.

w okresie $[t-1, t)$; łączna wartość szkód w okresie $[t-1, t)$ przypisana do

k -tego obiektu jest więc równa $S_{kt} = \sum_{j=1}^{N_{kt}} X_{kt}^{(j)}$, przy czym $S_{kt} = 0$ dla $N_{kt} = 0$;

- ciągi N_k oraz X_k są stochastycznie niezależne dla każdego $k = 1, \dots, M$, a pary (N_k, X_k) są niezależne dla różnych k ; w dalszej części pracy założenie o niezależności N_k, N_h dla $k \neq h$ zostanie uchylone;
- przy ustalonym λ_k zmienne N_{kt} mają rozkład Poissona z parametrem λ_k , oznaczany dalej $Poiss(\lambda_k)$; wartość parametru λ_k odzwierciedla wpływ różnych czynników (obserwowalnych i nieobserwowalnych) na częstość szkód; w związku z opóźnieniami w napływie informacji o szkodach może być właściwe przyjęcie założenia, że parametr λ_k zmienia się w czasie (oznaczając go będziemy wówczas λ_{kt})⁴.

Przez ubezpieczenie obowiązujące w okresie $[t-1, t)$ o numerze okresu $t = 1, 2, \dots, T$ rozumiemy parę

$$\left((S_{1t}, S_{2t}, \dots, S_{Mt}), W(S_t) \right), \quad (1)$$

gdzie $S_t = S_{1t} + S_{2t} + \dots + S_{Mt}$ – całkowita wartość szkód zaszłych w okresie $[t-1, t)$, $W(S_t)$ – łączna wartość wypłat odszkodowań z tytułu szkód zaszłych w okresie $[t-1, t)$, T – koniec ostatniego okresu ubezpieczenia po ostatnim możliwym jego odnowieniu ($T \leq \infty$). W ubezpieczeniu pełnym przyjmujemy, że $W(S_t) = S_t$.

Umową ubezpieczenia nazywamy trójkę

$$\left((S_{1t}, S_{2t}, \dots, S_{Mt}), W(S_t), P_{t-1} \right), \quad (2)$$

gdzie P_{t-1} oznacza składkę ustaloną na początku okresu $[t-1, t)$, tzn. w momencie $t-1$, za ochronę ubezpieczeniową w tym okresie.

Możemy przyjąć, że umowa ubezpieczenia (2) jest złożona z umów ubezpieczenia indywidualnych obiektów

$$\left(S_{kt}, W(S_{kt}), P_{k(t-1)} \right), \quad (3)$$

⁴ W przypadku, gdy uwaga będzie skoncentrowana na pojedynczym obiekcie, będziemy opuszczać indeks k , pisząc np. λ, N_t zamiast λ_k, N_{kt} lub N , gdy będziemy zakładać, że rozkład zmiennej N_t jest stały w czasie (nie zależy od t).

gdzie $P_{k(t-1)}$ oznacza składkę za ubezpieczenie obiektu k ustaloną w momencie $t-1$ w sytuacji, gdyby był on ubezpieczony indywidualnie.

Dalej będziemy przyjmować, że składka $P_{k(t-1)}$ jest wyznaczana przy wykorzystaniu systemu bonus-malus odpowiedniego dla danego obiektu, co oznacza, że jest jego funkcją. Zakład ubezpieczeń może stosować wiele systemów BM, różnicując zasady przyznawania zniżek, zwwyżek np. dla młodych kierowców, kierowców zawodowych, prywatnych użytkowników pojazdów. Przyjmujemy, że znana jest historia ubezpieczenia do momentu t . Zakład stoi przed wyceną kontraktu na okres $t+1$, czyli ustaleniem składki P_t . W dalszej części pracy zostaną przedstawione propozycje wyznaczenia składki P_t jako funkcji składek $P_{k(t-1)}$, $k = 1, 2, \dots, M$.

Na system BM stosowany przez zakład ubezpieczeń do indywidualnej oceny ryzyka związanego z ustalonym obiektem składają się⁵:

- ustalona skończona liczba klas taryfowych l_i , $i = 0, \dots, s$, przy czym klasa taryfowa o numerze 0 jest klasą o najwyższej zniżce, natomiast klasa o numerze s o najwyższej zwwyżce składki⁶, wyróżniona jest również tzw. klasa startowa l_0 ; zbiór klas taryfowych oznaczmy $\mathcal{L} = \{l_0, l_1, \dots, l_s\}$;
- zasada, że składka za dany rok zależy od klasy, do której został zaliczony ubezpieczony;
- zmienna losowa L_t , określająca numer klasy taryfowej, do której jest zaliczany ubezpieczony w momencie t , o wartościach zależnych wyłącznie od numeru klasy, do jakiej był on zaliczony w poprzednim momencie wyceny ubezpieczenia L_{t-1} oraz od liczby szkód zgłoszonych w ostatnim okresie, tzn. realizacji zmiennej N_t ;
- wektor mnożników składki $\mathbf{r} = (r_0, \dots, r_s)$ o elementach spełniających następujące warunki: $r_{i+1} \geq r_i$ dla $i = 0, \dots, s-1$ oraz $r_{i_0} = 1$, gdzie mnożnik składki r_i jest związany z klasą taryfową o numerze i ;
- reguły przejścia określające zasady zaliczania ubezpieczonego do klasy taryfowej na podstawie jego klasy taryfowej ustalonej w poprzednim momencie wyceny umowy oraz liczby zgłoszonych szkód w ostatnim okresie.

Określmy współczynniki $t_{ij}(n)$, $i, j = 0, \dots, s$ związane ze zmianą przypisania ubezpieczonego z klasy i do klasy j w kolejnym okresie po zgłoszeniu n szkód. Przyjmujemy, że jeżeli następuje zmiana przypisania do klasy, to $t_{ij}(n) = 1$, oraz

⁵ J. Lemaire, op.cit., s. 3–10; M. Denuit, X. Maréchal, S. Pitrebois, J. Walhin, op.cit., s. 165–171.

⁶ Klasę, jeżeli nie będzie to prowadzić do nieporozumienia, będziemy dalej utożsamiać z jej numerem.

że $t_{ij}(n) = 0$ w przeciwnym przypadku. Ze współczynników tych można utworzyć ciąg macierzy $\mathbf{T}(n) = [t_{ij}(n)]_{(s+1) \times (s+1)}$, $n = 0, 1, \dots$ o elementach równych zero lub

jeden z jednym niezerowym elementem w każdym wierszu.

Macierz

$$\mathbf{T} = [t_{ij}]_{(s+1) \times (s+1)},$$

gdzie $t_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{gdy istnieje } n \text{ takie, że } t_{ij}(n) = 1 \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$, określa wszystkie możliwe zmiany

przypisania ubezpieczonego do klas taryfowych w ciągu jednego okresu. Jest to macierz kwadratowa o elementach równych 1, gdy dana zmiana jest możliwa, i 0 w przeciwnym przypadku.

Niech \mathcal{A}_{ij} oznacza zdarzenie, którego zrealizowanie się powoduje zmianę przypisania ubezpieczonego do klas taryfowych w ciągu jednego okresu lub nie powoduje tego. Z przyjętych założeń wynika, że

$$\mathcal{A}_{ij} = \emptyset, \text{ gdy } t_{ij} = 0,$$

$$\mathcal{A}_{ij} = \{n : t_{ij}(n) = 1\}, \text{ gdy } t_{ij} = 1.$$

Dla każdego i mamy $\mathcal{A}_{ij} \cap \mathcal{A}_{i'j'} = \emptyset$, gdy $j \neq j'$ oraz $\bigcup_{j=0}^s \mathcal{A}_{ij} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Niech dodatkowo macierz $\mathcal{A} = [\mathcal{A}_{ij}]_{(s+1) \times (s+1)}$ oznacza macierz zdarzeń.

System BM możemy więc oznaczyć jako $SBM(\mathcal{L}, \mathbf{r}, \mathcal{A}, N_t)$. W przypadku stosowania systemu BM zróżnicowanego w zależności od ubezpieczanego obiektu będziemy pisać $SBM(\mathcal{L}_k, \mathbf{r}_k, \mathcal{A}_k, N_{kt})$, $k = 1, 2, \dots, M$.

Przykład 1. Rozpatrzmy system BM oznaczony jako $-1/+2$ o regułach przejścia opisanych w tabeli 3⁷.

⁷ Oznaczenie $-1/+2$ stanowi zakodowaną informację o regułach przejścia między stanami w ciągu jednego okresu. Jeżeli ubezpieczony zaliczany był do klasy o numerze i w momencie $t-1$, to w momencie t zostanie zaliczony do klasy o numerze $\max\{i-1, 0\}$, gdy nie zostanie zgłoszona szkoda, lub do klasy o numerze $\max\{i+2n, s\}$, gdy zostanie zgłoszonych n szkód w okresie $(t-1, t]$.

Tabela 3. Reguły przejścia systemu bonus-malus -1/+2

Klasa L_{t-1}	Liczba szkód w okresie N_t			
	0	1	2	≥ 3
	klasa L_t			
5	4	5	5	5
4	3	5	5	5
3	2	5	5	5
2	1	4	5	5
1	0	3	5	5
0	0	2	4	5

Źródło: M. Denuit, X. Maréchal, S. Pitrebois, J. Walhin, *Actuarial Modelling of Claim Counts: Risk Classification, Credibility and Bonus-Malus Systems*, John Wiley & Sons Ltd, Chichester 2007, s. 169.

Macierze T , \mathcal{A} są postaci:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \{0\} & \emptyset & \{1\} & \emptyset & \{2\} & \{n:n \geq 3\} \\ \{0\} & \emptyset & \emptyset & \{1\} & \emptyset & \{n:n \geq 2\} \\ \emptyset & \{0\} & \emptyset & \emptyset & \{1\} & \{n:n \geq 2\} \\ \emptyset & \emptyset & \{0\} & \emptyset & \emptyset & \{n:n \geq 1\} \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{0\} & \emptyset & \{n:n \geq 1\} \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{0\} & \{n:n \geq 1\} \end{bmatrix}.$$

3. Łańcuch Markowa w modelowaniu systemu BM

Niech L_t oznacza zmienną losową określającą numer klasy taryfowej przypisanej ubezpieczonemu w momencie t . Zakładamy, że rozkład zmiennej L_t zależy jedynie od realizacji zmiennej w poprzednim momencie $t-1$ i nie zależy od realizacji zmiennych $L_{t-2}, L_{t-3}, \dots, L_0$. Proces przypisania do klas taryfowych

$\{L_t\}$, $t = 0, 1, \dots, T-1$ możemy zatem opisać za pomocą jednorodnego łańcucha Markowa⁸.

Prawdopodobieństwo tego, że nastąpi zmiana klasy taryfowej z klasy o numerze i na klasę o numerze j w kolejnym okresie jest równe

$$p_{ij}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(\lambda) t_{ij}(n), \quad i, j = 0, \dots, s,$$

gdzie $p_n(\lambda)$ oznacza prawdopodobieństwo tego, że w ciągu okresu zostanie zgłoszonych dokładnie n szkód, tzn. $p_n(\lambda) = Pr(N = n)$. Równoważnie prawdopodobieństwo to możemy określić jako

$$p_{ij}(\lambda) = Pr_N(\mathcal{A}_{ij}) = Pr(N \in \mathcal{A}_{ij}), \quad i, j = 0, \dots, s.$$

Macierze prawdopodobieństw przejść łańcucha $\{L_t\}$ oznaczmy przez $\mathbf{\Pi}(\lambda) = [p_{ij}(\lambda)]_{(s+1) \times (s+1)}$. Macierz ta wyraża się wzorem

$$\mathbf{\Pi}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(\lambda) \mathbf{T}(n).$$

Wprowadźmy dodatkowo operację na macierzy zdarzeń zdefiniowaną następująco:

$$\mathbf{P}_N(\mathcal{A}) = [Pr_N(\mathcal{A}_{ij})]_{(s+1) \times (s+1)}.$$

Możemy wówczas zapisać, że

$$\mathbf{\Pi}(\lambda) = \mathbf{P}_N(\mathcal{A}).$$

Macierz $\mathbf{\Pi}(\lambda)$ jest macierzą stochastyczną z zerowymi elementami $p_{ij}(\lambda)$ w przypadku, gdy przejście z klasy i do klasy j nie jest możliwe ($t_{ij} = 0$). Macierz $\mathbf{\Pi}(\lambda)$ zależy od rozkładu zmiennej losowej N_t , czyli w ogólnym przypadku może być zmienna w czasie, co będziemy zaznaczać, wykorzystując symbol $\mathbf{\Pi}_t(\lambda)$. Otrzymany wówczas łańcuch będzie niejednorodnym łańcuchem Markowa.

⁸ Por. np. J.G. Kemeny, J.L. Snell, *Finite Markov Chains*, Springer-Verlag, New York–Berlin–Heidelberg–Tokyo 1976; M. Iosifescu, *Skończone procesy Markowa i ich zastosowania*, PWN, Warszawa 1988.

Dalej systemy BM $SBM(\mathcal{L}, r, \mathcal{A}, N)$, $SBM(\mathcal{L}, r, \mathcal{A}_t, N_t)$ będziemy alternatywnie oznaczać $SBM(\mathcal{L}, r, \Pi(\lambda), N)$, $SBM(\mathcal{L}, r, \Pi_t(\lambda), N_t)$.

Niech e_0 oznacza wierszowy wektor o $s+1$ współrzędnych z elementem równym 1 na miejscu o numerze i_0 odpowiadającym klasie startowej l_{i_0} i pozostałymi elementami równymi 0. Rozkład zmiennej L_t po t okresach ubezpieczenia można wyznaczyć ze wzoru

$$\pi_t(\lambda) = e_0 [\Pi(\lambda)]^t, \tag{4}$$

gdzie $\pi_t(\lambda) = [\pi_{t0}(\lambda), \pi_{t1}(\lambda), \dots, \pi_{ts}(\lambda)]$ oraz $\pi_{ti}(\lambda) = Pr(L_t = i)$.

Rozkład stacjonarny (o ile istnieje) opisany wektorem

$$\pi(\lambda) = [\pi_0(\lambda), \pi_1(\lambda), \dots, \pi_s(\lambda)] = \lim_{t \rightarrow \infty} \pi_t(\lambda),$$

można wyznaczyć ze wzoru⁹

$$\pi(\lambda) = e(I - \Pi(\lambda) + E)^{-1}, \tag{5}$$

gdzie e oznacza $s+1$ -wymiarowy wektor o wszystkich współrzędnych równych 1, macierze I oraz E wymiaru $(s+1) \times (s+1)$ – odpowiednio macierz jednostkową oraz macierz złożoną z jedynek.

Ubezpieczony, który w systemie BM w momencie t został zaliczony do klasy taryfowej l_i , płaci składkę P_t za ubezpieczenie na okres $[t, t+1)$, równą

$$P_t = r_i \hat{P}_0,$$

gdzie \hat{P}_0 oznacza składkę podstawową ustaloną na podstawie taryfikacji *a priori*.

Do syntetycznego opisu systemów BM wykorzystuje się wiele charakterystyk. W dalszej części pracy będą użyte:

- średnia składka bieżąca w momencie t

$$\bar{r}_t = \pi_t(\lambda) r^T;$$

⁹ T. Rolski, H. Schmidli, V. Schmidt, J. Teugels, *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, John Wiley & Sons Inc., New York 1999, s. 288.

- średnia składka stacjonarna

$$\bar{r} = \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\lambda}) \mathbf{r}^T;$$

- wskaźnik *RSAL* bieżący w momencie t

$$RSAL_t = \frac{\bar{r}_t - \min\{r_0, \dots, r_s\}}{\max\{r_0, \dots, r_s\} - \min\{r_0, \dots, r_s\}};$$

- wskaźnik *RSAL* stacjonarny

$$RSAL = \frac{\bar{r} - \min\{r_0, \dots, r_s\}}{\max\{r_0, \dots, r_s\} - \min\{r_0, \dots, r_s\}}.$$

4. Działania na systemach BM

4.1. Łączenie systemów BM

Zanim zostaną zdefiniowane działania łączenia i agregacji systemów BM (ubezpieczeń z wyceną dokonywaną przy wykorzystaniu systemów BM) zostaną wprowadzone działania na zbiorach, macierzach zdarzeń i macierzach liczb rzeczywistych¹⁰. Załóżmy, że mamy dwa systemy BM: $SBM(\mathcal{L}_1, \mathbf{r}_1, \mathcal{A}_1, N_{1t})$, $SBM(\mathcal{L}_2, \mathbf{r}_2, \mathcal{A}_2, N_{2t})$.

Definicja 1. Złączeniem przestrzeni stanów $\mathcal{L}_1 = \{l_0^1, l_1^1, \dots, l_{s_1}^1\}$ oraz

$\mathcal{L}_2 = \{l_0^2, l_1^2, \dots, l_{s_2}^2\}$ ($\mathcal{L}_{(1,2)} = \mathcal{L}_1 \odot \mathcal{L}_2$) nazywamy przestrzeń $(s_1 + 1)(s_2 + 1)$ elementową par stanów

$$\mathcal{L}_{(1,2)} = \left\{ (l_0^1, l_0^2), (l_0^1, l_1^2), \dots, (l_0^1, l_{s_2}^2), \dots, (l_{s_1}^1, l_{s_2}^2) \right\}$$

¹⁰ Działania na ubezpieczeniach na życie wielu osób opisywanych za pomocą łańcuchów Markowa zostały omówione w pracy: W. Bijak, *Ubezpieczenia na życie jako niejednorodny łańcuch Markowa*, „Prace Naukowe” Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu, nr 312, Wrocław 2013, s. 9–28.

o kolejności ustalonej według stanów z przestrzeni \mathcal{L}_1 (pierwszy element w parze), a następnie względem stanów z przestrzeni \mathcal{L}_2 (drugi element w parze).

Podobnie zdefiniujemy złączenie macierzy zdarzeń.

Definicja 2. Złączeniem macierzy zdarzeń $\mathcal{A}_1 = [\mathcal{A}_{ij}^1]$ oraz $\mathcal{A}_2 = [\mathcal{A}_{pq}^2]$

($\mathcal{A}_{(1,2)} = \mathcal{A}_1 \odot \mathcal{A}_2$) nazywamy macierz o wymiarach $(s_1 + 1)(s_2 + 1) \times (s_1 + 1)(s_2 + 1)$ postaci

$$\mathcal{A}_{(1,2)} = \mathcal{A}_1 \odot \mathcal{A}_2 = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{00}^1 \otimes \mathcal{A}_2 & \cdots & \mathcal{A}_{0s_1}^1 \otimes \mathcal{A}_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{A}_{s_1 0}^1 \otimes \mathcal{A}_2 & \cdots & \mathcal{A}_{s_1 s_1}^1 \otimes \mathcal{A}_2 \end{bmatrix},$$

gdzie macierz $\mathcal{A}_{ij}^1 \otimes \mathcal{A}_2 = [\mathcal{A}_{ij, pq}^1 \mathcal{A}_{pq}^2]$ jest macierzą $(s_2 + 1) \times (s_2 + 1)$ par zdarzeń.

Niech dalej symbol $\Phi(\varphi)$ oznacza operację na macierzach $\mathbf{A}_{k \times l}$ oraz $\mathbf{B}_{m \times n}$ liczb rzeczywistych zdefiniowaną następująco

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}\Phi(\varphi)\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\varphi\mathbf{B} & \cdots & a_{1l}\varphi\mathbf{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1}\varphi\mathbf{B} & \cdots & a_{kl}\varphi\mathbf{B} \end{bmatrix},$$

gdzie macierz $\mathbf{C} = \mathbf{A}\Phi(\varphi)\mathbf{B}$ ma wymiary $km \times ln$, $a_{ij}\varphi\mathbf{B} = [c_{pq}]_{m \times n}$, $c_{pq} = \varphi(a_{ij}, b_{pq})$. Jeżeli $\varphi(a_{ij}, b_{pq}) = a_{ij} \cdot b_{pq}$, to macierz \mathbf{C} jest iloczynem Kroneckera $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ macierzy $\mathbf{A}_{k \times l}$ oraz $\mathbf{B}_{m \times n}$.

Funkcje, które warto rozważyć w kontekście łączenia systemów bonus-malus, to np.:

1. $\varphi(a_{ij}, b_{pq}) = a_{ij} \cdot b_{pq}$,
2. $\varphi(a_{ij}, b_{pq}) = a_{ij} + b_{pq}$,
3. $\varphi(a_{ij}, b_{pq}) = \max\{a_{ij}, b_{pq}\}$,
4. $\varphi(a_{ij}, b_{pq}) = \min\{a_{ij}, b_{pq}\}$,
5. $\varphi(a_{ij}, b_{pq}) = \alpha a_{ij} + \beta b_{pq}$, $\alpha, \beta \geq 0$, w szczególności $\beta = (1 - \alpha)$, $\alpha \in [0, 1]$.

Definicja 3. $\Phi(\varphi)$ złączeniem systemów BM $SBM(\mathcal{L}_1, r_1, \mathcal{A}_1, N_{1t})$, $SBM(\mathcal{L}_2, r_2, \mathcal{A}_2, N_{2t})$ nazywamy

$$SBM(\mathcal{L}_1 \odot \mathcal{L}_2, r_1 \Phi(\varphi) r_2, \mathcal{A}_1 \odot \mathcal{A}_2, (N_{1t} N_{2t})),$$

gdzie $(N_{1t} N_{2t})$ oznacza dwuwymiarową zmienną losową określającą liczbę szkód związanych z obiektami odpowiednio 1 i 2 zgłoszonych w okresie $[t-1, t)$.

Dzięki złączeniu systemów BM możemy przy ustalaniu składki dwa indywidualne obiekty traktować jako jeden obiekt podlegający ubezpieczeniu. Łańcuch Markowa wykorzystywany do modelowania złączonego systemu BM można traktować jako uogólnienie rozszerzonego łańcucha Markowa¹¹.

Macierz prawdopodobieństw przejścia dla złączonego systemu BM jest równa

$$\mathbf{\Pi}(\lambda_1, \lambda_2) = P_{(N_{1t} N_{2t})}(\mathcal{A}_1 \odot \mathcal{A}_2) = \left[Pr_{(N_{1t} N_{2t})}(\mathcal{A}_{ij}^1, \mathcal{A}_{pq}^2) \right],$$

gdzie $Pr_{(N_{1t} N_{2t})}(\mathcal{A}_{ij}^1, \mathcal{A}_{pq}^2) = Pr(N_{1t} \in \mathcal{A}_{ij}^1, N_{2t} \in \mathcal{A}_{pq}^2)$.

Niech e_0^1, e_0^2 oznaczają wierszowe wektory z elementem równym 1 na miejscu odpowiednio o numerach i_0, p_0 odpowiadających klasom startowym $L_{i_0}^1, L_{p_0}^2$ i z pozostałymi elementami równymi 0. Rozkład dwuwymiarowej zmiennej (L_t^1, L_t^2) po t okresach ubezpieczenia można wyznaczyć ze wzoru

$$\pi_t(\lambda_1, \lambda_2) = (e_0^1 \otimes e_0^2) \left[\mathbf{\Pi}(\lambda_1, \lambda_2) \right]^t, \quad (6)$$

gdzie $\pi_t(\lambda_1, \lambda_2) = [\pi_{t00}(\lambda_1, \lambda_2), \pi_{t01}(\lambda_1, \lambda_2), \dots, \pi_{t0s_2}(\lambda_1, \lambda_2), \dots, \pi_{ts_1s_2}(\lambda_1, \lambda_2)]$ oraz

$$\pi_{tip}(\lambda_1, \lambda_2) = Pr(L_t^1 = i, L_t^2 = p), \quad i = 0, 1, \dots, s_1, \quad p = 0, 1, \dots, s_2.$$

Rozkład stacjonarny opisany wektorem

$$\pi(\lambda_1, \lambda_2) = [\pi_{00}(\lambda_1, \lambda_2), \pi_{01}(\lambda_1, \lambda_2), \dots, \pi_{0s_2}(\lambda_1, \lambda_2), \dots, \pi_{s_1s_2}(\lambda_1, \lambda_2)] = \lim_{t \rightarrow \infty} \pi_t(\lambda_1, \lambda_2),$$

można uzyskać korzystając z zależności (5).

Przykład 2. Rozpatrzmy dwa systemy BM oznaczone jako $-1/+1$ o regułach przejścia opisanych w tabeli 4, stanie początkowym odpowiednio 1 i 0, wektorze mnożników składki $r_1 = [0,5, 1,0, 1,5]$, $r_2 = [1,0, 1,5, 2,0]$.

¹¹ Rozszerzone łańcuchy Markowa (ang. *Expanded Markov chain*) omówiono np. w pracach: J.G. Kemeny, J.L. Snell, op.cit., s. 140–145; M. Iosifescu, op.cit., s. 169–171.

Tabela 4. Reguły przejścia systemu bonus-malus -1/+1 ($i = 1, 2$)

Klasa L_{t-1}^i	Liczba szkód w okresie N_{it}		
	0	1	≥ 2
	Klasa L_t		
2	1	2	2
1	0	2	2
0	0	1	2

Źródło: opracowanie własne.

Macierze T, \mathcal{A} są postaci:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{bmatrix} \{0\} & \{1\} & \{n: n \geq 2\} \\ \{0\} & \emptyset & \{n: n \geq 1\} \\ \emptyset & \{0\} & \{n: n \geq 1\} \end{bmatrix}.$$

Złączenie tych dwóch systemów BM jest systemem o przestrzeni stanów

$$\mathcal{L}_{(1,2)} = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,1), (2,2)\},$$

wektorze określającym stan początkowy

$$e_0^1 \otimes e_0^2 = [0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0],$$

macierzy zdarzeń

$$\mathcal{A}_1 \odot \mathcal{A}_2$$

$$= \begin{bmatrix} \{0\}\{0\} & \{0\}\{1\} & \{0\}\{n: n \geq 2\} & \{1\}\{0\} & \{1\}\{1\} & \{1\}\{n: n \geq 2\} & \{n: n \geq 2\}\{0\} & \{n: n \geq 2\}\{1\} & \{n: n \geq 2\}\{n: n \geq 2\} \\ \{0\}\{0\} & \{0\}\emptyset & \{0\}\{n: n \geq 1\} & \{1\}\{0\} & \{1\}\emptyset & \{1\}\{n: n \geq 1\} & \{n: n \geq 2\}\{0\} & \{n: n \geq 2\}\emptyset & \{n: n \geq 2\}\{n: n \geq 1\} \\ \{0\}\emptyset & \{0\}\{0\} & \{0\}\{n: n \geq 1\} & \{1\}\emptyset & \{1\}\{0\} & \{1\}\{n: n \geq 1\} & \{n: n \geq 2\}\emptyset & \{n: n \geq 2\}\{0\} & \{n: n \geq 2\}\{n: n \geq 1\} \\ \{0\}\{0\} & \{0\}\{1\} & \{0\}\{n: n \geq 2\} & \emptyset\{0\} & \emptyset\{1\} & \emptyset\{n: n \geq 2\} & \{n: n \geq 1\}\{0\} & \{n: n \geq 1\}\{1\} & \{n: n \geq 1\}\{n: n \geq 2\} \\ \{0\}\{0\} & \{0\}\emptyset & \{0\}\{n: n \geq 1\} & \emptyset\{0\} & \emptyset\emptyset & \emptyset\{n: n \geq 1\} & \{n: n \geq 1\}\{0\} & \{n: n \geq 1\}\emptyset & \{n: n \geq 1\}\{n: n \geq 1\} \\ \{0\}\emptyset & \{0\}\{0\} & \{0\}\{n: n \geq 1\} & \emptyset\emptyset & \emptyset\{0\} & \emptyset\{n: n \geq 1\} & \{n: n \geq 1\}\emptyset & \{n: n \geq 1\}\{0\} & \{n: n \geq 1\}\{n: n \geq 1\} \\ \emptyset\{0\} & \emptyset\{1\} & \emptyset\{n: n \geq 2\} & \{0\}\{0\} & \{0\}\{1\} & \{0\}\{n: n \geq 2\} & \{n: n \geq 1\}\{0\} & \{n: n \geq 1\}\{1\} & \{n: n \geq 1\}\{n: n \geq 2\} \\ \emptyset\{0\} & \emptyset\emptyset & \emptyset\{n: n \geq 1\} & \{0\}\{0\} & \{0\}\emptyset & \{0\}\{n: n \geq 1\} & \{n: n \geq 1\}\{0\} & \{n: n \geq 1\}\emptyset & \{n: n \geq 1\}\{n: n \geq 1\} \\ \emptyset\emptyset & \emptyset\{0\} & \emptyset\{n: n \geq 1\} & \{0\}\emptyset & \{0\}\{0\} & \{0\}\{n: n \geq 1\} & \{n: n \geq 1\}\emptyset & \{n: n \geq 1\}\{0\} & \{n: n \geq 1\}\{n: n \geq 1\} \end{bmatrix}$$

i wektorze mnożników składki przy $\varphi(r_i^1, r_j^2) = \max\{r_i^1, r_j^2\}$

$$r_1\Phi(\varphi)r_2 = [1, 0, 1, 5, 2, 0, 1, 0, 1, 5, 2, 0, 1, 5, 1, 5, 2, 0].$$

Wyznaczenie macierzy prawdopodobieństw przejścia upraszcza się, gdy przyjmiemy założenie, że zmienne losowe N_{1t}, N_{2t} są niezależne o stałych rozkładach np. $Poiss(\lambda_1), Poiss(\lambda_2)$. Wówczas

$$Pr_{(N_{1t}, N_{2t})}(\mathcal{A}_{ij}^1, \mathcal{A}_{pq}^2) = Pr_{N_{1t}}(\mathcal{A}_{ij}^1) Pr_{N_{2t}}(\mathcal{A}_{pq}^2).$$

Na przykład

$$Pr_{(N_{1t}, N_{2t})}(\{n : n \geq 1\} \{n : n \geq 1\}) = Pr(N_{1t} \in \{n : n \geq 1\}, N_{2t} \in \{n : n \geq 1\}) =$$

$$Pr(N_{1t} \geq 1) Pr(N_{2t} \geq 1) = (1 - e^{-\lambda_1})(1 - e^{-\lambda_2}).$$

Można pokazać, że jeżeli zmienne losowe N_{1t}, N_{2t} są niezależne o stałych w czasie rozkładach, to

$$\pi_t(\lambda_1, \lambda_2) = \pi_t(\lambda_1) \otimes \pi_t(\lambda_2)$$

oraz

$$\pi(\lambda_1, \lambda_2) = \pi(\lambda_1) \otimes \pi(\lambda_2).$$

Warto w tym miejscu rozważyć, że własności operacji złączenia systemów BM, takie np. jak przemienność i łączność, zależą od własności funkcji $\varphi(\cdot, \cdot)$ oraz łącznego rozkładu zmiennych N_{1t}, N_{2t} .

W kontekście rozpatrywanego w niniejszej pracy problemu zależność między liczbą szkód N_{kt} , $k = 1, 2, \dots, M$ zgłoszonych w okresie $[t-1, t)$ obciążających poszczególne obiekty można wprowadzić na wiele sposobów. Przypomnijmy, że w interesującym nas zagadnieniu przez obiekt możemy rozumieć osoby i pojazd $(O_{k, k=1, 2, \dots, M}, P)$, pojazdy i osobę $(P_{k, k=1, 2, \dots, M}, O)$, osobę z jej historią ubezpieczeniową $(\Xi_{k, k=1, 2, \dots, M}, O)$, pojazd z jego historią ubezpieczeniową $(\Xi_{k, k=1, 2, \dots, M}, P)$, kilka ubezpieczeń (np. ubezpieczeń pakietowych AC, OC) zawartych przez jedną osobę $(U_{k, k=1, 2, \dots, M}, O)$ lub wyróżnione klasy szkód obciążających ubezpieczenie¹² $(\tilde{S}_{k, k=1, 2, \dots, M}, U)$.

¹² W przypadku ubezpieczeń komunikacyjnych często wyróżnia się klasy szkód ze względu na ich wielkość, zakres odpowiedzialności ubezpieczyciela (pełna lub częściowa) lub ich rodzaj (szkody rzeczowe lub osobowe). Systemy BM przy tak rozumianych obiektach i założeniu niezależności rozkładów liczby szkód zostały omówione m.in. w pracy: M. Denuit, X. Marchal, S. Pitrebois, J. Walhin, op.cit., s. 270–276.

Przyjmijmy, że $M = 2$, tzn. np., że dwie osoby ubezpieczają jeden pojazd, jedna osoba ubezpiecza dwa pojazdy. W tych przypadkach możemy założyć, że

$$N_1 = K_1 + K_{12},$$

$$N_2 = K_2 + K_{12},$$

gdzie zmienne losowe K_1, K_2, K_{12} są niezależne¹³. Zmienne losowe K_1, K_2 są związane z różnymi elementami tworzącymi obiekt, natomiast zmienna K_{12} ze wspólnym elementem. Na przykład w przypadku (O_1, O_2, P) zależność wynika z zachowania się na drodze poszczególnych osób oraz z ich wspólnej dbałości o stan techniczny pojazdu (np. przeprowadzania badań technicznych, sprawdzania stanu opon).

W przypadku obiektu związanego z historią ubezpieczeniową osoby lub pojazdu wydaje się, że naturalne będzie przyjęcie następującego modelu zależności:

$$N_1 = K_1 + K_{12},$$

$$N_2 = K_{12}.$$

Liczba szkód zgłoszonych w roku zajścia szkody jest określona przez zmienną losową K_{12} , natomiast liczba szkód zgłoszonych w rok po roku zajścia szkody przez K_1 .

Jeżeli zmienne losowe K_1, K_2, K_{12} są niezależne i mają rozkłady $Poiss(\lambda_1)$, $Poiss(\lambda_2)$, $Poiss(\lambda_{12})$, to mówimy, że wektor (N_1, N_2) ma dwuwymiarowy rozkład Poissona o funkcji rozkładu prawdopodobieństwa¹⁴

$$Pr(N_1 = n_1, N_2 = n_2) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12})} \sum_{i=0}^{\min\{n_1, n_2\}} \frac{\lambda_1^{n_1-i} \lambda_2^{n_2-i} \lambda_{12}^i}{(n_1-i)! (n_2-i)! i!},$$

dla $n_1, n_2 = 0, 1, 2, \dots$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12} > 0$.

¹³ Zależność między zmiennymi losowymi określającymi prawdopodobieństwa przejścia w łańcuchu Markowa można wprowadzić, wykorzystując funkcje kopula. Takie podejście w odniesieniu do ubezpieczeń na życie wielu osób modelowanych z wykorzystaniem łańcuchów Markowa zastosowano w pracy: K. Gala, *Analiza ubezpieczeń dla wielu osób z wykorzystaniem funkcji copula*, „Prace Naukowe” Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu, nr 312, Wrocław 2013, s. 50–66.

¹⁴ Dwuwymiarowy rozkład Poissona można uogólnić na większą liczbę wymiarów. Por. np. N.L. Johnson, S. Kotz, N. Balakrishnan, *Discrete Multivariate Distributions*, J. Wiley & Sons Inc., New York 1995, s. 139.

Siłę zależności między zmiennymi N_1, N_2 można określić za pomocą współczynnika korelacji równego

$$\rho(N_1, N_2) = \frac{\lambda_{12}}{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_{12})(\lambda_2 + \lambda_{12})}}.$$

Jeżeli w modelu chcemy uwzględnić efekt wzmożonej ostrożności po szkodzie, to możemy przyjąć, że rozkłady zmiennych losowych K_1, K_2, K_{12} są uogólnionymi rozkładami Poissona $G\text{Pois}(\lambda_1, \vartheta_1)$, $G\text{Pois}(\lambda_2, \vartheta_2)$, $G\text{Pois}(\lambda_{12}, \vartheta_{12})$.

Mówimy, że zmienna losowa N ma rozkład uogólniony Poissona, gdy funkcja rozkładu prawdopodobieństwa jest postaci

$$\Pr(N = n) = \frac{\lambda(\lambda + n\vartheta)^{n-1}}{n!} e^{-n\vartheta - \lambda},$$

dla $n = 0, 1, 2, \dots$, $\lambda > 0$, $0 \leq \vartheta < 1$. Wartość oczekiwana i wariancja zmiennej N są odpowiednio równe

$$E(N) = \frac{\lambda}{1 - \vartheta}, \quad E(N) = \frac{\lambda}{(1 - \vartheta)^3}.$$

Jeżeli zmienne losowe K_1, K_2, K_{12} są niezależne i mają rozkłady $G\text{Pois}(\lambda_1, \vartheta_1)$, $G\text{Pois}(\lambda_2, \vartheta_2)$, $G\text{Pois}(\lambda_{12}, \vartheta_{12})$, to mówimy, że wektor (N_1, N_2) ma dwuwymiarowy uogólniony rozkład Poissona¹⁵ o funkcji rozkładu prawdopodobieństwa¹⁶

$$\Pr(N_1 = n_1, N_2 = n_2) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_{12} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12} + \vartheta_1 n_1 + \vartheta_2 n_2)} \\ \cdot \sum_{i=0}^{\min\{n_1, n_2\}} \frac{(\lambda_1 + (n_1 - i)\vartheta_1)^{n_1 - i - 1}}{(n_1 - i)!} \frac{(\lambda_2 + (n_2 - i)\vartheta_2)^{n_2 - i - 1}}{(n_2 - i)!} \frac{(\lambda_{12} + i\vartheta_{12})^{i-1}}{i!} e^{i(\vartheta_1 + \vartheta_2 - \vartheta_{12})},$$

dla $n_1, n_2 = 0, 1, 2, \dots$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12} > 0$, $0 \leq \vartheta_1 < 1$, $0 \leq \vartheta_2 < 1$, $0 \leq \vartheta_{12} < 1$.

Siłę zależności między zmiennymi N_1, N_2 można określić za pomocą współczynnika korelacji równego

¹⁵ Por. np. N.L. Johnson, S. Kotz, N. Balakrishnan, op.cit., s. 133.

¹⁶ Dwuwymiarowy uogólniony rozkład Poissona można uogólnić na większą liczbę wymiarów. Por. np. R. Vernic, *A Multivariate Generalization of the Generalized Poisson Distribution*, „ASTIN Bulletin” 2000, vol. 30, no. 1, s. 57–67.

$$\rho(N_1, N_2) = \frac{\text{Cov}(N_1, N_2)}{\sqrt{\text{Var}(N_1)\text{Var}(N_2)}},$$

gdzie $\text{Cov}(N_1, N_2) = \frac{\lambda_{12}}{(1 - \vartheta_{12})^3}$, $\text{Var}(N_i) = \frac{\lambda_i}{(1 - \vartheta_i)^3} + \frac{\lambda_{12}}{(1 - \vartheta_{12})^3}$, $i = 1, 2$.

Przykład 3.

1. Rozpatrzmy systemy BM odpowiednio $SBM(\mathcal{L}, r_g, \mathcal{A}, N_{ht})$, $g, h = 1, 2$ o identycznych stanach i regułach przejścia (oznaczonych $-1/+2$) określonych w tabeli 5, o stanach początkowych odpowiednio, gdy $g=1$ stanie o numerze 1 i gdy $g=2$ stanie o numerze 2, wektorach mnożników składek $r_1 = [0,5, 1,0, 1,5, 2,0, 2,5, 3,0]$, $r_2 = [0,5, 0,75, 1,0, 1,5, 2,0, 2,5]$.

Tabela 5. Reguły przejścia systemu bonus-malus $-1/+2$ ($i = 1, 2$)

Klasa L_{t-1}^i	Liczba szkód w okresie N_{it}		
	0	1	≥ 2
	Klasa L_{it}		
5	4	5	5
4	3	5	5
3	2	5	5
2	1	4	5
1	0	3	5
0	0	2	4

Źródło: opracowanie własne.

Przyjmijmy, że gdy $h = 1$, $N_{1t} = N_1 \sim \text{Poiss}(0,2)$ oraz gdy $h = 2$, $N_{2t} = N_2 \sim \text{Poiss}(0,15)$. Wybrane charakterystyki rozpatrywanych systemów zostały przedstawione w tabeli 6.

Tabela 6. Średnia stacjonarna składka i stacjonarna wartość $RSAL$ dla wybranych systemów BM

System BM	\bar{r}	$RSAL$
$SBM(\mathcal{L}, r_1, \mathcal{A}, N_1)$	1,037	0,215
$SBM(\mathcal{L}, r_2, \mathcal{A}, N_2)$	0,723	0,112
$SBM(\mathcal{L}, r_1, \mathcal{A}, N_2)$	0,862	0,145
$SBM(\mathcal{L}, r_2, \mathcal{A}, N_1)$	0,846	0,173

Źródło: opracowanie własne.

2. Przyjmijmy, że łączymy systemy BM $SBM(\mathcal{L}, r_{h_1}, \mathcal{A}, N_{g_1})$ i $SBM(\mathcal{L}, r_{h_2}, \mathcal{A}, N_{g_2})$, gdzie h_1, h_2, g_1, g_2 mogą przyjmować wartości 1, 2. Wybrane charakterystyki rozpatrywanych systemów przy różnych założeniach odnośnie do rozkładu wektora losowego (N_{g_1}, N_{g_2}) zostały przedstawione w tabeli 7. Jako kryterium łączenia wektorów mnożników składek przyjęto funkcję $\varphi(r_{h_i}, r_{h_j}) = \max\{r_{h_i}, r_{h_j}\}$, $i, j = 0, 1, \dots, 5$.

Tabela 7. Średnia stacjonarna składka i stacjonarna wartość RSAL dla wybranychłączonych systemów BM

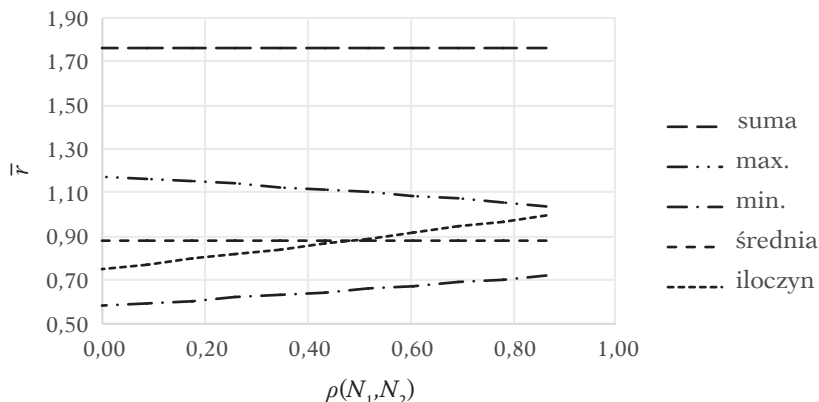
Wariant	System 1	System 2	(N_{g_1}, N_{g_2})	\bar{r}	RSAL
1	$SBM(\mathcal{L}, r_1, \mathcal{A}, N_1)$	$SBM(\mathcal{L}, r_2, \mathcal{A}, N_2)$	N_1, N_2 – niezależne	1,177	0,271
2	$SBM(\mathcal{L}, r_1, \mathcal{A}, N_1)$	$SBM(\mathcal{L}, r_1, \mathcal{A}, N_1)$	N_1, N_1 – niezależne	1,404	0,361
3	$SBM(\mathcal{L}, r_2, \mathcal{A}, N_2)$	$SBM(\mathcal{L}, r_1, \mathcal{A}, N_2)$	N_2, N_2 – niezależne	1,025	0,210
4	$SBM(\mathcal{L}, r_1, \mathcal{A}, N_1)$	$SBM(\mathcal{L}, r_1, \mathcal{A}, N_2)$	N_1, N_2 – niezależne	1,278	0,311
5	$SBM(\mathcal{L}, r_1, \mathcal{A}, N_1)$	$SBM(\mathcal{L}, r_1, \mathcal{A}, N_2)$	$N_1 = K_1 + K_{12}$ $N_2 = K_{12}$ $\lambda_1 = 0,05,$ $\lambda_{12} = 0,15$	1,037	0,215

Źródło: opracowanie własne.

Warianty 2, 4 i 5 mogą być interpretowane jako warianty z wydłużoną do 2 lat pamięcią systemu bonus-malus (łańcuchy Markowa dwukrotnie związane) w odniesieniu do pojedynczego ubezpieczonego. $SBM(\mathcal{L}, r_1, \mathcal{A}, N_1)$ można traktować jako system odnoszący się do okresu poprzedzającego o dwa okresy moment analizy, natomiast $SBM(\mathcal{L}, r_1, \mathcal{A}, N_2)$ jako system odnoszący się do okresu bezpośrednio poprzedzającego ten moment. Wariant 2 opisuje sytuację, gdy przyjmuje się, że średnia częstość szkód jest stała i nie zmienia się z okresu na okres. W wariacie 4 zakłada się, że wiedza na temat średniej częstości szkód jest pełniejsza dla okresów wcześniejszych ($\lambda_1 > \lambda_2$), ale uzyskiwana jest niezależnie. Z kolei w wariacie 5 przyjmuje się pewien mechanizm (niezmienny w czasie) ustalania się ostatecznej wartości średniej częstości szkód powodujący wystąpienie zależności (związanej z tzw. rozwojem szkód w czasie) między zmiennymi określającymi liczbę szkód w poszczególnych okresach.

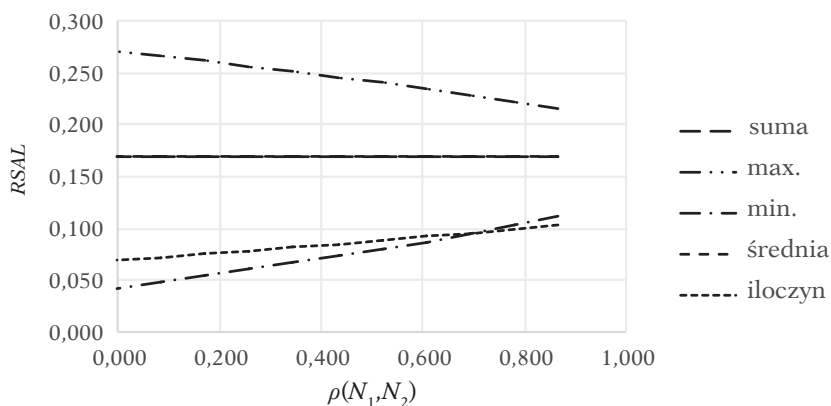
3. Przyjmijmy dalej, że łączeniu podlegają systemy BM $SBM(\mathcal{L}, r_1, \mathcal{A}, N_1)$ i $SBM(\mathcal{L}, r_2, \mathcal{A}, N_2)$. Funkcja $\varphi(\cdot, \cdot)$ jest określona jako suma wartości, wartość największa, najmniejsza, średnia oraz iloczyn. Rozkład wektora zmiennych

losowych (N_1, N_2) jest rozkładem dwuwymiarowym Poissona, gdzie $N_1 = K_1 + K_{12}$, $N_2 = K_2 + K_{12}$ oraz parametry rozkładów zmiennych K_1, K_2, K_{12} spełniają warunki $\lambda_1 + \lambda_{12} = 0,20$, $\lambda_2 + \lambda_{12} = 0,15$. Średnia stacjonarna składka w zależności od korelacji między zmiennymi N_1, N_2 oraz postaci funkcji $\varphi(\dots)$ została przedstawiona na rysunku 1, natomiast na rysunku 2 zaprezentowano stacjonarne wartości *RSAL* dla analizowanych przypadków.



Rysunek 1. Średnia stacjonarna składka w zależności od korelacji między zmiennymi N_1, N_2 oraz funkcji $\varphi(\dots)$

Źródło: opracowanie własne.



Rysunek 2. Stacjonarna wartość *RSAL* w zależności od korelacji między zmiennymi N_1, N_2 oraz funkcji $\varphi(\dots)$ ¹⁷

Źródło: opracowanie własne.

¹⁷ Linie wykresu dla funkcji suma i średnia pokrywają się, co jest bezpośrednią konsekwencją definicji wskaźnika *RSAL*.

Przedstawione na rysunkach 1 i 2 wyniki obliczeń pokazują, że zależność między zmiennymi N_1, N_2 oraz postać funkcji φ mają wpływ na średnią składkę stacjonarną oraz wartości $RSAL$. Oznacza to, że wybierając postać funkcji φ i przyjmując w analizach założenie o niezależności zmiennych losowych N_1, N_2 , zakład ubezpieczeń może zagwarantować sobie pozycję neutralną wobec ryzyka wynikającego z występowania zależności między tymi zmiennymi (w przypadku funkcji suma i średnia), zmniejszyć ekspozycję na ryzyko (w przypadku funkcji maksimum) i zwiększyć ekspozycję (w przypadku funkcji minimum i iloczynu).

4.2. Agregacja systemów BM

W przypadku, gdy ubezpieczenie obejmuje wiele obiektów i składka jest kalkulowana dla różnych obiektów przy wykorzystaniu różnych systemów BM, można łączyć systemy, jak to pokazano w poprzednim podpunkcie. Czasami z różnych względów, np. marketingowych lub na relację z klientem, istnieje potrzeba prezentowania mniej rozbudowanej wersji systemu BM. Można to uzyskać, korzystając z operacji agregacji systemu BM. Łańcuch Markowa wykorzystywany do modelowania zagregowanego systemu BM można traktować jako uogólnienie grupowego łańcucha Markowa¹⁸.

Rozpatrzmy system BM $SBM(\mathcal{L}, r, \Pi(\lambda), N)$. Dokonajmy zupełnego rozłącznego podziału przestrzeni \mathcal{L} na podzbiory $\bar{\mathcal{L}}_0, \bar{\mathcal{L}}_1, \dots, \bar{\mathcal{L}}_q$ takie, że $\mathcal{L} = \bigcup_{j=0}^q \bar{\mathcal{L}}_j$,

$\bar{\mathcal{L}}_i \cap \bar{\mathcal{L}}_j = \emptyset$ dla $i \neq j$, $i, j = 0, 1, 2, \dots, q$. Podział taki pozwala na określenie nowej przestrzeni stanów $\bar{\mathcal{L}} = \{\bar{l}_0, \bar{l}_1, \dots, \bar{l}_q\}$, gdzie $\bar{l}_i \in \bar{\mathcal{L}}_i$.

Macierz $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{(q+1) \times (s+1)}$ nazywamy macierzą agregacji względem podziału

$\bar{\mathcal{L}}_0, \bar{\mathcal{L}}_1, \dots, \bar{\mathcal{L}}_q$ przestrzeni stanów \mathcal{L} wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{gd}y \ l_j \in \bar{\mathcal{L}}_i, \\ 0, & \text{gd}y \ l_j \notin \bar{\mathcal{L}}_i. \end{cases}$$

Macierz \mathbf{A} jest więc macierzą o elementach równych 0 lub 1 z jedną jedynką w każdej kolumnie.

¹⁸ Grupowe łańcuchy Markowa (ang. *grouped Markov chains* lub *lumped Markov chains*) omówiono np. w pracach: J.G. Kemeny, J.L. Snell, op.cit., s. 123–140; M. Iosifescu, op.cit., s. 162–169.

Definicja 4. Zagregowanym systemem BM przy zupełnym i rozłącznym podziale przestrzeni \mathcal{L} na $\bar{\mathcal{L}}$ (przy macierzy agregacji \mathbf{A}) nazywamy system BM

$$SBM(\bar{\mathcal{L}}, \mathbf{r}_A, \mathbf{\Pi}_A(\lambda), N),$$

gdzie $\mathbf{r}_A = \mathbf{r} \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1}$, $\mathbf{\Pi}_A(\lambda) = [\mathbf{A} \text{Diag}[\boldsymbol{\pi}(\lambda)] \mathbf{A}^T]^{-1} [\mathbf{A} \text{Diag}[\boldsymbol{\pi}(\lambda)] \mathbf{\Pi}(\lambda) \mathbf{A}^T]$,

$$\text{Diag}[\boldsymbol{\pi}(\lambda)] = [d_{ij}]_{(s+1) \times (s+1)}, \text{ gdzie } d_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{gdzie } i \neq j, \\ \pi_i(\lambda), & \text{gdzie } i = j. \end{cases}$$

Macierz $[\mathbf{A} \text{Diag}[\boldsymbol{\pi}(\lambda)] \mathbf{A}^T]^{-1}$ istnieje, gdy elementy wektora $\boldsymbol{\pi}(\lambda)$ są dodatnie. W zagregowanym systemie BM rozkład stacjonarny jest równy

$$\boldsymbol{\pi}_A(\lambda) = \boldsymbol{\pi}(\lambda) \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1}. \tag{7}$$

Średnia składka stacjonarna dla zagregowanego systemu BM jest równa

$$\bar{r}_A = \mathbf{r}_A \boldsymbol{\pi}_A(\lambda).$$

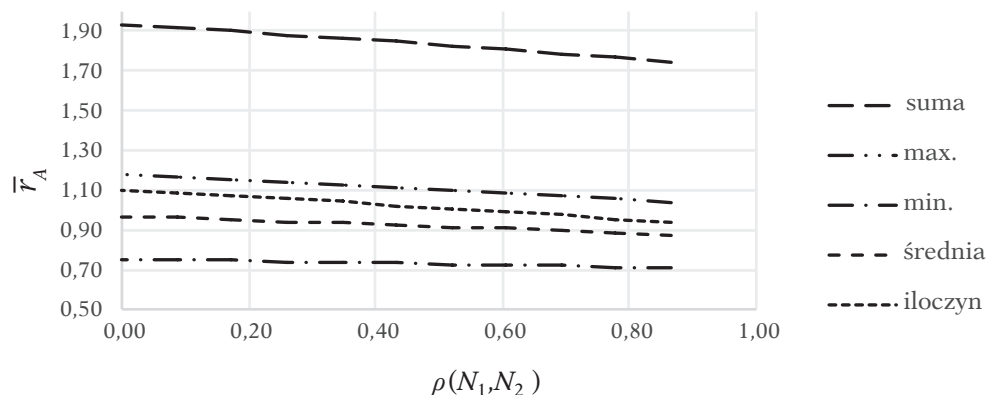
Natomiast wskaźnik *RSAL* stacjonarny jest postaci

$$RSAL = \frac{\bar{r}_A - \min\{r_{A_0}, \dots, r_{A_q}\}}{\max\{r_{A_0}, \dots, r_{A_q}\} - \min\{r_{A_0}, \dots, r_{A_q}\}}.$$

Przykład 4. Rozpatrzmy złączenia systemów BM opisanych w punkcie 3 przykładu 3, czyli $SBM(\mathcal{L}_1 \odot \mathcal{L}_2, \mathbf{r}_1 \Phi(\varphi) \mathbf{r}_2, \mathcal{A}_1 \odot \mathcal{A}_2, (N_1, N_2))$, gdzie wektor losowy (N_1, N_2) ma dwuwymiarowy rozkład Poissona. Otrzymany system jest systemem o 36 stanach. Dokonajmy agregacji tego systemu w taki sposób, aby do jednego zagregowanego stanu należały te stany, dla których elementy wektora mnożników składek są równe przyłączeniu otrzymanym przy funkcji φ maksimum. $SBM(\bar{\mathcal{L}}, \mathbf{r}_A, \mathbf{\Pi}_A(\lambda), N)$ jest w tym przypadku systemem o 7 stanach. Średnia stacjonarna składka w zależności od korelacji między zmiennymi N_1, N_2 oraz postaci funkcji $\varphi(\dots)$ wykorzystywanej do łączenia systemów BM przy stałej macierzy agregacji została przedstawiona na rysunku 3, natomiast na rysunku 4 zaprezentowano stacjonarne wartości *RSAL* dla rozpatrywanych przypadków.

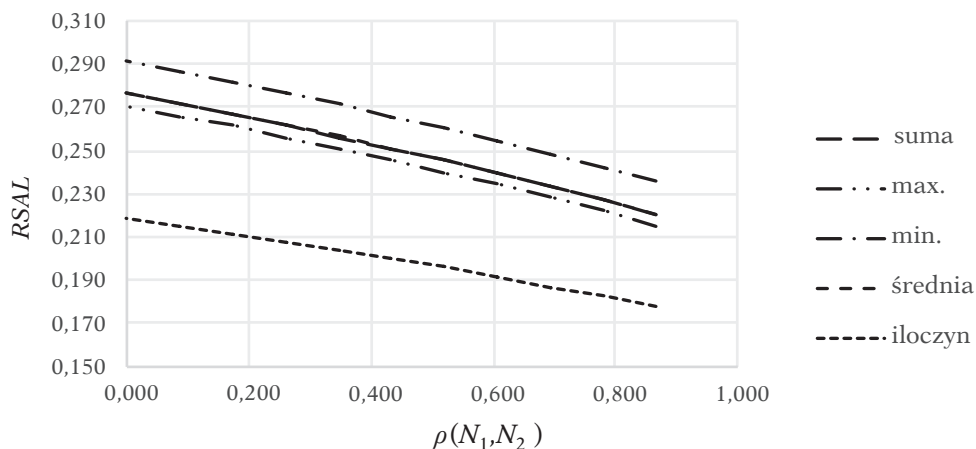
Wyniki obliczeń przedstawione na rysunkach 3 i 4 pokazują, że wzrost siły zależności między zmiennymi N_1, N_2 mierzonej współczynnikiem korelacji wpływa

na zmniejszanie się średniej składki stacjonarnej oraz wartości współczynnika $RSAL$, co powinno być uwzględniane przez ubezpieczycieli przy ocenie ryzyka.



Rysunek 3. Średnia stacjonarna składka dla zagregowanego systemu BM w zależności od korelacji między zmiennymi N_1, N_2 oraz funkcji $\varphi(.,.)$

Źródło: opracowanie własne.



Rysunek 4. Stacjonarna wartość $RSAL$ dla zagregowanego systemu BM w zależności od korelacji między zmiennymi N_1, N_2 oraz funkcji $\varphi(.,.)$ ¹⁹

Źródło: opracowanie własne.

¹⁹ Linie wykresu dla funkcji suma i średnia pokrywają się, co jest bezpośrednią konsekwencją definicji wskaźnika $RSAL$.

Często konieczna jest analiza systemów BM w krótszym okresie, zanim łańcuch Markowa osiągnie stan zbliżony do stanu stacjonarnego. O ile przy łączeniu systemów BM, przy założeniu niezmienności w czasie parametrów rozkładów liczby szkód, otrzymuje się jednorodny łańcuch Markowa, o tyle przy agregacji taka sytuacja nie ma miejsca. Konieczne jest więc określanie macierzy przejścia dla każdego okresu $[t-1, t)$, o numerze okresu $t = 1, \dots, \tau$ poprzedzającego moment analizy τ .

Definicja 5. Zagregowanym w momencie t systemem BM przy zupełnym i rozłącznym podziale przestrzeni \mathcal{L} na $\bar{\mathcal{L}}$ (przy macierzy agregacji \mathbf{A}) nazywamy system BM

$$SBM(\bar{\mathcal{L}}, \mathbf{r}_A, \Pi_{A_t}(\lambda), N),$$

gdzie $\mathbf{r}_A = \mathbf{r} \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1}$,

$$\Pi_{A_t}(\lambda) = [\mathbf{A} \text{Diag}[\boldsymbol{\pi}_{t-1}(\lambda)] \mathbf{A}^T]^{-1} [\mathbf{A} \text{Diag}[\boldsymbol{\pi}_{t-1}(\lambda)] \Pi(\lambda) \mathbf{A}^T],$$

$$\text{Diag}[\boldsymbol{\pi}_{t-1}(\lambda)] = [d_{ij}]_{(s+1) \times (s+1)}, \text{ gdzie } d_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{gdy } i \neq j, \\ \pi_{(t-1)i}(\lambda), & \text{gdy } i = j. \end{cases}$$

Macierz $[\mathbf{A} \text{Diag}[\boldsymbol{\pi}_{t-1}(\lambda)] \mathbf{A}^T] = [\tilde{d}_{ij}]_{(q+1) \times (q+1)}$ jest macierzą diagonalną o elementach nieujemnych.

Macierz $[\mathbf{A} \text{Diag}[\boldsymbol{\pi}_{t-1}(\lambda)] \mathbf{A}^T]^{-1} = [\mathbf{A} \text{Diag}[\boldsymbol{\pi}_{t-1}(\lambda)] \mathbf{A}^T]^{-1}$, gdy $\tilde{d}_{ii} > 0$, dla

$i = 0, 1, \dots, q$ albo jest równa macierzy diagonalnej o elementach równych $1/\tilde{d}_{ii}$, gdy $\tilde{d}_{ii} > 0$ i pozostałych elementach równych 0.

W zagregowanym w momencie t systemie BM rozkład według stanów określa wektor prawdopodobieństw postaci

$$\boldsymbol{\pi}_{A_t}(\lambda) = \boldsymbol{\pi}_{A_{(t-1)}}(\lambda) \Pi_{A_t}(\lambda). \quad (8)$$

Średnia składka bieżąca w momencie t dla zagregowanego systemu BM jest równa

$$\bar{r}_{A_t} = \mathbf{r}_A \boldsymbol{\pi}_{A_t}(\lambda).$$

Natomiast wskaźnik *RSAL* bieżący w momencie t jest zdefiniowany jako

$$RSAL_t = \frac{\bar{r}_{A_t} - \min\{r_{A_0}, \dots, r_{A_q}\}}{\max\{r_{A_0}, \dots, r_{A_q}\} - \min\{r_{A_0}, \dots, r_{A_q}\}}.$$

Przykład 5. Rozpatrzmy zagadnienie agregacji systemu BM z punktu 3 przykładu 3, czyli $SBM(\mathcal{L}_1 \odot \mathcal{L}_2, r_1 \Phi(\varphi) r_2, \mathcal{A}_1 \odot \mathcal{A}_2, (N_1, N_2))$, gdzie wektor losowy (N_1, N_2) ma dwuwymiarowy rozkład Poissona (por. punkt 5 w tabeli 7) taki, że $N_1 = K_1 + K_{12}$, $N_2 = K_{12}$, gdzie K_1, K_{12} są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach odpowiednio $Poiss(0,05)$ i $Poiss(0,15)$. Przyjmijmy dodatkowo, że macierz agregacji jest ustalona tak jak w przykładzie 4. Średnią składkę bieżącą \bar{r}_{A_t} oraz wartość $RSAL_t$ w momencie $t=1, \dots, 15$ dla zagregowanego systemu BM przedstawiono odpowiednio na rysunkach 5 i 6.

Po agregacji otrzymujemy, że

$$\pi_{A_0}(\lambda) = [0, 0, 1, 0, 0, 0, 0], \quad r_A = [0,5, 0,75, 1,0, 1,5, 2,0, 2,5, 3,0]$$

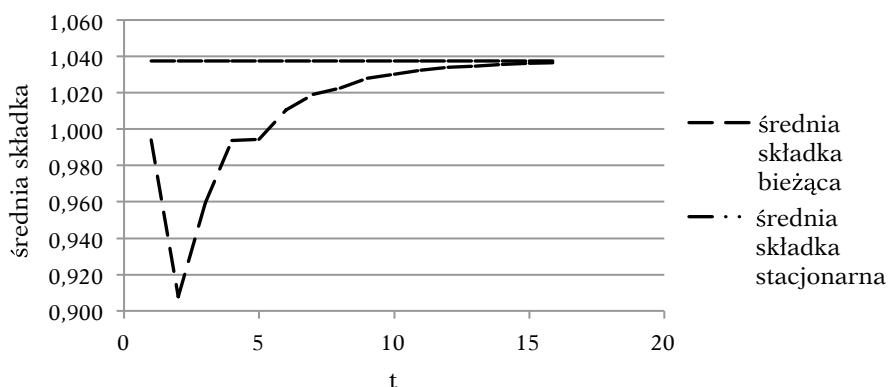
oraz np.

$$\Pi_{A_1}(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,819 & 0 & 0 & 0,164 & 0 & 0,018 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\pi_{A_1}(\lambda) = [0, 0,819, 0, 0, 0,164, 0, 0,018],$$

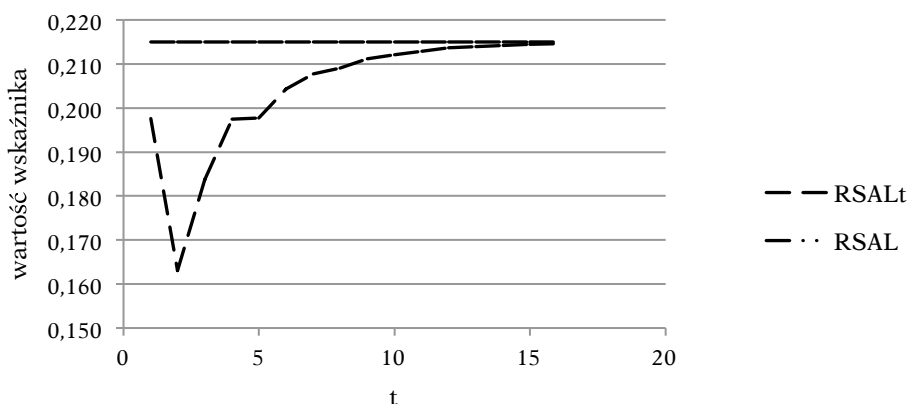
$$\Pi_{A_{10}}(\lambda) = \begin{bmatrix} 0,819 & 0 & 0 & 0,164 & 0 & 0 & 0 \\ 0,819 & 0 & 0 & 0,164 & 0 & 0 & 0 \\ 0,757 & 0,062 & 0 & 0 & 0,164 & 0 & 0,018 \\ 0 & 0 & 0,819 & 0 & 0 & 0,164 & 0,819 \\ 0 & 0 & 0 & 0,819 & 0 & 0 & 0,819 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,819 & 0 & 0,819 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,819 & 0,819 \end{bmatrix},$$

$$\pi_{A_{10}}(\lambda) = [0,555, 0,008, 0,119, 0,146, 0,075, 0,061, 0,035].$$



Rysunek 5. Średnia składka bieżąca \bar{r}_{A_t} i stacjonarna \bar{r}_A dla zagregowanego systemu BM

Źródło: opracowanie własne.



Rysunek 6. Wartość $RSAL_t$ oraz $RSAL$ dla zagregowanego systemu BM

Źródło: opracowanie własne.

Definicja 6. Mówimy, że podział przestrzeni \mathcal{L} na podzbiory $\bar{\mathcal{L}}_1, \bar{\mathcal{L}}_2, \dots, \bar{\mathcal{L}}_r$ generuje przejścia między stanami jednorodnie względem wektora mnożników składki²⁰ (agregacja systemów BM jest jednorodna względem wektora mnożników

²⁰ Analogiczne pojęcie przejść jednorodnych względem wypłat zostało zdefiniowane w referacie: W. Bijak, M. Dędyś, *Agregacja przestrzeni stanów łańcuchów Markowa w ubezpieczeniach na życie wielu osób*, Ogólnopolska Konferencja Aktuariałna w Warszawie 15–17 czerwca 2011 r., http://coin.wne.uw.edu.pl/ka2011/prezentacje/bijak_dedys.pdf (dostęp: 04.02.2015).

składki) wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $i, j, i = 0, 1, 2, \dots, q, j = 0, 1, 2, \dots, s$, jeżeli $a_{ij} = 1$, to $r_{Ai} = r_j$.

Jeżeli system BM powstał w wyniku złączenia dwóch systemów BM, to agregację jednorodną względem wektora mnożników składki możemy traktować jako operację odwrotną do złączenia. Na rysunkach 1 i 3 linie obrazujące średnie stacjonarne składki odpowiadające funkcji $\varphi(\dots)$ maksimum pokrywają się, gdyż agregacja systemu BM w przykładzie 4 jest jednorodna względem wektora mnożników składki.

5. Podsumowanie

Wprowadzone w poprzednich punktach niniejszej pracy działania na ubezpieczeniach, polegające na łączeniu i agregacji systemów BM taryfikacji *a posteriori*, pozwalają na rozszerzenie tych systemów na złożone struktury obiektów pod względem liczby obiektów oraz zależności między nimi. Są one dogodnym narzędziem do analizy i projektowania ubezpieczeń dla małych grup obiektów, małych flot pojazdów, pojazdów użytkowanych wspólnie przez kilka osób. Jak pokazują dane UFG (por. tabele 1 i 2), takich przypadków jest stosunkowo dużo w ubezpieczeniach komunikacyjnych OC p.p.m. i AC. Praktyka funkcjonowania polskiego rynku ubezpieczeń komunikacyjnych pokazuje, że zakłady ubezpieczeń w procesie taryfikacji wykorzystują dane o wieloletniej historii ubezpieczanych podmiotów. Jednocześnie jednak w systemach BM wykorzystywanych przez te zakłady jest uwzględniana tylko historia ubezpieczenia odnosząca się do ostatniego okresu (roku). Zaproponowane w pracy działania łączenia i agregacji pozwalają na rozciągnięcie tego okresu na więcej lat. Umożliwiają one również na uwzględnianie w systemach BM różnych klas szkód.

Łączenie i agregacja systemów BM umożliwiają elastyczne kształtowanie produktów przez odpowiednio dobraną funkcję φ oraz strukturę zależności między istotnymi w kontekście systemów BM zmiennymi losowymi. W pracy zaproponowano wykorzystanie takich funkcji φ jak suma, maksimum, minimum, średnia, iloczyn oraz struktur zależności wynikających z przyjęcia wielowymiarowych rozkładów Poissona i wielowymiarowych uogólnionych rozkładów Poissona. Oczywiście do wykorzystania są również inne funkcje φ oraz inne sposoby modelowania zależności między zmiennymi losowymi (np. przy wykorzystaniu funkcji kopula). Łączeniu i agregacji mogą podlegać różne systemy BM, tzn. systemy o różnej liczbie stanów, różnych regułach przejścia i wektorach

mnożników składek. Podobnie jak w przypadku ubezpieczeń na życie wielu osób, można się pokusić o definiowanie różnych odpowiedników statusów zarówno symetrycznych, jak i niesymetrycznych. Za użytecznością zaproponowanych narzędzi przemawia również łatwość ich zastosowania w praktyce działania zakładów ubezpieczeń.

Poza zakresem niniejszej pracy pozostało wiele interesujących zagadnień, takich jak np. analiza problemu łaknienia zniżek w grupie osób objętych jednym ubezpieczeniem, określenie sposobów pomiaru efektywności złączonych lub zagregowanych systemów BM, wyznaczania dla tych systemów wektorów mnożników składek.

Bibliografia

- Angers J.F., Desjardins D., Dionne G., Guertin F., *Vehicle and Fleet Random Effects in a Model of Insurance Rating for Fleets of Vehicles*, „ASTIN Bulletin” 2006, vol. 36, no. 1, s. 25–77.
- Bijak W., *Ubezpieczenia na życie jako niejednorodne łańcuchy Markowa*, „Prace Naukowe” Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu, nr 312, Wrocław 2013, s. 9–28.
- Denuit M., Maréchal X., Pitrebois S., Walhin J., *Actuarial Modelling of Claim Counts: Risk Classification, Credibility and Bonus-Malus Systems*, John Wiley & Sons Ltd, Chichester 2007.
- Desjardins D., Dionne G., Pinquet J., *Experience Rating Schemes for Fleets of Vehicles*, „ASTIN Bulletin” 2001, vol. 31, no. 1, s. 81–105.
- Gala K., *Analiza ubezpieczeń dla wielu osób z wykorzystaniem funkcji copula*, „Prace Naukowe” Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu, nr 312, Wrocław 2013, s. 50–66.
- Iosifescu M., *Skończone procesy Markowa i ich zastosowania*, PWN, Warszawa 1988.
- Johnson N.L., Kotz S., Balakrishnan N., *Discrete Multivariate Distributions*, J. Wiley & Sons Inc., New York 1995.
- Kemeny J.G., Snell J.L., *Finite Markov Chains*, Springer-Verlag, New York–Berlin–Heidelberg–Tokyo 1976.
- Lemaire J., *Bonus-Malus Systems in Automobile Insurance*, Kluwer Academic Publishers, Boston 1995.
- Rolski T., Schmidli H., Schmidt V., Teugels J., *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, John Wiley & Sons Inc., New York 1999.
- Vernic R., *A Multivariate Generalization of the Generalized Poisson Distribution*, „ASTIN Bulletin” 2000, vol. 30, no. 1, s. 57–67.

Źródła sieciowe

Bijak W., Dędyś M., *Agregacja przestrzeni stanów łańcuchów Markowa w ubezpieczeniach na życie wielu osób*, Ogólnopolska Konferencja Aktuariałna w Warszawie 15–17 czerwca 2011 r., http://coin.wne.uw.edu.pl/ka2011/prezentacje/bijak_dedys.pdf (dostęp: 04.02.2015).

* * *

Merging and aggregation of bonus-malus systems in automobile insurance

Summary

The common practice in automobile insurance (third party liability and comprehensive coverage) is to apply bonus-malus (BM) systems in tariff building. The premium for the insured is defined, among others, on the basis of their claim history. In order to describe BM systems, it is common to use Markov chains, constructed for a single insured person. This work presents a concept of using operations on BM systems to design insurance products for multiple individuals or insurance products where risk is associated with multiple individuals or vehicles. Two operations are presented: merging and aggregation of BM systems. Merging helps to develop an insurance that would cover ever more numerous groups of insured persons or exposure units whereas aggregation helps to treat a particular group as a separate exposure entity (status) exposed to risk in the context of insurance.

Insurance with time measured in a discrete way is considered here. An assumption was made that in the case of insurance covering multiple individuals or vehicles, the considered random variables which determine the number of losses are either stochastically independent or have a multivariate Poisson distribution or a multivariate generalised Poisson distribution.

Keywords: automobile insurance, bonus-malus systems, merging, aggregation, Markov chains, multivariate Poisson distribution, multivariate generalised Poisson distribution