Elżbieta Krajewska

Wydział Fizyki Technicznej, Informatyki i Matematyki Stosowanej
Politechnika Łódzka

Immunizacja ryzyka stopy procentowej ubezpieczycieli życiowych[1]

Streszczenie

W pracy zostanie przedstawiona nierówność immunizacyjna dla losowych strumieni aktywów i zobowiązań oraz struktury stóp procentowych. Zostaną zaprezentowane wyniki dotyczące porównania tej nierówności z innymi nierównościami immunizacyjnymi oraz jej zastosowań w pewnych modelach stóp procentowych. W przypadku składek netto oszacowanie oczekiwanych zmian nadwyżki portfela wynikające z tej nierówności jest iloczynem dwóch czynników, z których jeden zależy wyłącznie od zmian stóp procentowych, drugi zaś od struktury portfela. Drugi czynnik może być zatem traktowany jako miara ryzyka stóp procentowych. W pracy zostaną podane wzory pozwalające w prosty sposób obliczać wartości tej miary dla portfeli złożonych z popularnych produktów ubezpieczeń życiowych, m.in. terminowego ubezpieczenia na życie lub dożycie, odroczonego terminowego ubezpieczenia na życie oraz renty terminowej.

Słowa kluczowe: immunizacja, ryzyko stopy procentowej, ubezpieczenia życiowe

1. Wstęp

Immunizacja, czyli uodpornienie portfela na zmiany stóp procentowych, jest istotnym zagadnieniem w działalności różnych instytucji finansowych. Pierwsze prace dotyczące immunizacji napisali m.in. F. Macaulay[2], który wprowadził używane do dziś pojęcie czasu trwania instrumentu finansowego (ang. *duration*),

[1] Autorka tekstu chciałaby podziękować Panu Profesorowi Lesławowi Gajkowi za cenne uwagi dotyczące badanej tematyki.

[2] F.R. Macaulay, *Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields, and Stock Prices in the U.S. Since 1856*, National Bureau of Economic Research, New York 1938.

P. Samuelson[3], który analizował ryzyko stopy procentowej w sektorze bankowym, oraz F. Redington[4], który badał zagadnienie immunizacji w działalności ubezpieczycieli.

Ważną pracą w kontekście ogólnej teorii immunizacji jest artykuł G. Fonga i O. Vasicka[5]. Podano w nim dolne ograniczenie dla ΔV_H, tj. zmiany wartości bieżącej portfela inwestycyjnego w chwili H, przy założeniu, że czas trwania aktywów i czas trwania zobowiązań jest taki sam. Ograniczenie to było iloczynem M^2 aktywów oraz czynnika zależnego od zmian w czasie intensywności stóp procentowych. Jeżeli $M^2 \neq 0$, to podejście G. Fonga i O. Vasicka dopuszcza scenariusze, w których wielkość ΔV_H jest ujemna na skutek zaburzeń stóp procentowych. Doskonała immunizacja jest natomiast osiągana dla równoległych przesunięć intensywności oprocentowania[6].

W podejściu S.K. Nawalkhi i D.R. Chambersa[7] nie musi zachodzić równość czasów trwania aktywów i zobowiązań, przez co ich model wydaje się ogólniejszy. Jako miara ryzyka stopy procentowej została zaproponowana wielkość *M*-Absolute. Wyprowadzono oszacowanie dla ΔV_H, będące iloczynem *M*-Absolute i wielkości zależnej od zaburzeń stóp procentowych. Modele G. Fonga i O. Vasicka oraz S.K. Nawalkhi i D.R. Chambersa można stosować jedynie w sytuacji, gdy występuje pojedyncze zobowiązanie. Autorów tych interesowała stabilizacja wyniku inwestycji, który można traktować jako zobowiązanie[8].

Immunizacja strumienia zobowiązań była badana m.in. przez L. Gajka i innych[9]. Wyprowadzili oni nierówność immunizacyjną na podstawie nierówności

---

3 P.A. Samuelson, *The Effect of Interest Rate Increases on the Banking System*, „American Economic Review" 1945, vol. 55, s. 16–27.

4 F.M. Redington, *Review of principles of life-office valuations*, „Journal of the Institute of Actuaries" 1952, vol. 78, s. 286–315.

5 G. Fong, O. Vasicek, *A Risk Minimization Strategy for Portfolio Immunization*, „Journal of Finance" 1984, vol. 39, s. 1541–1546.

6 Przez doskonałą immunizację rozumiemy tu sytuację, gdy zmiany stóp procentowych nie powodują, że ΔV_H jest ujemna. Zob. także: *Financial Economics: With Applications to Investments, Insurance and Pensions*, red. H.H. Panjer, The Actuarial Foundation, Schamburg 1998; L. Fisher, R.L. Weil, *Copying with the Risk of Interest Rate Fluctuations: Return to Bondholders from Naive and Optimal Strategies*, „Journal of Business" 1971, vol. 44, s. 410–431.

7 S.K. Nawalkha, D.R. Chambers, *An Improved Immunization Strategy: M-absolute*, „Financial Analysts Journal" 1996, September–October, s. 69–76.

8 W pewnej klasie nielosowych zaburzeń stóp procentowych immunizacja wielu zobowiązań jest równoważna immunizacji tych zobowiązań oddzielnie. Zob. E.S.W. Shiu, *Immunization of multiple liabilities*, „Insurance: Mathematics and Economics" 1988, vol. 7, s. 219–224.

9 L. Gajek, K. Ostaszewski, H.-J. Zwiesler, *A Primer on Duration, Convexity and Immunization*, „Journal of Actuarial Practice" 2005, vol. 12, s. 59–82.

Cauchy'ego–Schwarza. Nierówność podana w pracy L. Gajka i E. Krajewskiej[10] jest wzmocnieniem oraz uogólnieniem ich wyniku na przypadek, gdy stopy procentowe, aktywa i zobowiązania są losowe.

Wprowadźmy następujące oznaczenia: niech $\{A_1,\ldots,A_n\}$ oraz $\{L_1,\ldots,L_n\}$ oznaczają strumienie płatności odpowiednio z aktywów i zobowiązań, zapadających w chwilach $0 < t_1 < \ldots < t_n$. Zakładamy, że w chwili $t = H$ wartość bieżąca $s_{j,H}$ nadwyżki $S_j = A_j - L_j$ jest obliczana przy użyciu funkcji dyskontującej, odpowiadającej bazowej strukturze stóp procentowych (TSIR). Dla dowolnego $j \in \{1,\ldots,n\}$ niech v_j oznacza wartość obecną w chwili $t = 0$ jednostki pieniężnej płatnej w chwili t_j obliczoną przy TSIR. Wtedy $s_{j,H} = a_{j,H} - l_{j,H}$, gdzie $a_{j,H} = A_j \frac{v_j}{v_H}$ oraz $l_{j,H} = L_j \frac{v_j}{v_H}$. Wartość bieżąca V_H portfela w chwili H jest dana wzorem

$$V_H = \sum_{j=1}^{n} s_{j,H}.$$

Interesuje nas to, w jakim stopniu powyższa wielkość może ulec zmianie na skutek zmian TSIR. Niech v'_j, dla $j \in \{1,\ldots,n\}$, oznacza wartość obecną w chwili $t = 0$ jednostki pieniężnej płatnej w chwili t_j obliczoną przy zaburzonej strukturze stóp procentowych. Wtedy $s'_{j,H} = S_j \frac{v'_j}{v'_H}$ oznacza bieżącą wartość nadwyżki S_j w chwili $t = H$ przy zaburzonej strukturze stóp procentowych oraz

$$\Delta V_H = \sum_{j=1}^{n} s_{j,H} \cdot f_{j,H}, \tag{1}$$

gdzie $f_{j,H} = \frac{v_H}{v'_H}\frac{v'_j}{v_j} - 1$ dla każdego $j \in \{1,\ldots,n\}$. Ponieważ ΔV_H jest zmienną losową, można szukać dolnego ograniczenia dla jej wartości oczekiwanej. W pracy przyjmujemy techniczne założenie, że dla dowolnego $j \in \{1,\ldots,n\}$, $f_{j,H}$, A_j oraz L_j są zmiennymi losowymi określonymi na przestrzeni probabilistycznej (Ω, F, P) oraz mają skończone drugie momenty, co nie ma istotnego wpływu na możliwość stosowania modelu w praktyce.

[10] L. Gajek, E. Krajewska, *A new immunization inequality for random streams of assets, liabilities and interest rates*, „Insurance: Mathematics and Economics" 2013, vol. 53, s. 624–631.

W pracy L. Gajka i E. Krajewskiej[11] została udowodniona następująca średniokwadratowa nierówność immunizacyjna

$$E\Delta V_H \geq \frac{1}{n} EV_H \cdot \sum_{j=1}^{n} Ef_{j,H} - L^2\left(\mathbf{s_H}\right) L^2\left(\mathbf{f_H}\right), \tag{2}$$

gdzie $\mathbf{s_H} = \left(s_{1,H},\ldots,s_{n,H}\right)$, $\mathbf{f_H} = \left(f_{1,H},\ldots,f_{n,H}\right)$ oraz

$$L^2\left(\mathbf{y}\right) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} E\left(y_j - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Ey_j\right)^2} \text{ dla } \mathbf{y} = \left(y_1,\ldots,y_n\right). \tag{3}$$

W przeciwieństwie do modeli G. Fonga i O. Vasicka oraz S.K. Nawalkhi i D.R. Chambersa, zmiany stóp procentowych są tu mierzone jedynie w momentach zapadalności wpływów i wypływów z portfela. W konsekwencji wpływ krótkoterminowych zaburzeń w TSIR jest zredukowany.

Nierówność (2) może być przydatnym narzędziem w zarządzaniu ryzykiem stopy procentowej. W kolejnych punktach niniejszego artykułu podano wzory, które pozwalają efektywnie ją stosować. W punkcie drugim podano wzory[12] na miarę $L^2\left(\mathbf{f_H}\right)$ w trzech modelach stóp procentowych: R.C. Mertona, O. Vasicka i logarytmicznie normalnym. Wyniki uzyskane w pracy dotyczą obliczania miary $L^2\left(\mathbf{s_H}\right)$. W kolejnym punkcie wyprowadzono wzór na $L^2\left(\mathbf{s_H}\right)$ dla produktów ubezpieczeń życiowych oraz podano szczególne postacie nierówności średniokwadratowej dla niektórych z nich.

2. Średniokwadratowa nierówność immunizacyjna

Ryzyko stopy procentowej portfela aktywów i zobowiązań ma dwa źródła. Pierwszym z nich jest ryzyko związane ze zmiennością stóp procentowych, na które zarządzający portfelem na ogół nie mają wpływu. Drugie zaś to ryzyko związane ze strukturą portfela, które można kontrolować. Koncepcja faktorialnego szacowania wielkości ΔV_H, stosowana już m.in. przez G. Fonga i O. Vasicka[13], S.K. Nawalkhę i D.R. Chambersa[14], a także L. Gajka, K. Ostaszewskiego

11 Ibidem.
12 Podane wzory zostały wyprowadzone w: ibidem.
13 G. Fong, O. Vasicek, op.cit.
14 S.K. Nawalkha, D.R. Chambers, op.cit.

i H.-J. Zwieslera[15], pozwala powiązać te dwa rodzaje ryzyka ze sobą tak, by móc kontrolować jedno niezależnie od wielkości drugiego. Istotą jest podanie dolnego ograniczenia dla ΔV_H, w którym wyodrębnione są czynniki ryzyka stopy procentowej portfela – zależny wyłącznie od zmian stóp procentowych i zależny wyłącznie od struktury portfela. Dzięki temu zamiast bezpośredniej immunizacji ΔV_H można rozważać maksymalizację jej dolnego oszacowania względem struktury portfela. Poniżej podano nową nierówność immunizacyjną, która umożliwia takie podejście do problemu ryzyka stopy procentowej.

Zauważmy, że

$$\Delta V_H = V'_H - V_H = \sum_{j=1}^{n} s'_{j,H} - \sum_{j=1}^{n} s_{j,H} = \sum_{j=1}^{n} s_{j,H} \cdot f_{j,H}, \tag{4}$$

gdzie $f_{j,H} = \dfrac{v_H}{v'_H}\dfrac{v'_j}{v_j} - 1$ dla każdego $j \in \{1,\ldots,n\}$. W poniższym twierdzeniu podane zostało dolne ograniczenie wielkości $E\Delta V_H$.

Twierdzenie 2.1. Oznaczmy $\mathbf{s_H} = (s_{1,H},\ldots,s_{n,H})$ oraz $\mathbf{f_H} = (f_{1,H},\ldots,f_{n,H})$. Zachodzi nierówność

$$E\Delta V_H \geq \frac{1}{n} EV_H \cdot \sum_{j=1}^{n} Ef_{j,H} - L^2(\mathbf{s_H}) L^2(\mathbf{f_H}), \tag{5}$$

gdzie $L^2(\mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} E\left(y_j - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Ey_j\right)^2}$ dla $\mathbf{y} = (y_1,\ldots,y_n)$.

Dowód można znaleźć w pracy L. Gajka i E. Krajewskiej[16].

Porównanie nierówności (5) z nierównościami G. Fonga i O. Vasicka, S.K. Nawalkhi i D.R. Chambersa oraz L. Gajka, K. Ostaszewskiego i H.-J. Zwieslera można znaleźć w pracy L. Gajka i E. Krajewskiej[17].

W celu uproszczenia zapisu w dalszej części będziemy pomijać indeks H i, o ile nie będzie powiedziane inaczej, zakładamy, że $H = 0$.

Podamy teraz postać miary $L^2(\mathbf{f})$ w trzech znanych modelach stóp procentowych:

---

15 L. Gajek, K. Ostaszewski, H.-J. Zwiesler, op.cit.

16 L. Gajek, E. Krajewska, op.cit.

17 Ibidem.

1. Model Mertona

Niech i_0, a, σ będą liczbami dodatnimi, W_t zaś oznacza standardowy proces Wienera. Załóżmy, że bieżąca intensywność oprocentowania $i'(t)$, $t \in [0,T]$ jest dana wzorem

$$i'(t) = i_0 + at + \sigma W_t \,. \tag{6}$$

Powyższy model został wprowadzony przez R.C. Mertona[18].

Załóżmy, że intensywność oprocentowania po zaburzeniach stóp procentowych jest dana wzorem (6). Wówczas

$$L^2(\mathbf{f}) = \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\exp\left(-2i_0 t_j - a t_j^2 + \frac{2}{3}\sigma^2 t_j^3 \right)}{v_j^2} - \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\exp\left(-i_0 t_j - \frac{1}{2} a t_j^2 + \frac{1}{6}\sigma^2 t_j^3 \right)}{v_j} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} . \tag{7}$$

Dowód można znaleźć w pracy L. Gajka i E. Krajewskiej[19].

2. Model Vasicka

Niech a, b, σ będą liczbami dodatnimi, W_t zaś oznacza standardowy proces Wienera. Załóżmy, że bieżąca intensywność oprocentowania $i'(t)$, $t \in [0,T]$ jest silnym rozwiązaniem stochastycznego równania różniczkowego

$$di'(t) = \left(a - b i'(t)\right) dt + \sigma dW_t \,. \tag{8}$$

[18] R.C. Merton, *Theory of rational option pricing*, „The Bell Journal Economics and Management Science" 1973, vol. 4, s. 141–183. Więcej szczegółów na temat modelu R.C. Mertona oraz jego zastosowań w finansach i ubezpieczeniach można znaleźć w książce: M. Musiela, M. Rutkowski, *Martingale Methods in Financial Modelling*, Springer, Heidelberg 2007.

[19] L. Gajek, E. Krajewska, op.cit.

Model ten został zaproponowany przez O. Vasicka[20].

Załóżmy, że intensywność oprocentowania po zaburzeniach stóp procentowych jest silnym rozwiązaniem równania (8). Wówczas

$$L^2(\mathbf{f}) = \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\exp\left(-2n(0,t_j)\left(i'(0)-\frac{a}{b}\right) - 2\frac{a}{b}t_j + 2\sigma^2 \int_0^{t_j} n^2(u,t_j)\,du \right)}{v_j^2} \right.$$

$$\left. - \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\exp\left(-n(0,t_j)\left(i'(0)-\frac{a}{b}\right) - \frac{a}{b}t_j + \frac{\sigma^2}{2} \int_0^{t_j} n^2(u,t_j)\,du \right)}{v_j} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (9)$$

gdzie $n(u,t) = \left[1 - \exp(-b(t-u))\right]/b$. Dowód można znaleźć w pracy L. Gajka i E. Krajewskiej[21].

3. Model logarytmicznie normalny

Niech zaburzone stopy procentowe $r'_1, \ldots, r'_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi. Załóżmy, że dla każdego $k = 1, \ldots, n$ zmienna losowa $1 + r'_k$ ma rozkład logarytmicznie normalny z parametrami skali i kształtu odpowiednio μ_k i σ_k, tzn. jej funkcja gęstości jest dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{1}{x\sigma_k\sqrt{2\pi}} \exp\left(\dfrac{-(\ln x - \mu_k)^2}{2\sigma_k^2} \right), & x > 0. \end{cases}$$

Dla rozkładu zadanego powyższą funkcją gęstości wartość oczekiwana wynosi $\exp\left(\mu_k + \frac{\sigma_k^2}{2}\right)$, wariancja zaś $\left(\exp(\sigma_k^2) - 1\right)\exp(2\mu_k + \sigma_k^2)$.

---

[20] O. Vasicek, *An equilibrium characterization of the term structure*, „Journal of Financial Economics" 1977, vol. 5, s. 177–188.

[21] L. Gajek, E. Krajewska, op.cit.

Jeżeli po zaburzeniach TSIR stopy procentowe spełniają założenia modelu logarytmicznie normalnego, to

$$L^2\left(\mathbf{f}\right)=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{v_j^2}\prod_{k=1}^{j}\exp\left(2\left(\sigma_k^2-\mu_k\right)\right)-\frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{v_j}\prod_{k=1}^{j}\exp\left(\frac{1}{2}\sigma_k^2-\mu_k\right)\right)^2}\ . \tag{10}$$

Dowód można znaleźć w pracy L. Gajka i E. Krajewskiej[22].

3. Przykłady zastosowania w przypadku produktów ubezpieczeń życiowych

W tym rozdziale zostaną podane zastosowania twierdzenia 2.1 w przypadku wybranych produktów ubezpieczeń życiowych. Wykorzystamy następujące oznaczenia[23]:

- x oznacza wiek osoby ubezpieczanej w chwili zawierania umowy;
- K oznacza liczbę pełnych lat życia pozostałych ubezpieczonemu;
- ${}_tp_x$ oznacza prawdopodobieństwo, że osoba w wieku x przeżyje t lat;
- ${}_tq_x$ oznacza prawdopodobieństwo, że osoba w wieku x umrze w ciągu t lat.

Będziemy rozważać ubezpieczenia terminowe na okres n lat. Niech $t_j = j-1$ dla $j\in\left\{1,\ldots,n+1\right\}$ oraz:

- $\Pi_j \geq 0$ oznacza składkę wpłacaną przez ubezpieczonego w momencie t_j dla każdego $j=1,\ldots,n$, o ile dożył on do tego momentu oraz $\Pi_{n+1}=0$;
- $B_j \geq 0$ oznacza świadczenie wypłacane w chwili t_j dla każdego $j=2,\ldots,n+1$, jeżeli ubezpieczony umarł w okresie $\left(t_{j-1},t_j\right]$ oraz $B_1=0$;
- $G_j \geq 0$ oznacza świadczenie wypłacane w chwili t_j dla każdego $j=2,\ldots,n+1$, o ile ubezpieczony dożył do tego momentu oraz $G_1=0$.

Składki netto są tak obliczone, aby $EV=0$, dlatego nierówność (5) upraszcza się do postaci

$$E\Delta V \geq -L^2\left(\mathbf{s}\right)L^2\left(\mathbf{f}\right). \tag{11}$$

[22] Ibidem.

[23] Por. np. L. Gajek, K. Ostaszewski, *Financial Risk Management for Pension Plans*, Elsevier, Amsterdam 2004.

Dolne ograniczenie $E\Delta V$ jest tu iloczynem dwóch wielkości – $L^2(\mathbf{s})$, zależnej jedynie od struktury produktu, oraz $L^2(\mathbf{f})$, zależnej od zmian stóp procentowych.

Twierdzenie 3.1. Dla produktu ze strumieniem składek $\{\Pi_j\}$ oraz strumieniami świadczeń $\{B_j\}$ oraz $\{G_j\}$ zachodzi wzór

$$L^2(\mathbf{s}) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n+1}\left(\left(\Pi_j - G_j\right)^2 v_j^2 \cdot {}_{j-1}p_x + B_j^2 v_j^2 \cdot {}_{j-2}p_x \cdot q_{x+j-2}\right)}. \tag{12}$$

Dowód. Zauważmy, że dla każdego $j = 1,\ldots,n+1$ mamy

$$s_j = \begin{cases} \Pi_j v_j - G_j v_j, & j-1 < K+1, \\ -B_j v_j, & j-1 = K+1. \end{cases} \tag{13}$$

Wówczas

$$\begin{aligned} Es_j^2 &= \left(\Pi_j v_j - G_j v_j\right)^2 P\left(j-1 < K+1\right) + \left(-B_j v_j\right)^2 P\left(j-1 = K+1\right) \\ &= \left(\Pi_j v_j - G_j v_j\right)^2 \cdot {}_{j-1}p_x + \left(-B_j v_j\right)^2 \cdot {}_{j-2}p_x \cdot q_{x+j-2} \end{aligned}$$

dla każdego $j = 1,\ldots,n+1$. Po zastosowaniu powyższych obliczeń do wzoru $L^2(\mathbf{s}) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n+1} Es_j^2}$ otrzymujemy tezę. ■

3.1. Terminowe ubezpieczenie na życie płatne na koniec roku śmierci

W tego typu ubezpieczeniu świadczenie jest wypłacane na koniec roku śmierci ubezpieczonego, jeżeli umrze on w okresie objętym umową.

Wniosek 3.1. Jeżeli $L^2(\mathbf{f}) \le M$ dla pewnej liczby $M > 0$, to dla opisanego wyżej ubezpieczenia zachodzi nierówność

$$E\Delta V \ge -M\sqrt{\sum_{j=1}^{n} {}_{j-1}p_x \left(\Pi_j^2 v_j^2 + B_{j+1}^2 v_{j+1}^2 \cdot q_{x+j-1}\right)}. \tag{14}$$

Dowód. Skorzystamy z twierdzenia 3.1 z zerowym strumieniem $\{G_j\}$. Wtedy

$$\begin{aligned} L^2(\mathbf{s}) &= \sqrt{\sum_{j=1}^{n+1}\left(\Pi_j^2 v_j^2 \cdot {}_{j-1}p_x + B_j^2 v_j^2 \cdot {}_{j-2}p_x \cdot q_{x+j-2}\right)} \\ &= \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\Pi_j^2 v_j^2 \cdot {}_{j-1}p_x + \sum_{j=2}^{n+1} B_j^2 v_j^2 \cdot {}_{j-2}p_x \cdot q_{x+j-2}} \\ &= \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\Pi_j^2 v_j^2 \cdot {}_{j-1}p_x + \sum_{j=1}^{n} B_{j+1}^2 v_{j+1}^2 \cdot {}_{j-1}p_x \cdot q_{x+j-1}} \\ &= \sqrt{\sum_{j=1}^{n} {}_{j-1}p_x \left(\Pi_j^2 v_j^2 + B_{j+1}^2 v_{j+1}^2 \cdot q_{x+j-1}\right)}. \end{aligned}$$

Z założenia i nierówności (11) wynika teza. ■

Szczególnym przypadkiem rozważanego produktu ubezpieczeniowego jest kontrakt ze stałymi składkami.

Wniosek 3.2. Załóżmy, że $\Pi_j = \Pi_1$ dla $j = 2,\ldots,n$ oraz $\Pi_{n+1} = 0$. Jeżeli $L^2(\mathbf{f}) \le M$ dla pewnej liczby $M > 0$, to dla terminowego ubezpieczenia na życie ze stałymi składkami zachodzi nierówność

$$E\Delta V \ge -M\sqrt{\sum_{j=1}^{n} {}_{j-1}p_x \left(\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} B_{j+1} v_{j+1} \cdot {}_{j-1}p_x \cdot q_{x+j-1}}{\sum_{j=1}^{n} v_j \cdot {}_{j-1}p_x}\right)^2 v_j^2 + B_{j+1}^2 v_{j+1}^2 \cdot q_{x+j-1}\right)}.$$

Dowód. Skoro $\sum_{j=1}^{n+1} Es_j = 0$, to

$$\Pi_1 + \sum_{j=2}^{n}\left(\Pi_1 v_j \cdot {}_{j-1}p_x - B_j v_j \cdot {}_{j-2}p_x \cdot q_{x+j-2}\right) - B_{n+1} v_{n+1} \cdot {}_{n-1}p_x \cdot q_{x+n-1} = 0 .$$

Z powyższego równania mamy, że

$$\Pi_1 = \frac{\sum_{j=1}^{n} B_{j+1} v_{j+1} \cdot {}_{j-1}p_x \cdot q_{x+j-1}}{\sum_{j=1}^{n} v_j \cdot {}_{j-1}p_x}.$$

Po wstawieniu powyższego wzoru do nierówności (14) otrzymujemy tezę. ■

3.2. Ubezpieczenie na dożycie

W ubezpieczeniu na dożycie świadczenie w wysokości G_{n+1} jednostek pieniężnych jest wypłacane na koniec roku n, o ile ubezpieczony przeżył n lat.

Wniosek 3.3. Jeżeli $L^2(\mathbf{f}) \le M$ dla pewnej liczby $M > 0$, to dla ubezpieczenia na dożycie zachodzi nierówność

$$E\Delta V \ge -M\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \Pi_j^2 v_j^2 \cdot {}_{j-1}p_x + G_{n+1}^2 v_{n+1}^2 \cdot {}_n p_x} \;. \tag{15}$$

Dowód. Skorzystamy z twierdzenia 3.1 z zerowym strumieniem $\{B_j\}$ oraz takim strumieniem $\{G_j\}$, że $G_j = 0$ dla $j < n+1$. Wtedy

$$L^2(\mathbf{s}) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n+1}\left(\left(\Pi_j - G_j\right)^2 v_j^2 \cdot {}_{j-1}p_x\right)} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \Pi_j^2 v_j^2 \cdot {}_{j-1}p_x + G_{n+1}^2 v_{n+1}^2 \cdot {}_n p_x} \,.$$

Z założenia i nierówności (11) wynika teza. ■

Ponownie dla stałych składek uzyskujemy szczególny przypadek powyższego wyniku.

Wniosek 3.4. Załóżmy, że $\Pi_j = \Pi_1$ dla $j = 2,\ldots,n$ oraz $\Pi_{n+1} = 0$. Jeżeli $L^2(\mathbf{f}) \le M$ dla pewnej liczby $M > 0$, to dla ubezpieczenia na dożycie ze stałymi składkami zachodzi nierówność

$$E\Delta V \ge -M\sqrt{\left(\frac{G_{n+1} v_{n+1} \cdot {}_n p_x}{\sum_{j=1}^{n} v_j \cdot {}_{j-1}p_x}\right)^2 \sum_{j=1}^{n} v_j^2 \cdot {}_{j-1}p_x + G_{n+1}^2 v_{n+1}^2 \cdot {}_n p_x} \,.$$

Dowód. Skorzystamy z równania $\sum_{j=1}^{n+1} Es_j = 0$ w celu obliczenia Π_1. Mamy:

$$\sum_{j=1}^{n} \Pi_1 v_j \cdot {}_{j-1}p_x - G_{n+1} v_{n+1} \cdot {}_n p_x = 0 \,.$$

Stąd

$$\Pi_1 = \frac{G_{n+1} v_{n+1} \cdot {}_n p_x}{\sum_{j=1}^{n} v_j \cdot {}_{j-1}p_x} \,.$$

Po zastosowaniu powyższego wzoru w nierówności (15) otrzymujemy tezę. ■

3.3. Ubezpieczenie na życie i dożycie

Ten typ ubezpieczenia jest połączeniem dwóch poprzednich. Świadczenie jest wypłacane na koniec roku śmierci, jeżeli ubezpieczony umrze w ciągu n lat objętych umową, lub na koniec roku n, jeżeli ubezpieczony przeżyje ten okres.

Wniosek 3.5. Jeżeli $L^2(\mathbf{f}) \le M$ dla pewnej liczby $M > 0$, to dla ubezpieczenia na życie i dożycie zachodzi nierówność

$$E\Delta V \ge -M\sqrt{\sum_{j=1}^{n} {}_{j-1}p_x\left(\Pi_j^2 v_j^2 + B_{j+1}^2 v_{j+1}^2 \cdot q_{x+j-1}\right) + G_{n+1}^2 v_{n+1}^2 \cdot {}_n p_x}. \tag{16}$$

Dowód. Skorzystamy z twierdzenia 3.1 z takim strumieniem $\{G_j\}$, że $G_j = 0$ dla $j < n+1$. Wtedy

$$\begin{aligned}
L^2(\mathbf{s}) &= \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \Pi_j^2 v_j^2 \cdot {}_{j-1}p_x + G_{n+1}^2 v_{n+1}^2 \cdot {}_n p_x + \sum_{j=2}^{n+1} B_j^2 v_j^2 \cdot {}_{j-2}p_x \cdot q_{x+j-2}} \\
&= \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \Pi_j^2 v_j^2 \cdot {}_{j-1}p_x + G_{n+1}^2 v_{n+1}^2 \cdot {}_n p_x + \sum_{j=1}^{n} B_{j+1}^2 v_{j+1}^2 \cdot {}_{j-1}p_x \cdot q_{x+j-1}} \\
&= \sqrt{\sum_{j=1}^{n} {}_{j-1}p_x\left(\Pi_j^2 v_j^2 + B_{j+1}^2 v_{j+1}^2 \cdot q_{x+j-1}\right) + G_{n+1}^2 v_{n+1}^2 \cdot {}_n p_x}.
\end{aligned}$$

Z założenia i nierówności (11) wynika teza. ■

Podobnie jak dla poprzednich kontraktów ubezpieczeniowych, w przypadku stałych składek mamy szczególną wersję nierówności immunizacyjnej.

Wniosek 3.6. Załóżmy, że $\Pi_j = \Pi_1$ dla $j = 2,\ldots,n$ oraz $\Pi_{n+1} = 0$. Jeżeli $L^2(\mathbf{f}) \le M$ dla pewnej liczby $M > 0$, to dla ubezpieczenia na życie i dożycie ze stałymi składkami zachodzi nierówność

$$\begin{aligned}
E\Delta V \;\ge\; -M\Bigg[&\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} B_{j+1} v_{j+1} \cdot {}_{j-1}p_x \cdot q_{x+j-1} + G_{n+1} v_{n+1} \cdot {}_n p_x}{\sum_{j=1}^{n} v_j \cdot {}_{j-1}p_x}\right)^2 \sum_{j=1}^{n} v_j^2 \cdot {}_{j-1}p_x \\
&+ \sum_{j=1}^{n} B_{j+1}^2 v_{j+1}^2 \cdot {}_{j-1}p_x \cdot q_{x+j-1} + G_{n+1}^2 v_{n+1}^2 \cdot {}_n p_x\Bigg]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Dowód. Skorzystamy z równania $\sum_{j=1}^{n+1} Es_j = 0$. Mamy

$$\sum_{j=1}^{n} \Pi_1 v_j \cdot {}_{j-1}p_x - \sum_{j=2}^{n+1} B_j v_j \cdot {}_{j-2}p_x \cdot q_{x+j-2} - G_{n+1} v_{n+1} \cdot {}_n p_x = 0.$$

Z powyższego równania mamy, że

$$\Pi_1 = \frac{\sum_{j=1}^{n} B_{j+1} v_{j+1} \cdot {}_{j-1}p_x \cdot q_{x+j-1} + G_{n+1} v_{n+1} \cdot {}_n p_x}{\sum_{j=1}^{n} v_j \cdot {}_{j-1}p_x}.$$

Po wstawieniu powyższego wzoru do nierówności (16) otrzymujemy tezę. ■

3.4. Odroczone terminowe ubezpieczenie na życie

Niech $1 < m < n$. W tego typu ubezpieczeniu świadczenie jest wypłacane na koniec roku śmierci ubezpieczonego, jednak nie wcześniej niż m lat od chwili zawarcia umowy.

Wniosek 3.7. Jeżeli $L^2(\mathbf{f}) \le M$ dla pewnej liczby $M > 0$, to dla opisanego wyżej ubezpieczenia zachodzi nierówność

$$E\Delta V \ge -M\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \Pi_j^2 v_j^2 \cdot {}_{j-1}p_x + \sum_{j=m+1}^{n} B_j^2 v_j^2 \cdot {}_{j-2}p_x \cdot q_{x+j-2}}\,. \tag{17}$$

Dowód. Skorzystamy z twierdzenia 3.1 z zerowym strumieniem $\{G_j\}$ oraz takim strumieniem $\{B_j\}$, że $B_j = 0$ dla $j \le m$. Wtedy

$$\begin{aligned} L^2(\mathbf{s}) &= \sqrt{\sum_{j=1}^{n+1}\left(\Pi_j^2 v_j^2 \cdot {}_{j-1}p_x + B_j^2 v_j^2 \cdot {}_{j-2}p_x \cdot q_{x+j-2}\right)} \\ &= \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \Pi_j^2 v_j^2 \cdot {}_{j-1}p_x + \sum_{j=m+1}^{n+1} B_j^2 v_j^2 \cdot {}_{j-2}p_x \cdot q_{x+j-2}}\,. \end{aligned}$$

Z założenia i nierówności (11) wynika teza. ■

Szczególnym przypadkiem rozważanego produktu ubezpieczeniowego jest kontrakt, w którym składki są płacone tylko przez pierwsze m lat oraz są stałe.

Wniosek 3.8. Załóżmy, że $\Pi_j = \Pi_1$ dla $j = 2,\ldots,m$ oraz $\Pi_j = 0$ dla $j = m+1,\ldots,n+1$. Jeżeli $L^2(\mathbf{f}) \le M$ dla pewnej liczby $M > 0$, to dla terminowego ubezpieczenia na życie ze stałymi składkami zachodzi nierówność

$$E\Delta V \ge -M\sqrt{\left(\frac{\sum_{j=m+1}^{n+1} B_j v_j \cdot {}_{j-2}p_x \cdot q_{x+j-2}}{\sum_{j=1}^{m} v_j \cdot {}_{j-1}p_x}\right)^2 \sum_{j=1}^{m} v_j^2 \cdot {}_{j-1}p_x + \sum_{j=m+1}^{n+1} B_j^2 v_j^2 \cdot {}_{j-2}p_x \cdot q_{x+j-2}}\,.$$

Dowód. Skoro $\sum_{j=1}^{n+1} Es_j = 0$, to $\sum_{j=1}^{m} \Pi_1 v_j \cdot {}_{j-1}p_x - \sum_{j=m+1}^{n+1} B_j v_j \cdot {}_{j-2}p_x \cdot q_{x+j-2} = 0.$

Z powyższego równania mamy, że

$$\Pi_1 = \frac{\sum_{j=m+1}^{n+1} B_j v_j \cdot {}_{j-2}p_x \cdot q_{x+j-2}}{\sum_{j=1}^{m} v_j \cdot {}_{j-1}p_x}.$$

Po wstawieniu powyższego wzoru do nierówności (17) otrzymujemy tezę. ■

3.5. Renta terminowa płatna z dołu

Ten typ ubezpieczenia rentowego gwarantuje wypłatę świadczenia na koniec każdego roku do śmierci ubezpieczonego, jednak nie dłużej niż przez n lat.

Wniosek 3.9. Jeżeli $L^2(\mathbf{f}) \le M$ dla pewnej liczby $M > 0$, to dla opisanego wyżej ubezpieczenia rentowego zachodzi nierówność

$$E\Delta V \ge -M\sqrt{\Pi_1^2 + \sum_{j=2}^{n} \left(\Pi_j - G_j\right)^2 v_j^2 \cdot {}_{j-1}p_x + G_{n+1}^2 v_{n+1}^2 \cdot {}_n p_x}. \tag{18}$$

Dowód. Teza wynika z założenia, nierówności (11) oraz twierdzenia 3.1 z zerowym strumieniem $\{B_j\}$. Istotnie,

$$\begin{aligned} L^2(\mathbf{s}) &= \sqrt{\sum_{j=1}^{n+1} \left(\Pi_j - G_j\right)^2 v_j^2 \cdot {}_{j-1}p_x} \\ &= \sqrt{\Pi_1^2 + \sum_{j=2}^{n} \left(\Pi_j - G_j\right)^2 v_j^2 \cdot {}_{j-1}p_x + G_{n+1}^2 v_{n+1}^2 \cdot {}_n p_x}. \end{aligned}$$

■

Szczególnym przypadkiem terminowego ubezpieczenia rentowego jest renta o stałych wypłatach kupiona za jednorazową składkę netto (JSN).

Wniosek 3.10. Załóżmy, że $\Pi_j = 0$ dla $j = 2, \ldots, n+1$ oraz $G_j = G$ dla $j = 2, \ldots, n+1$. Jeżeli $L^2(\mathbf{f}) \le M$ dla pewnej liczby $M > 0$, to dla renty terminowej ze stałymi wypłatami zachodzi nierówność

$$E\Delta V \ge -MG\sqrt{\left(\sum_{j=2}^{n+1} v_j \cdot {}_{j-1}p_x\right)^2 + \sum_{j=2}^{n+1} v_j^2 \cdot {}_{j-1}p_x}.$$

Dowód. Jednorazowa składka netto w tym ubezpieczeniu wynosi

$$JSN = G\sum_{j=2}^{n+1} v_j \cdot {}_{j-1}p_x \ . \tag{19}$$

Dla JSN i stałego strumienia świadczeń nierówność (18) przyjmuje postać

$$E\Delta V \geq -M\sqrt{JSN^2 + G^2\sum_{j=2}^{n+1} v_j^2 \cdot {}_{j-1}p_x} .$$

Po wstawieniu wzoru (19) do powyższej nierówności otrzymujemy tezę. ■

3.6. Odroczona renta terminowa

Ten typ ubezpieczenia rentowego gwarantuje wypłatę świadczenia na koniec każdego roku do śmierci ubezpieczonego, jednak nie wcześniej niż m lat od momentu zakupu polisy i nie dłużej niż przez $n-m$ lat.

Wniosek 3.11. Jeżeli $L^2(\mathbf{f}) \leq M$ dla pewnej liczby $M > 0$, to dla opisanego wyżej ubezpieczenia rentowego zachodzi nierówność

$$E\Delta V \geq -M\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\left(\Pi_j v_j\right)^2 \cdot {}_{j-1}p_x + \sum_{j=m+1}^{n+1}\left(\Pi_j - G_j\right)^2 v_j^2 \cdot {}_{j-1}p_x} . \tag{20}$$

Dowód. Skorzystamy z twierdzenia 3.1 z zerowym strumieniem $\left\{B_j\right\}$ oraz strumieniem $\left\{G_j\right\}$, dla którego $G_j = 0$ dla $j \leq m$. Wtedy

$$\begin{aligned} L^2(\mathbf{s}) &= \sqrt{\sum_{j=1}^{n+1}\left(\Pi_j - G_j\right)^2 v_j^2 \cdot {}_{j-1}p_x} \\ &= \sqrt{\sum_{j=1}^{m}\left(\Pi_j v_j\right)^2 \cdot {}_{j-1}p_x + \sum_{j=m+1}^{n+1}\left(\Pi_j - G_j\right)^2 v_j^2 \cdot {}_{j-1}p_x} . \end{aligned}$$

Teza wynika z założenia i nierówności (11). ■

Szczególnym przypadkiem rozważanego ubezpieczenia rentowego jest takie ubezpieczenie, w którym składki są stałe i płacone przez pierwsze m lat trwania polisy oraz świadczenia wypłacane ubezpieczonemu są stałe.

Wniosek 3.12. Załóżmy, że $\Pi_j = \Pi_1$ dla $j = 2,\ldots,m$ oraz $\Pi_j = 0$ dla $j = m+1,\ldots,n+1$ oraz $G_j = G$ dla $j = m+1,\ldots,n+1$. Jeżeli $L^2(\mathbf{f}) \leq M$ dla pewnej liczby $M > 0$, to dla odroczonej renty terminowej ze stałymi wypłatami zachodzi nierówność

$$E\Delta V \geq -MG\sqrt{\left(\frac{\sum_{j=m+1}^{n+1} v_j \cdot {}_{j-1}p_x}{\sum_{j=1}^{m} v_j \cdot {}_{j-1}p_x}\right)^2 \sum_{j=1}^{m} v_j^2 \cdot {}_{j-1}p_x + \sum_{j=m+1}^{n+1} v_j^2 \cdot {}_{j-1}p_x}.$$

Dowód. Z założonego warunku $EV = 0$ mamy, że

$$\Pi_1 \sum_{j=1}^{m} v_j \cdot {}_{j-1}p_x - G \sum_{j=m+1}^{n+1} v_j \cdot {}_{j-1}p_x = 0.$$

Stąd

$$\Pi_1 = G \frac{\sum_{j=m+1}^{n+1} v_j \cdot {}_{j-1}p_x}{\sum_{j=1}^{m} v_j \cdot {}_{j-1}p_x}.$$

Po skorzystaniu z założeń i powyższych obliczeń nierówność (20) przyjmuje postać

$$E\Delta V \geq -M\sqrt{\left(G\frac{\sum_{j=m+1}^{n+1} v_j \cdot {}_{j-1}p_x}{\sum_{j=1}^{m} v_j \cdot {}_{j-1}p_x}\right)^2 \sum_{j=1}^{m} v_j^2 \cdot {}_{j-1}p_x + G^2 \sum_{j=m+1}^{n+1} v_j^2 \cdot {}_{j-1}p_x}.$$

Po przekształceniach otrzymujemy tezę. ■

4. Nierówności immunizacyjne a praktyka ubezpieczeniowa

Nierówności immunizacyjne mogą być przydatnym narzędziem w zarządzaniu ryzykiem stopy procentowej. W szczególności warto podkreślić możliwości ich stosowania w świetle regulacji prawnych dotyczących wypłacalności zakładów ubezpieczeń. Zgodnie z dyrektywą Solvency II, firmy ubezpieczeniowe mogą konstruować modele wewnętrzne do obliczania kapitałowego wymogu wypłacalności. Ograniczenia immunizacyjne mogą być w nich użyte bezpośrednio.

W przeciwieństwie do wielu znanych w literaturze miar ryzyka stopy procentowej, miara $L^2(\mathbf{s})$ mierzy ryzyko w jednostce pieniężnej. W konsekwencji także dolne ograniczenie wynikające z nierówności (11) jest wyrażone w jednostce pieniężnej. Wyniki zaprezentowane w punktach drugim i trzecim pozwalają w relatywnie prosty sposób obliczać konkretne wartości tego ograniczenia w przypadku produktów ubezpieczeń życiowych w trzech modelach stóp procentowych. Mogą one znaleźć zastosowanie m.in. w budowaniu buforów kapitałowych dla ubezpieczycieli życiowych.

5. Podsumowanie

W pracy badano zastosowanie średniokwadratowej nierówności immunizacyjnej, udowodnionej w pracy L. Gajka i E. Krajewskiej[24], dla portfela ubezpieczeń życiowych. W przypadku finansowania netto nierówność ta ma postać faktorialną, tzn. jej prawa strona jest iloczynem, w którym każdy z czynników zależy tylko od jednego rodzaju ryzyka – związanego albo ze zmiennością stóp procentowych, albo ze strukturą portfela. Czynnik zależny od struktury portfela, $L^2(\mathbf{s})$, może być traktowany jako miara ryzyka stopy procentowej portfela ubezpieczyciela. Wzór (12) podany w punkcie trzecim niniejszego artykułu pozwala w prosty sposób obliczyć jej wartość dla portfeli złożonych z produktów ubezpieczeń życiowych. Dla niektórych produktów, m.in. terminowego ubezpieczenia na życie i dożycie oraz renty terminowej, podano szczególne postacie średniokwadratowej nierówności immunizacyjnej.

Zaprezentowane w pracy wyniki pokazują, że nierówność (5) oraz wynikająca z niej miara $L^2(\mathbf{s})$ mogą być przydatne zarówno w teorii, jak i w praktyce ubezpieczeniowej.

Bibliografia

Financial Economics: With Applications to Investments, Insurance and Pensions, red. H.H. Panjer, The Actuarial Foundation, Schamburg 1998.

Fisher L., Weil R.L., *Copying with the Risk of Interest Rate Fluctuations: Return to Bondholders from Naive and Optimal Strategies*, „Journal of Business" 1971, vol. 44, s. 410–431.

Fong G., Vasicek O., *A Risk Minimization Strategy for Portfolio Immunization*, „Journal of Finance" 1984, vol. 39, s. 1541–1546.

Gajek L., Krajewska E., *A new immunization inequality for random streams of assets, liabilities and interest rates*, „Insurance: Mathematics and Economics" 2013, vol. 53, s. 624–631.

Gajek L., Ostaszewski K., *Financial Risk Management for Pension Plans*, Elsevier, Amsterdam 2004.

Gajek L., Ostaszewski K., Zwiesler H.-J., *A Primer on Duration, Convexity and Immunization*, „Journal of Actuarial Practice" 2005, vol. 12, s. 59–82.

[24] L. Gajek, E. Krajewska, op.cit.

Macaulay F.R., *Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields, and Stock Prices in the U.S. Since 1856*, National Bureau of Economic Research, New York 1938.

Merton R.C., *Theory of rational option pricing*, „The Bell Journal Economics and Management Science" 1973, vol. 4, s. 141–183.

Musiela M., Rutkowski M., *Martingale Methods in Financial Modelling*, Springer, Heidelberg 2007.

Nawalkha S.K., Chambers D.R., *An Improved Immunization Strategy: M-absolute*, „Financial Analysts Journal" 1996, September–October, s. 69–76.

Redington F.M., *Review of principles of life-office valuations*, „Journal of the Institute of Actuaries" 1952, vol. 78, s. 286–315.

Samuelson P.A., *The Effect of Interest Rate Increases on the Banking System*, „American Economic Review" 1945, vol. 55, s. 16–27.

Shiu E.S.W., *Immunization of multiple liabilities*, „Insurance: Mathematics and Economics" 1988, vol. 7, s. 219–224.

Vasicek O., *An equilibrium characterization of the term structure*, „Journal of Financial Economics" 1977, vol. 5, s. 177–188.

* * *

Interest rate risk immunisation for life insurers

Summary

This paper investigates some applications of immunisation inequality introduced by Gajek, Krajewska (2013) for life insurers' portfolios. When net insurance premiums are considered, a lower bound given by this inequality is a product of two terms. One of them, $L^2(\mathbf{s})$, might be treated as a measure of interest rate risk. In the paper, formulas for $L^2(\mathbf{s})$ are given for life insurance products, such as term life insurance, pure endowment, temporary life annuity.

Keywords: immunisation, interest rate risk, life insurance