

KAMIL GALA

Ubezpieczeniowy Fundusz Gwarancyjny

## O rozkładzie prawdopodobieństwa zaktualizowanej wartości świadczeń w ubezpieczeniach dla wielu osób

### Streszczenie

Klasyczne podejście do aktuarialnej analizy ubezpieczeń dla wielu osób opiera się na założeniu dotyczącym niezależności zmiennych losowych reprezentujących dalsze trwanie życia ubezpieczonych. Wydaje się jednak, że założenie to nie jest realistyczne. Celem niniejszej pracy jest określenie, jak uchylenie założenia dotyczącego niezależności wpływa na własności rozkładu prawdopodobieństwa zaktualizowanej wartości świadczeń w ubezpieczeniu dla wielu osób. Do realizacji tego celu został wykorzystany model, w którym łączny rozkład dalszego trwania życia ubezpieczonych jest określony za pomocą kopuli. W pracy zostały przedstawione wyniki dotyczące wpływu struktury zależności na wartość oczekiwaną i kwantyle tej zmiennej, uzyskane przy wykorzystaniu relacji porządku stochastycznego. Wyniki te stanowią uogólnienie wcześniejszych badań autora oraz wyników zawartych w literaturze przedmiotu i mogą być użyteczne w przypadku, gdy ubezpieczyciel nie dysponuje pełną wiedzą o strukturze zależności między długością życia ubezpieczonych.

**Słowa kluczowe:** ubezpieczenie dla wielu osób, zależność, *copula*, porządek stochastyczny

### 1. Wstęp

Ubezpieczenie dla wielu osób (ang. *multiple life insurance*) to ubezpieczenie, w którym ubezpieczyciel obejmuje ochroną grupę osób rozumianą jako całość. W konsekwencji w tego rodzaju umowie zajście zdarzenia ubezpieczeniowego oraz wysokość ewentualnych świadczeń są powiązane z długością życia członków ubezpieczonej grupy. Przykładowo, przyszłe wypłaty mogą zależeć od kolejności zgonów, liczby żyjących lub zmarłych członków albo od momentu pierwszego lub ostatniego zgonu w grupie.

Tradycyjne podejście do aktuarialnej analizy ubezpieczeń dla wielu osób opiera się na założeniu, że dalszą długość życia ubezpieczonych można modelować za pomocą niezależnych zmiennych losowych. W literaturze można znaleźć jednak argumenty, że założenie to, choć wygodne obliczeniowo, może w rzeczywistości być nieuzasadnione<sup>1</sup>, a dostępne wyniki badań empirycznych wydają się potwierdzać tę tezę<sup>2</sup>. Pojawia się więc pytanie, w jaki sposób modelować zależność między długością życia ubezpieczonych i jaki jest wpływ przyjętej struktury zależności na aktuarialne aspekty umowy ubezpieczenia, takie jak składka, rezerwy czy zyskowność. Problem ten został poruszony m.in. w pracach S. Heilperna<sup>3</sup> oraz M. Denuita i innych<sup>4</sup>, w których zbadano kwestię wpływu struktury zależności na wartość aktuarialną rent życiowych. Z kolei w pracy K. Gali<sup>5</sup> została przeprowadzona analiza wpływu założeń dotyczących struktury i siły zależności na wysokość jednorazowej składki netto w wybranych ubezpieczeniach na wypadek śmierci oraz rentach życiowych. Do tego celu zastosowano model oparty na niejednorodnym łańcuchu Markowa z czasem dyskretnym. W łańcuchu tym prawdopodobieństwa przejścia zostały wyznaczone z wykorzystaniem kopuli (ang. *copula*).

Celem niniejszej pracy jest pogłębienie dyskusji przedstawionej w ostatnim z przywołanych wyżej artykułów. W szczególności będziemy zainteresowani odpowiedzią na pytanie, jakich prawidłowości możemy się spodziewać, analizując model ubezpieczenia wielu osób oparty na funkcjach kopula. Praca swoim zakresem obejmuje omówienie modelu matematycznego opisującego ubezpieczenie wielu osób z uwzględnieniem zależności między długością życia ubezpieczonych oraz analizę jego własności.

---

<sup>1</sup> Zob. M. Denuit, A. Cornet, *Multiple premium calculation with dependent future lifetimes*, „Journal of Actuarial Practice” 1999, vol. 7, s. 147–180; J. Dhaene, M. Vanneste, H. Wolthuis, *A Note On Dependencies In Multiple Life Statuses*, „Bulletin of the Swiss Association of Actuaries” 2000, vol. 1, s. 19–34; R. Norberg, *Actuarial Analysis of Dependent Lives*, „Bulletin de l’Association Suisse des Actuaries” 1989, vol. 40, s. 243–254.

<sup>2</sup> S. Heilpern, *Wyznaczanie wielkości renty w zależnych grupowych ubezpieczeniach na życie*, „Prace Naukowe” Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu, nr 230, Wrocław 2011, s. 30–48; E.W. Frees, J. Carriere, E. Valdez, *Annuity Valuation With Dependent Mortality*, „The Journal of Risk and Insurance” 1996, vol. 63, no. 2, s. 229–261; M. Denuit, J. Dhaene, C. Le Bailly de Tillegem, S. Teghem, *Measuring the impact of a dependence among insured lifelengths*, „Belgian Actuarial Bulletin” 2001, no. 1, s. 18–39.

<sup>3</sup> S. Heilpern, *Wyznaczanie wielkości...*, op.cit.

<sup>4</sup> M. Denuit, J. Dhaene, C. Le Bailly de Tillegem, S. Teghem, op.cit.

<sup>5</sup> K. Gala, *Analiza ubezpieczeń dla wielu osób z wykorzystaniem funkcji copula*, „Prace Naukowe” Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu, nr 312, Wrocław 2013, s. 50–66.

Struktura pracy jest następująca: w punkcie drugim został przedstawiony model matematyczny służący do aktuarialnej analizy ubezpieczeń dla wielu osób. W kolejnym punkcie zaprezentowano wybrane fakty dotyczące relacji porządku stochastycznego. W punkcie czwartym zostały zawarte rozważania dotyczące relacji między rozkładem wartości zaktualizowanej świadczeń wynikających z umowy ubezpieczenia a strukturą zależności przyjętą w modelu. W punkcie piątym opisano zagadnienia związane z wariancją wartości zaktualizowanej świadczeń, natomiast w punkcie szóstym przedstawiono przykład obliczeniowy. Pracę zamykają podsumowanie i wnioski.

## 2. Ubezpieczenie dla wielu osób – model matematyczny

Rozważmy umowę ubezpieczenia zawartą z grupą  $m$  osób, których dalsza długość życia (licząc od momentu zawarcia umowy ubezpieczenia) jest opisana za pomocą zmiennych losowych  $T_1(x_1), \dots, T_m(x_m)$ , gdzie  $x_i$  jest wiekiem osoby  $i$ . Przedmiotem tej umowy jest pewien **status**, tj. umowna konstrukcja, której stan jest ściśle powiązany z długością życia członków grupy. Najpopularniejszymi statusami są **status wspólnego życia**, który wygasa wraz z pierwszą śmiercią w grupie, oraz **status ostatniego żyjącego**, który pozostaje aktywny dopóty, dopóki żyje co najmniej jeden z ubezpieczonych. Bardziej ogólne rodzaje to **statusy symetryczne**, zależne od liczby żyjących członków grupy, oraz **statusy niesymetryczne**, których stan zależy od zdefiniowanej w umowie kolejności śmierci. Stan statusu i jego zmiany w czasie są podstawą do wypłaty przez ubezpieczyciela świadczeń określonych w umowie ubezpieczenia. Z aktuarialnego punktu widzenia budowa modelu opisującego stan statusu jest więc analogiczna do modelowania śmiertelności ubezpieczonego w ubezpieczeniach indywidualnych.

Oznaczmy przez  $T$  zmienną losową opisującą czas aktywności statusu. Najczęściej mamy  $T = f(T_1(x_1), \dots, T_m(x_m))$  dla pewnej funkcji  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Warto zwrócić uwagę na fakt, że  $T$  może być wielowymiarową zmienną losową i opisywać np. początek oraz koniec aktywności statusu. Przez  $b$  oznaczmy funkcję  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , taką że  $b(t)$  jest wartością świadczenia wypłacanego uposażonym, gdy  $T=t$ , zdyskontowaną na moment zawierania umowy. W dalszej części pracy poświęcimy tej funkcji więcej uwagi. Wartość zaktualizowana przyszłych świadczeń jest zmienną losową zdefiniowaną jako  $PV = b(T)$  i stanowi podstawę do ustalenia wysokości składki. Składkę ustalaną na podstawie zasady wartości oczekiwanej będziemy nazywać **jednorazową składką netto** (w skrócie – JSN).

Do wyznaczenia rozkładu zmiennej  $PV$  jest konieczne przyjęcie pewnych założeń dotyczących łącznego rozkładu wektora  $(T_1(x_1), \dots, T_m(x_m))$ . Jednym z możliwych podejść, przedstawionym w pracy K. Gali<sup>6</sup>, jest specyfikacja łącznego rozkładu wektora  $(T_1(x_1), \dots, T_m(x_m))$  za pomocą funkcji kopula. Kopulą  $n$ -wymiarową nazywamy dystrybuantę rozkładu prawdopodobieństwa na kostce  $[0,1]^n \subset \mathbb{R}^n$ , którego rozkłady brzegowe są jednostajne na odcinku  $[0,1]$ . Na mocy twierdzenia Sklara<sup>7</sup> dla każdego  $n$ -wymiarowego rozkładu prawdopodobieństwa dystrybuantę  $H$  można wyrazić jako

$$H(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)), \quad (1)$$

gdzie  $C$  jest kopulą, a  $F_i$  dystrybuantami rozkładów brzegowych. Jeśli funkcje  $F_i$  są ciągłe, to funkcja  $C$  jest wyznaczona jednoznacznie. Co więcej, dla dowolnych rozkładów brzegowych i kopuli  $C$  funkcja  $H$  określona wzorem (1) jest poprawnie zdefiniowaną dystrybuantą wielowymiarowego rozkładu prawdopodobieństwa. Pozwala to w stosunkowo łatwy sposób budować wielowymiarowe rozkłady prawdopodobieństwa o skomplikowanych rozkładach brzegowych, które można spotkać np. w ubezpieczeniach na życie. Do modelowania długości życia jest również użyteczna funkcja nazywana kopulą przeżycia (ang. *survival copula*). Jest to funkcja  $\hat{C}$ , dla której dla każdego  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  zachodzi

$$\bar{H}(x_1, \dots, x_n) = \hat{C}(\bar{F}_1(x_1), \dots, \bar{F}_n(x_n)), \quad (2)$$

gdzie  $\bar{H}(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}(X_1 > x_1, \dots, X_n > x_n)$  oraz  $\bar{F}_i(x_i) = 1 - F_i(x_i)$  dla  $i = 1, \dots, n$ . Co istotne, tak zdefiniowana kopula przeżycia spełnia warunki charakteryzujące kopulę. Funkcje  $C$  oraz  $\hat{C}$  odpowiadające temu samemu rozkładowi wielowymiarowemu będziemy nazywać stowarzyszonymi. Wzory (1) oraz (2) wskazują na fakt, że model łącznej długości życia można skonstruować na dwa sposoby – specyfikując dystrybuantę łącznego rozkładu za pomocą kopuli  $C$  lub określając łączną funkcję przeżycia za pomocą funkcji  $\hat{C}$ . Postępując w ten sposób, otrzymujemy na ogół różne modele, poza szczególnym przypadkiem, gdy wybrana kopula  $C$  jest równa swojej stowarzyszonej kopuli przeżycia  $\hat{C}$ . Własność ta jest równoważna z własnością rozkładu wielowymiarowego, nazywaną symetrią promieniową<sup>8</sup> (ang. *radial symmetry*).

<sup>6</sup> Ibidem.

<sup>7</sup> Zob. np. S. Heilpern, *Funkcje łączące*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. Oskara Langego we Wrocławiu, Wrocław 2007, s. 16–18.

<sup>8</sup> Por. R.B. Nelsen, *An Introduction to Copulas*, Springer, New York 2006, s. 36.

Specyfikacja łącznego rozkładu prawdopodobieństwa wektora  $(T_1(x_1), \dots, T_m(x_m))$  określa rozkład zmiennej losowej  $T$ , a ten z kolei kształtuje rozkład zmiennej  $PV$ . W ogólności rozkład zmiennej  $PV$  nie może być wyznaczony analitycznie i konieczne jest zastosowanie metod numerycznych lub symulacyjnych. Wygodnym podejściem do analizy ubezpieczeń dla wielu osób, także w przypadku zależnych długości życia, jest wykorzystanie niejednorodnych łańcuchów Markowa z czasem dyskretnym<sup>9</sup>.

Interesujące jest to, w jaki sposób przyjęta struktura zależności wpływa na rozkład zmiennej losowej  $PV$  i jego parametry. Odpowiedź na to pytanie ma duże znaczenie w kontekście wyceny umowy ubezpieczenia i oceny ryzyka z nią związanego. W dalszej części pracy poświęcimy temu zagadnieniu więcej uwagi, dążąc do otrzymania możliwie ogólnych wyników.

### 3. Relacje porządku stochastycznego

Badając wpływ przyjętej struktury zależności na wartość zaktualizowaną przyszłych świadczeń, będziemy zainteresowani analizą parametrów rozkładu (takich jak wartość oczekiwana czy wariancja), ale również porównaniem całych rozkładów prawdopodobieństwa. Do tego celu posłużą relacje porządku stochastycznego. Będziemy dalej zakładać, że rozważane zmienne losowe są nieujemne i mają rozkład absolutnie ciągły względem miary Lebesgue'a bądź względem miary liczącej.

Porządkiem stochastycznym nazwiemy relację dwuargumentową w zbiorze dystrybuant rozkładu prawdopodobieństwa spełniającą warunki częściowego porządku, tj. relację zwrotną, przechodnią i antysymetryczną. Warto podkreślić fakt, że nie musi to być porządek liniowy, tj. nie wszystkie rozkłady muszą być ze sobą porównywalne. W literaturze można znaleźć wiele rodzajów relacji porządku stochastycznego, natomiast w niniejszej pracy będziemy wykorzystywać najpopularniejszą z nich – dominację stochastyczną pierwszego rzędu, nazywaną również zwykłym porządkiem stochastycznym. Powiemy, że zmienna losowa  $Y$  dominuje stochastycznie zmienną losową  $X$ , jeśli dla każdego  $t \in \mathbb{R}$  zachodzi  $F_X(t) \geq F_Y(t)$ , gdzie  $F_X$  i  $F_Y$  są dystrybuantami rozkładu prawdopodobieństwa odpowiednio zmiennych  $X$  i  $Y$ . Stosujemy wtedy oznaczenie  $X \preceq_{ST} Y$ .

<sup>9</sup> Por. K. Gala, op.cit.; W. Bijak, *Ubezpieczenia na życie jako niejednorodne łańcuchy Markowa*, „Prace Naukowe” Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu, nr 312, Wrocław 2013, s. 9–28.

Relacja dominacji stochastycznej między zmiennymi losowymi  $X$  oraz  $Y$  ma swoje konsekwencje w relacji między parametrami rozkładów prawdopodobieństwa tych zmiennych. Precyzuje to następujące twierdzenie:

**Twierdzenie 3.1.** Jeśli  $X$  i  $Y$  są zmiennymi losowymi takimi, że  $X \preceq_{ST} Y$ , to  
 (1) dla każdego  $p \in (0,1)$  zachodzi  $q_X(p) \leq q_Y(p)$ , gdzie  $q_X(p)$  oznacza kwantyl rzędu  $p$  zmiennej losowej  $X$ , zdefiniowany jako  $q_X(p) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq p\}$ ;  
 (2) jeśli dodatkowo  $X$  i  $Y$  są nieujemne i całkowalne, to zachodzi  $\mathbb{E}X \leq \mathbb{E}Y$ .

Dowód powyższego twierdzenia można znaleźć w pracy M. Denuita i innych<sup>10</sup>.

W dalszej części pracy będzie również użyteczna inna własność omawianej relacji porządku stochastycznego – niezmienniczość ze względu na monotoniczne przekształcenia. Rozpocznijmy od następującego lematu.

**Lemat 3.2.** Dla zmiennych losowych  $X$  oraz  $Y$  relacja  $X \preceq_{ST} Y$  zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją zmienne losowe  $\tilde{X}$  oraz  $\tilde{Y}$  określone na wspólnej przestrzeni probabilistycznej  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  takie, że  $\tilde{X} =_d X$ ,  $\tilde{Y} =_d Y$  oraz  $\mathbb{P}(\tilde{X} \leq \tilde{Y}) = 1$ , gdzie symbol  $=_d$  oznacza równość rozkładów prawdopodobieństwa.

Dowód lematu 3.2 można znaleźć w pracy R. Kaasa i innych<sup>11</sup>. Przejdziemy teraz do zapowiedzianego wcześniej twierdzenia.

**Twierdzenie 3.3.** Niech  $X$  oraz  $Y$  będą zmiennymi losowymi takimi, że  $X \preceq_{ST} Y$ , a  $g$  będzie monotoniczną funkcją niemalejącą. Wtedy  $g(X) \preceq_{ST} g(Y)$ .

*Dowód.* Z relacji  $X \preceq_{ST} Y$ , na mocy lematu 3.2, wynika istnienie zmiennych  $\tilde{X}$  oraz  $\tilde{Y}$ , określonych na wspólnej przestrzeni probabilistycznej  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  takich, że  $\mathbb{P}(\tilde{X} \leq \tilde{Y}) = 1$ . Funkcja  $g$  jest niemalejąca, zatem dla każdego  $\omega \in \Omega$  takiego, że  $\tilde{X}(\omega) \leq \tilde{Y}(\omega)$ , zachodzi również  $g(\tilde{X}(\omega)) \leq g(\tilde{Y}(\omega))$ . Zachodzi więc

$$\{\omega \in \Omega : \tilde{X}(\omega) \leq \tilde{Y}(\omega)\} \subseteq \{\omega \in \Omega : g(\tilde{X}(\omega)) \leq g(\tilde{Y}(\omega))\},$$

zatem z własności prawdopodobieństwa wynika, że  $\mathbb{P}(\tilde{X} \leq \tilde{Y}) \leq \mathbb{P}(g(\tilde{X}) \leq g(\tilde{Y})) \leq 1$ , więc  $\mathbb{P}(g(\tilde{X}) \leq g(\tilde{Y})) = 1$ . Ponieważ  $g(X) =_d g(\tilde{X})$  oraz  $g(Y) =_d g(\tilde{Y})$ , to korzystając ponownie z lematu 3.2, otrzymujemy  $g(X) \preceq_{ST} g(Y)$ , co kończy dowód.

Powyższe twierdzenie zostało sformułowane dla funkcji niemalejących. Jest ono również prawdziwe dla funkcji nierosnących, przy czym relacja dominacji stochastycznej po przekształceniu ulega odwróceniu. Dowód przenosi się na ten przypadek z oczywistymi zmianami.

<sup>10</sup> M. Denuit, J. Dhaene, M. Goovaerts, R. Kaas, *Actuarial Theory for Dependent Risks: Measures, Orders and Models*, Wiley, New York 2005, s. 108–112.

<sup>11</sup> R. Kaas, M.J. Goovaerts, J. Dhaene, M. Denuit, *Modern Actuarial Risk Theory*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 2001, s. 227.

Warto w tym miejscu rozważań zwrócić uwagę na związek dominacji stochastycznej z miarami ryzyka. Miarą ryzyka nazywamy funkcję  $\rho: V \rightarrow \mathbb{R}$ , gdzie  $V$  jest zbiorem zmiennych losowych reprezentujących narażenie na ryzyko (np. wartość przyszłych zobowiązań). W literaturze można znaleźć wiele prac poświęconych miarom ryzyka i ich własnościom<sup>12</sup>, natomiast w niniejszej pracy ograniczymy się do dwóch własności – monotoniczności i obiektywności. Miarę ryzyka nazwiemy monotoniczną, jeśli z tego, że  $X \leq Y$  p.n., wynika, że  $\rho(X) \leq \rho(Y)$ , natomiast miara obiektywna (ang. *objective*) to taka, dla której  $\rho(X)$  zależy od  $X$  tylko przez rozkład tej zmiennej losowej, tzn. jeśli  $X =_d Y$ , to  $\rho(X) = \rho(Y)$ . Prawdziwe jest następujące twierdzenie:

**Twierdzenie 3.4.** Niech  $\rho$  będzie obiektywną, monotoniczną miarą ryzyka oraz niech  $X \preceq_{ST} Y$ . Wtedy  $\rho(X) \leq \rho(Y)$ .

*Dowód.* Niech  $\tilde{X}$  oraz  $\tilde{Y}$  będą zmiennymi losowymi, o których mowa w lemacie 3.2. Z własności  $\rho$  wynika, że

$$\rho(X) = \rho(\tilde{X}) \leq \rho(\tilde{Y}) = \rho(Y),$$

co kończy dowód.

Obiektywnymi, monotonicznymi miarami ryzyka są np. wartość oczekiwana oraz kwantyl ustalonego rzędu. W związku z tym twierdzenie 3.4 zawiera w sobie twierdzenie 3.1 jako szczególny przypadek.

Przejdziemy teraz do przypadku wielowymiarowego i omówimy jego związek z kopulami. Niech  $\mathbf{X}$  oraz  $\mathbf{Y}$  będą  $n$ -wymiarowymi zmiennymi losowymi o dystrybuantach odpowiednio  $H_X$  i  $H_Y$ . Powiemy, że  $\mathbf{X} < \mathbf{Y}$ , jeśli dla każdego  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  mamy  $H_X(x_1, \dots, x_n) \leq H_Y(x_1, \dots, x_n)$  – jest to tzw. porządek zgodności (ang. *concordance ordering*)<sup>13</sup>. Szczególnie interesujące jest wprowadzenie porządku w zbiorze dystrybuant wielowymiarowych o ustalonych rozkładach brzegowych danych dystrybuantami  $F_i$  – jest to tzw. przestrzeń Fréchet’a, którą oznaczamy przez  $\Gamma(F_1, \dots, F_n)$ . W takim przypadku z twierdzenia Sklara wynika, że dla  $H, G \in \Gamma(F_1, \dots, F_n)$  mamy  $H < G \Leftrightarrow C_H < C_G$ , gdzie  $C_H$  oraz  $C_G$  oznaczają funkcje kopula odpowiadające dystrybuantom  $H$  i  $G$ . Warto zwrócić uwagę na to, że dla każdej kopuli  $C$  zachodzą następujące oszacowania:

$$W(x_1, \dots, x_n) \leq C(x_1, \dots, x_n) \leq M(x_1, \dots, x_n), \quad (3)$$

<sup>12</sup> Zob. np. M. Denuit, J. Dhaene, M. Goovaerts, R. Kaas, op.cit., s. 59–102.

<sup>13</sup> Zob. R. Nelsen, op.cit., s. 39.



gdzie  $W(x_1, \dots, x_n) = \max\left(\sum_{i=1}^n x_i - n + 1, 0\right)$  oraz  $M(x_1, \dots, x_n) = \min(x_1, \dots, x_n)$ . Funkcje  $W$

i  $M$  są nazywane ograniczeniami Fréchet–Hoeffdinga, przy czym  $M$  jest kopułą dla dowolnego  $n$ , a  $W$  jest kopułą tylko dla  $n=2$ . Ograniczenia Fréchet–Hoeffdinga dostarczają metody konstrukcji kresu górnego oraz kresu dolnego (w przypadku dwuwymiarowym) w zbiorze  $\Gamma(F_1, \dots, F_n)$  ze względu na relację  $\prec$ .

Wiele popularnych rodzin kopuli jest indeksowanych jednym parametrem. W związku z tym powiemy, że rodzina  $\{C_\theta : \theta \in \Theta\}$  jest uporządkowana rosnąco (odp. malejąco) ze względu na parametr  $\theta$ , jeżeli dla każdych  $\theta, \theta' \in \Theta$  takich, że  $\theta' \geq \theta$ , zachodzi  $C_\theta \prec C_{\theta'}$  ( $C_\theta \succ C_{\theta'}$ ). Przykładami rodzin uporządkowanych rosnąco są rodzina kopuli Claytona dana wzorem

$$C(x_1, \dots, x_n) = \left( \sum_{i=1}^n x_i^{-\theta} - n + 1 \right)^{\frac{1}{\theta}} \quad \text{dla } \theta > 0$$

oraz rodzina kopuli Gumbela dana wzorem

$$C(x_1, \dots, x_n) = \exp \left[ - \left( \sum_{i=1}^n (-\ln x_i)^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \right] \quad \text{dla } \theta \geq 1.$$

Znaczenie omawianego porządku podkreśla definicja miary zgodności podana przez M. Scarsiniego<sup>14</sup>, która wskazuje, że dla miary zgodności  $\kappa$  powinno zachodzić  $C_1 \prec C_2 \Rightarrow \kappa_{C_1} \leq \kappa_{C_2}$ . W istocie, popularne miary związku między zmiennymi losowymi,  $\rho$ -Spearmana i  $\tau$ -Kendalla, mają tę własność<sup>15</sup>. Oznacza to, że dla uporządkowanych rosnąco (malejąco) rodzin kopuli siła zależności jest rosnącą (malejącą) funkcją parametru. Pozwala to badać wpływ siły zależności w modelu przez analizę wrażliwości na zmiany parametrów rozkładu łącznego.

Na zakończenie tej części pracy rozważymy jeszcze kwestię związku między uporządkowaniem rodziny  $\{C_\theta : \theta \in \Theta\}$  oraz stowarzyszonej z nią rodziny  $\{\hat{C}_\theta : \theta \in \Theta\}$ . Łatwo wykazać, że w przypadku dwuwymiarowym zachodzi

$$\hat{C}_\theta(u, v) = u + v - 1 + C_\theta(1 - u, 1 - v).$$

<sup>14</sup> M. Scarsini, *On measures of concordance*, „Stochastica” 1984, vol. 8, s. 201–218.

<sup>15</sup> R.B. Nelsen, *op.cit.*, s. 169.



W konsekwencji uporządkowanie rodziny  $\{C_\theta : \theta \in \Theta\}$  pociąga za sobą analogiczne uporządkowanie rodziny  $\{\hat{C}_\theta : \theta \in \Theta\}$ . Własność ta jest godna uwagi ze względu na dwojaką możliwość specyfikacji łącznego modelu przeżycia, wspomnianą w poprzednim punkcie. Warto zaznaczyć, że własność ta nie jest w ogólności prawdziwa dla  $n > 2^{16}$ , więc w tym przypadku własności rozkładów otrzymanych za pomocą wzorów (1) oraz (2) mogą się różnić pomimo zastosowania tej samej kopuli.

#### 4. Rozkład prawdopodobieństwa zaktualizowanej wartości świadczeń

W tej części pracy zostanie zbadane to, w jaki sposób przyjęta w modelowaniu struktura zależności wektora  $(T_1(x_1), \dots, T_m(x_m))$  wpływa na rozkład prawdopodobieństwa zaktualizowanej wartości przyszłych świadczeń wynikających z umowy ubezpieczenia dla wielu osób. Do tego celu zostaną wykorzystane narzędzia matematyczne omówione w poprzednich punktach.

Będziemy rozważać umowy ubezpieczenia, dla których wartość terażniejsza przyszłych świadczeń jest postaci  $PV = b(T)$ , gdzie  $T$  jest zmienną losową (być może wektorową) opisującą czas aktywności ubezpieczonego statusu, a  $b$  pewną mierzalną funkcją rzeczywistą. Zostaną uwzględnione ubezpieczenia w wersji ciągłej oraz w wersji dyskretnej (ze świadczeniem wypłacanym w momencie będącym wielokrotnością ustalonego okresu bazowego, np. miesiąca).  $DF(t_1, t_2)$  będzie oznaczać wartość w momencie  $t_1$  jednostkowego przepływu pieniężnego następującego w momencie  $t_2$ , natomiast symbolem  $[t]$  oznaczymy liczbę pełnych okresów bazowych zakończonych do momentu  $t$ . W tabeli 1 zostały przedstawione przykłady występujących w praktyce ubezpieczeń na życie oraz odpowiadające im funkcje  $b(t)$ , przy założeniu, że suma ubezpieczenia jest równa 1. W przypadku ubezpieczeń na wypadek śmierci oraz rent życiowych zostały przedstawione dwie wersje – ciągła (pierwszy wiersz) oraz dyskretna (drugi wiersz). Przez  $a(s)$  oznaczono wysokość płatności renty w momencie  $s$ . We wszystkich przedstawionych umowach  $T$  jest jednowymiarową zmienną losową oznaczającą długość życia ubezpieczonego lub czas trwania statusu.

---

<sup>16</sup> P. Georges, A.-G. Lamy, E. Nicolas, G. Quibel, T. Roncalli, *Multivariate Survival Modelling: A Unified Approach with Copulas*, 2001, <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1032559> (dostęp: 4.08.2014).

**Tabela 1. Wybrane rodzaje ubezpieczenia i odpowiadające im funkcje  $b(t)$** 

Rodzaj ubezpieczenia	$PV$	$b(t)$
Ubezpieczenie dożywotnie na wypadek śmierci	$DF(0, T)$	$DF(0, t)$
	$DF(0, [T]+1)$	$DF(0, [t]+1)$
Ubezpieczenie terminowe ( $n$ -okresowe) na wypadek śmierci	$DF(0, T)\mathbf{1}(T < n)$	$DF(0, t)\mathbf{1}(t < n)$
	$DF(0, [T]+1)\mathbf{1}(T < n)$	$DF(0, [t]+1)\mathbf{1}(t < n)$
Ubezpieczenie na dożycie do momentu $h$	$DF(0, h)\mathbf{1}(T \geq h)$	$DF(0, h)\mathbf{1}(t \geq h)$
Renta życiowa	$\int_0^T a(s)DF(0, s)ds$	$\int_0^t a(s)DF(0, s)ds$
	$\sum_{k=0}^{[T]} a(k)DF(0, k)$	$\sum_{k=0}^{[t]} a(k)DF(0, k)$

Źródło: opracowanie własne.

Warto zwrócić uwagę na fakt, że dla powyższych przykładów funkcja  $b$  jest:

- 1) monotoniczną (niemalejącą lub nierosnącą) funkcją ciągłą albo
- 2) prawostronnie ciągłą, niemalejącą funkcją schodkową postaci

$$b(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \mathbf{1}(t \in [a_k, a_{k+1})),$$

gdzie  $(b_k)$  jest niemalejącym ciągiem liczbowym, a  $(a_k)$  jest ciągiem rosnącym, albo

- 3) lewostronnie ciągłą, nierosnącą funkcją schodkową postaci

$$b(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \mathbf{1}(t \in (a_k, a_{k+1}]),$$

gdzie  $(c_k)$  jest nierosnącym ciągiem liczbowym, a  $(a_k)$  ciągiem rosnącym. Przykładowo, dyskretna renta życiowa płatna co miesiąc z góry kwalifikuje się

do przypadku 2, przy czym  $a_k = \frac{k}{12}$  oraz  $b_k = \sum_{l=0}^k c_l \cdot DF\left(0, \frac{l}{12}\right)$ , gdzie  $c_l$  jest wyso-

kością płatności w momencie  $k$ .

Zwróćmy uwagę na fakt, że dzięki monotoniczności funkcji  $b$  przy wykorzystaniu twierdzenia 3.3 można stwierdzić, w jaki sposób relacja porządku na zmiennych losowych opisujących czas trwania życia ubezpieczonego przekłada

się na rozkład wartości bieżącej świadczeń z umowy ubezpieczenia. W związku z tym w dalszej części pracy skoncentrujemy się na ubezpieczeniach, którym odpowiada funkcja  $b$  należąca do którejś z powyższych klas, i podamy kilka modeli, w których można wskazać relację porządku stochastycznego.

#### 4.1. Ubezpieczenia indywidualne

Ważnym przykładem takiego modelu, który potraktujemy jako punkt wyjścia do dalszych rozważań, jest model wymieralności, spotykany w ubezpieczeniach indywidualnych. W modelu tym zakładamy, że długość życia noworodka losowo wybranego z populacji jest opisana zmienną losową  $T_0$  o ustalonym rozkładzie bazowym, natomiast dalsze trwanie życia osoby w wieku  $x$  jest opisane zmienną losową  $T(x)$ . Funkcja przeżycia dla zmiennej  $T(x)$  (oznaczana tradycyjnie  ${}_t p_x$ ) jest dana wzorem:

$${}_t p_x = \mathbb{P}(T(x) \geq t) = \mathbb{P}(T_0 \geq x + t | T_0 \geq x) = \exp\left(-\int_x^{x+t} \mu_0(s) ds\right). \quad (4)$$

Funkcja  $\mu_0(s)$  jest intensywnością wymierania, daną wzorem  $\mu_0(s) = \frac{f_0(s)}{\bar{F}_0(s)}$ ,

gdzie  $f_0$  oraz  $\bar{F}_0$  oznaczają odpowiednio gęstość i funkcję przeżycia zmiennej  $T_0$ . Ze wzoru (4) wynika, że dla każdego  $t > 0$  mamy

$$\frac{\partial}{\partial x} {}_t p_x = -{}_t p_x \cdot (\mu_0(x) - \mu_0(x+t)).$$

Wynika stąd, że jeśli  $\mu_0(s)$  jest funkcją rosnącą, to dla każdego  $t > 0$  oraz  $y \geq x$  zachodzi

$${}_t p_x \geq {}_t p_y,$$

a stąd, zgodnie z definicją dominacji stochastycznej pierwszego rzędu, wynika, że  $T(x) \succeq_{ST} T(y)$ . Zwróćmy uwagę na fakt, że podany warunek na funkcję  $\mu_0$  ma naturalną interpretację w ubezpieczeniach na życie, jako że odzwierciedla starzenie się ubezpieczonego. Wniosek ten formalizuje intuicję, że ryzyko związane np. z umową terminowego ubezpieczenia na życie jest tym większe, im starszy jest ubezpieczony.

## 4.2. Ubezpieczenia dla wielu osób

Przejdziemy teraz do analizy rozkładu zmiennej  $T$  w ubezpieczeniach dla wielu osób. W ubezpieczeniach tego rodzaju najczęściej będziemy mieli  $T = f(T_1(x_1), \dots, T_m(x_m))$  dla pewnej funkcji  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Ponieważ trudno jest opisać rozkład zmiennej losowej  $T$  w pełnej ogólności, rozważania rozpoczniemy od dwóch najczęściej spotykanych w literaturze przypadków – statusu wspólnego życia (ang. *joint-life status*) oraz statusu ostatniego żyjącego (ang. *last survivor status*). Następnie prześledzimy to, jak otrzymane wyniki można wykorzystać do opisu bardziej złożonych produktów, np. renty wdowiej. Za pracą K. Gali<sup>17</sup> będziemy rozważać model, w którym rozkład łączny wektora  $(T_1(x_1), \dots, T_m(x_m))$  jest określony przy użyciu kopuli. Warto w tym miejscu rozważań podkreślić fakt, że ubezpieczeni mogą różnić się nie tylko wiekiem, ale również bazowym rozkładem długości życia. Tam, gdzie konieczne będzie podkreślenie zależności od parametru, będzie on podawany w indeksie górnym.

**Status wspólnego życia** pozostaje aktywny, dopóki żyją wszyscy członkowie grupy. Czas trwania tego statusu jest więc opisany zmienną losową  $T_{JL} = \min(T_1(x_1), \dots, T_m(x_m))$ . Funkcję przeżycia tej zmiennej możemy zapisać wzorem:

$$\bar{F}_{T_{JL}}(t) = 1 - F_{T_{JL}}(t) = \mathbb{P}(T_1(x_1) > t, \dots, T_m(x_m) > t) = \hat{C}_\theta(\bar{F}_1(t), \dots, \bar{F}_m(t)), \quad (5)$$

gdzie  $\hat{C}_\theta$  jest kopulą przeżycia rozkładu wektora  $(T_1(x_1), \dots, T_m(x_m))$ , a  $\bar{F}_i$  funkcjami przeżycia rozkładów brzegowych, tj. rozkładów zmiennych  $T_i(x_i)$ . Ze wzoru (5) wynika, że:

1. Jeśli rodzina  $\{\hat{C}_\theta\}$  jest uporządkowana rosnąco ze względu na parametr  $\theta$ , to dla  $\theta' \geq \theta$  dla każdego  $t$  mamy  $\bar{F}_{T_{JL}}^\theta(t) \leq \bar{F}_{T_{JL}}^{\theta'}(t)$ , a zatem  $F_{T_{JL}}^\theta(t) \geq F_{T_{JL}}^{\theta'}(t)$ . Zgodnie z definicją dominacji stochastycznej pierwszego rzędu, oznacza to, że  $T_{JL}^\theta \preceq_{ST} T_{JL}^{\theta'}$ .
2. Jeżeli rozkład zmiennej losowej  $T_i(x_i)$  (dany dystrybuantą  $F_i^{x_i}$ ) jest taki, że dla  $x'_i \geq x_i$  oraz każdego  $t > 0$  zachodzi  $F_i^{x'_i}(t) \leq F_i^{x_i}(t)$  (dominacja stochastyczna ze względu na wiek), to zachodzi  $T_{JL}^{x'_i} \preceq_{ST} T_{JL}^{x_i}$ . Wynika to z faktu, że kopula jako dystrybuanta rozkładu wielowymiarowego jest niemalejąca ze względu na każdy ze swoich argumentów, a więc warunek  $\bar{F}_i^{x'_i}(t) \geq \bar{F}_i^{x_i}(t)$  implikuje to, że  $\bar{F}_{T_{JL}}^{x'_i}(t) \geq \bar{F}_{T_{JL}}^{x_i}(t)$  dla każdego  $t$  oraz  $x_i \leq x'_i$ .

<sup>17</sup> K. Gala, op.cit.

Widać więc, że w przedstawionym modelu zachodzi uporządkowanie stochastyczne zmiennych  $T_{JL}$  ze względu na siłę zależności reprezentowanej przez kopułę przeżycia (rosnące) oraz wiek ubezpieczonego (malejące).

**Status ostatniego żyjącego** wygasa w momencie ostatniej śmierci w grupie, zatem czas trwania tego statusu jest opisany zmienną losową  $T_{LS} = \max(T_1(x_1), \dots, T_m(x_m))$ . Dystrybuantę tej zmiennej losowej możemy zapisać jako:

$$F_{T_{LS}}(t) = \mathbb{P}(T_1(x_1) \leq t, \dots, T_m(x_m) \leq t) = C_\theta(F_1(t), \dots, F_m(t)), \quad (6)$$

gdzie  $C_\theta$  jest kopułą rozkładu wektora  $(T_1(x_1), \dots, T_m(x_m))$ , a  $F_i$  dystrybuantami jego rozkładów brzegowych. Analogicznie do statusu wspólnego życia możemy wyciągnąć następujące wnioski:

1. Jeśli rodzina  $\{C_\theta\}$  jest uporządkowana rosnąco ze względu na parametr  $\theta$ , to dla  $\theta' \geq \theta$  i każdego  $t$  mamy  $F_{T_{LS}}^\theta(t) \leq F_{T_{LS}}^{\theta'}(t)$ , zatem  $T_{LS}^\theta \succeq_{ST} T_{LS}^{\theta'}$ .
2. Jeżeli rozkład zmiennej losowej  $T(x_i)$  (dany dystrybuantą  $F_i^{x_i}$ ) jest taki, że dla  $x'_i \geq x_i$  oraz każdego  $t > 0$  zachodzi  $F_i^{x'_i}(t) \leq F_i^{x_i}(t)$  (dominacja stochastyczna ze względu na wiek), to zachodzi  $T_{LS}^{x'_i} \preceq_{ST} T_{LS}^{x_i}$ .

W tym modelu zachodzi więc malejące uporządkowanie stochastycznej zmiennych  $T_{LS}$  ze względu na siłę zależności reprezentowanej przez kopułę oraz wiek ubezpieczonego.

Powyższe własności przekładają się bezpośrednio na własności rozkładu zaktualizowanej wartości świadczeń z umowy ubezpieczenia, o czym mówi kolejne twierdzenie.

**Twierdzenie 4.1.** Niech długość życia członków ubezpieczonej grupy będzie opisana wektorem losowym  $(T_1(x_1), \dots, T_m(x_m))$ , a  $b$  będzie niemalejącą funkcją określającą wartość bieżącą świadczeń z umowy ubezpieczenia. Prawdziwe są następujące stwierdzenia:

1. Dla statusu wspólnego życia o strukturze zależności opisanej wzorem (5) zmienne losowe  $PV^\theta = b(T_{JL}^\theta)$  są uporządkowane rosnąco ze względu na siłę zależności oraz uporządkowane malejąco ze względu na wiek ubezpieczonych.
2. Dla statusu ostatniego żyjącego o strukturze zależności opisanej wzorem (7) zmienne losowe  $PV^\theta = b(T_{LS}^\theta)$  są uporządkowane malejąco ze względu na siłę zależności oraz wiek ubezpieczonych.

Dowód powyższego twierdzenia opiera na się na wcześniejszych obserwacjach dotyczących zmiennych losowych  $T_{JL}$  i  $T_{LS}$  oraz zastosowaniu twierdzenia 3.3. Dla nierosnącej funkcji  $b$  wspomniane wyżej uporządkowanie ulega odwróceniu. Przejdziemy teraz do omówienia konsekwencji opisanych powyżej wyników.

### 4.3. Wpływ na miary ryzyka

Zgodnie z twierdzeniem 3.4, relacja dominacji stochastycznej przenosi się na relację między monotonicznymi, obiektywnymi miarami ryzyka. Twierdzenie 3.1 pokazuje, że takimi miarami są np. wartość oczekiwana oraz wartość narażona na ryzyko (*Value at Risk* – VaR), zdefiniowana jako kwantyl rozkładu prawdopodobieństwa. Oznacza to, że np. dla statusu wspólnego życia i ubezpieczeń z niemalejącą funkcją  $b$  (np. rentowego) składka jednorazowa ustalona według zasady wartości oczekiwanej bądź zasady kwantylowej jest rosnącą funkcją siły zależności i malejącą funkcją wieku ubezpieczonych. Warto zwrócić uwagę na fakt, że wniosek ten stanowi uogólnienie wyników analizy obliczeniowej przedstawionej w pracy K. Gali<sup>18</sup> i pokazuje, że pewne relacje między siłą zależności a składką występują w szerokiej klasie ubezpieczeń, także dla grup liczących więcej niż dwie osoby. Ponadto, ze względu na ograniczenia Fréchet–Hoeffdinga – wzór (3) – w przypadku dwuwymiarowym dla dodatnio uporządkowanych zmiennych  $PV$  mamy:

$$\rho_{\min} \leq \rho(PV) \leq \rho_{\max}, \quad (7)$$

gdzie  $\rho_{\min}$  oraz  $\rho_{\max}$  oznaczają wartość miary ryzyka wyznaczoną przy przyjęciu we wzorach (5) oraz (6) struktury zależności opisanej odpowiednio funkcjami  $W$  oraz  $M$ .

Wzór (7) może służyć do oceny ryzyka w sytuacji, gdy ubezpieczyciel nie dysponuje pełną informacją dotyczącą struktury zależności, i pozwala określić zakres możliwych wartości wybranej miary ryzyka. Jeśli natomiast ubezpieczyciel dysponuje dodatkową wiedzą, np. że pewna miara siły zależności (np.  $\tau$ -Kendalla) zawiera się w przedziale  $[a, b]$ , to ze względu na monotoniczność relacji między siłą zależności a wybranymi miarami ryzyka można przedział  $[\rho_{\min}, \rho_{\max}]$  zawęzić do przedziału  $[\rho_a, \rho_b]$ , gdzie  $\rho_x$  jest wartością miary ryzyka wyznaczoną przy mierze zależności równej  $x$ .

Zwróćmy również uwagę na to, że uzyskane wyniki pokazują, że na podstawie konstrukcji produktu można określić, czy przyjęcie założenia dotyczącego niezależności prowadzi do zbyt niskiego lub zbyt wysokiego oszacowania ryzyka związanego z umową ubezpieczenia. Przykładowo, dla statusu wspólnego życia w przypadku występowania zależności dodatniej, zakładając niezależność długości życia ubezpieczonych, zakład ubezpieczeń ustala zbyt niską składkę netto

<sup>18</sup> Ibidem.

dla ubezpieczeń rentowych, natomiast składka netto obliczona w ten sposób dla ubezpieczeń na wypadek śmierci jest za wysoka. Oznacza to, że w drugim przypadku nie jest konieczny dodatkowy narzut bezpieczeństwa, wynikający z nieuwzględnienia w modelu struktury zależności.

#### 4.4. Ubezpieczenia ze składką regularną

W ubezpieczeniu ze składką regularną wysokość składki będzie określona wzorem  $P = \frac{JS}{a_w}$ , gdzie  $JS$  oznacza składkę jednorazową, a  $a_w$  jest ogólnym

oznaczeniem wartości aktuarialnej renty płaconej przez status  $w$  – może to być np. renta dla statusu wspólnego życia. Wynika stąd, że siła zależności w modelu oddziałuje na wysokość składki regularnej dwoma kanałami – przez licznik oraz przez mianownik. Jeśli wysokość składki jednorazowej zmienia się w przeciwnym kierunku niż dla renty, to efekty te będą się wzajemnie wzmacniać. Przykładowo, zgodnie z twierdzeniem 4.1, jednorazowa składka netto ( $JSN$ ) za ubezpieczenie na wypadek śmierci dla statusu wspólnego życia maleje wraz ze wzrostem siły zależności, natomiast wartość renty związanej z tym statusem rośnie. W związku z tym wysokość składki regularnej jest w tym przypadku malejącą funkcją siły zależności. Jednocześnie, korzystając ze wzoru (7), można określić zakres możliwych wartości dla tej wielkości.

#### 4.5. Renta wdowia

Renta wdowia jest rentą życiową obejmującą dwie osoby  $x$  i  $y$ , przy czym wypłaty rozpoczynają się po śmierci osoby  $x$  i trwają do momentu śmierci osoby  $y$ . Składka jednorazowa netto za tę rentę jest tradycyjnie oznaczana przez  $\ddot{a}_{x|y}$  w wersji dyskretnej oraz  $\bar{a}_{x|y}$  w wersji ciągłej. Można pokazać, że dla obu wersji zachodzi zależność:

$$a_{x|y} = a_y - a_{x:y}, \quad (8)$$

gdzie  $a$  jest ogólnym oznaczeniem aktuarialnej wartości renty, a  $x:y$  oznacza status wspólnego życia. Ze wzoru (8) wynika, że wybrane własności statusu wspólnego życia przenoszą się na status renty wdowiej. Po pierwsze, relacja między siłą zależności a składką jednorazową netto dla statusu wspólnego życia przenosi się na rentę wdowią z przeciwnym kierunkiem. Po drugie, analogiczna relacja występuje dla wieku osoby  $x$ . Przy typowych założeniach  $JSN$  dla statusu



wspólnego życia jest malejącą funkcją  $x$ , zatem dla renty wdowiej JSN rośnie. Zależność od  $y$  jest w tym przypadku bardziej skomplikowana i nie można wskazać ogólnej relacji łączącej ten parametr i miary ryzyka.

## 5. Wariancja wartości bieżącej świadczeń

Dotychczasowe rozważania dotyczyły uporządkowania pewnych rodzin zmiennych losowych ze względu na relację dominacji stochastycznej. Relacja ta, choć użyteczna do porównywania rozkładów pod względem miar położenia, kwantyli oraz wybranych miar ryzyka, nie pozwala jednak na wnioskowanie o relacji między zmiennością badanych zmiennych losowych, mierzonej np. za pomocą wariancji. Jako przykład można podać zmienne losowe  $X$  oraz  $Y = X + a$ , gdzie  $a > 0$ . Wtedy  $Y \succeq_{ST} X$ , ale  $Var(X) = Var(Y)$  dla każdego  $a > 0$ . Zagadnienie to jest o tyle istotne, że popularne metody ustalania składki polegają na przyjęciu narzutu bezpieczeństwa ponad wartość oczekiwaną proporcjonalnego do wariancji lub odchylenia standardowego.

Ze względu na trudność związaną z badaniem opisanego zagadnienia w pełnej ogólności w niniejszym punkcie skupimy się na badaniu wariancji wartości bieżącej świadczeń w ubezpieczeniu modelowanym za pomocą niejednorodnego łańcucha Markowa z czasem dyskretnym<sup>19</sup>. W takim modelu stan grupy jest reprezentowany przez  $m$ -elementowy wektor określający, w którym stanie elementarnym (życie lub zgon) znajdują się poszczególni ubezpieczeni. Kolejne stany numerujemy za pomocą liczb naturalnych, wprowadzając przestrzeń stanów  $\mathbb{S} = \{1, \dots, l\}$ , gdzie  $l = 2^m$ , a zmiany stanów są modelowane za pomocą łańcucha Markowa  $(X_k)_{k=0}^{\infty}$ . Wprowadzamy również ciąg wektorów odpowiadających rozkładowi bezwarunkowym  $\mathbf{d} = \{\mathbf{d}_k\}_{k=0}^{\infty}$ , ciąg wektorów reprezentujących świadczenia wypłacane w związku z pobytem w danym stanie  $\mathbf{b} = \{\mathbf{b}_k\}_{k=0}^{\infty}$ , ciąg macierzy przejścia w jednym kroku  $\mathbf{P} = \{\mathbf{P}_k\}_{k=1}^{\infty}$  oraz ciąg macierzy reprezentujących świadczenia wypłacane przy zmianie stanu łańcucha  $\mathbf{w} = \{\mathbf{w}_k\}_{k=1}^{\infty}$ . Przez  $d_{k,s}$  oraz  $b_{k,s}$  będziemy oznaczać  $s$ -tą współrzędną wektorów  $\mathbf{d}_k$  i  $\mathbf{b}_k$ , natomiast  $w_k^{s,r}$  oraz  $p_k^{s,r}$  będą oznaczać odpowiednio element  $(s,r)$  macierzy  $\mathbf{w}_k$  oraz  $\mathbf{P}_k$ .

<sup>19</sup> Por. ibidem s. 51–52; W. Bijak, op.cit., s. 11–16.

Wartość zaktualizowaną przyszłych świadczeń możemy przedstawić jako:

$$PV = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^l DF(0, k) b_{k,s} 1(X_k = s) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^l \sum_{r=1}^l DF(0, k) w_k^{s,r} 1(X_{k-1} = s, X_k = r) =: S + R \quad (9)$$

gdzie  $S = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^l DF(0, k) b_{k,s} 1(X_k = s)$  odpowiada świadczeniom związanym z por-  
bytem łańcucha w określonym stanie, natomiast

$R = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^l \sum_{r=1}^l DF(0, k) w_k^{s,r} 1(X_{k-1} = s, X_k = r)$  jest zaktualizowaną wartością przyszłych

przepływów pieniężnych wynikających z przejścia łańcucha między stanami. Zwróćmy uwagę na fakt, że w praktyce możemy założyć, że dla zmiennej  $S$  mamy sumowanie po  $k = 0, 1, \dots, N-1$ , natomiast dla zmiennej  $R$  sumowanie odbywa się dla  $k = 1, 2, \dots, M$ , dla pewnych liczb całkowitych  $N$  i  $M$ .

Na podstawie wzoru (9) można wyznaczyć wartość oczekiwaną zmiennej  $PV$ :

$$\mathbb{E}PV = \mathbb{E}S + \mathbb{E}R = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{s=1}^l DF(0, k) b_{k,s} \mathbb{P}(X_k = s) + \\ + \sum_{k=1}^M \sum_{s=1}^l \sum_{r=1}^l DF(0, k) w_k^{s,r} \mathbb{P}(X_{k-1} = s, X_k = r). \quad (10)$$

Macierzową reprezentację wzoru (10) można znaleźć w pracy K. Gali<sup>20</sup>.

Wyznamy teraz wariancję zaktualizowanej wartości świadczeń. Ze wzoru (9) wynika, że w praktyce zmienna losowa  $PV$  jest skończoną kombinacją liniową pewnych zmiennych losowych, możliwe jest zatem zapisanie wzoru na wariancję w postaci macierzowej. Posłużymy się do tego następującym lematem, znanym z teorii prawdopodobieństwa.

**Lemat 5.1.** Niech  $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$  będzie wektorem losowym o współrzędnych całkowalnych z kwadratem i niech  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ . Określmy zmienną losową  $H$  wzorem

$$H = \langle \mathbf{a}, \mathbf{Y} \rangle = \sum_{i=1}^n a_i Y_i.$$

<sup>20</sup> K. Gala, op.cit., s. 59.

Wtedy

$$\text{Var}(H) = \mathbf{a} \cdot \text{Cov}(\mathbf{Y}) \cdot \mathbf{a}^T,$$

gdzie  $\text{Cov}(\mathbf{Y}) = [\text{Cov}(Y_i, Y_j)]_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$  jest macierzą wariancji-kowariancji wektora  $\mathbf{Y}$ .

Niech teraz  $\mathbf{H}$  będzie wektorem długości  $N \cdot l + l \cdot l \cdot M$  powstałym przez ustawienie w ciąg zmiennych losowych  $\mathbf{1}(X_k = s)$  dla  $k = 0, \dots, N-1$  i  $s = 1, \dots, l$  oraz zmiennych  $\mathbf{1}(X_{k-1} = s, X_k = r)$  dla  $k = 1, \dots, M$ ,  $s = 1, \dots, l$  oraz  $r = 1, \dots, l$ . Zdefiniujemy teraz wektor  $\mathbf{a}$  (tej samej długości co  $\mathbf{H}$ ) w następujący sposób:

$$a_i = \begin{cases} DF(0, k) b_{k,s} & \text{gdzie } H_i = \mathbf{1}(X_k = s) \\ DF(0, k) w_k^{s,r} & \text{gdzie } H_i = \mathbf{1}(X_{k-1} = s, X_k = r) \end{cases}$$

dla  $i = 1, \dots, N \cdot l + l \cdot l \cdot M$ . Na mocy lematu 5.1 możemy napisać

$$\text{Var}(PV) = \mathbf{a} \cdot \text{Cov}(\mathbf{H}) \cdot \mathbf{a}^T. \quad (11)$$

Elementy macierzy  $\text{Cov}(\mathbf{H})$  można łatwo wyznaczyć na podstawie rozkładów bezwarunkowych oraz prawdopodobieństw przejścia łańcucha  $\{X_n\}$ . Przykładowo, dla ustalonego okresu  $k$  oraz stanów  $s$  i  $r$  mamy

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\mathbf{1}(X_k = s), \mathbf{1}(X_k = r)) &= \mathbb{P}(X_k = s, X_k = r) - \mathbb{P}(X_k = s) \mathbb{P}(X_k = r) = \\ &= \begin{cases} d_{k,s} (1 - d_{k,s}) & \text{jeśli } r = s \\ -d_{k,s} d_{k,r} & \text{jeśli } r \neq s \end{cases}. \end{aligned}$$

Z powyższych rozważań płynie wniosek, że w omawianym modelu wariancję zaktualizowanej wartości świadczeń można obliczyć numerycznie, nie odwołując się do metod symulacyjnych. Pozwala to istotnie uprościć analizę ryzyka związanego z umową ubezpieczenia.

## 6. Przykład numeryczny

Jako uzupełnienie powyższych rozważań przedstawimy teraz przykład numeryczny. Ma on na celu pokazanie, że badanie rozkładu prawdopodobieństwa wartości bieżącej świadczeń może być użyteczne w ocenie ryzyka, także

w zakresie wykraczającym poza omawianą w tej pracy relację dominacji stochastycznej. Rozważać będziemy rentę wdowią (opisaną w punkcie czwartym), w której osoba  $y$  otrzymuje po śmierci osoby  $x$  rentę dożywotnią. Przyjęte zostały następujące założenia:

1. Dalsze trwanie życia osób  $x$  i  $y$  jest modelowane za pomocą wektora losowego  $(T(x), T(y))$ .
2. Rozkłady zmiennych  $T(x)$  oraz  $T(y)$  są wyznaczone na podstawie publikowanych przez Główny Urząd Statystyczny tablic trwania życia dotyczących 2011 r. Zakładamy, że osoba  $x$  jest mężczyzną w wieku 65 lat, a osoba  $y$  – 60-letnią kobietą. W celu otrzymania rozkładu ciągłego została zastosowana interpolacja jednostajna (założenie UDD – *Uniform Distribution of Deaths*). Można pokazać, że przy tych założeniach  $T(y) \succeq_{ST} T(x)$ .
3. Rozkład łączny jest modelowany za pomocą wprowadzonej w punkcie trzecim kopuli Claytona.
4. Techniczna roczna efektywna stopa procentowa jest stała i wynosi 3%, a odsetki są kapitalizowane miesięcznie.
5. Pierwsza płatność renty przypada na początek okresu następującego po okresie, w którym zmarła osoba  $x$ , a następne płatności następują na początek kolejnych miesięcy, o ile osoba  $y$  ciągle żyje.
6. Liczba wygenerowanych realizacji wektora  $(T(x), T(y))$  wynosi  $N = 1\,000\,000$ .

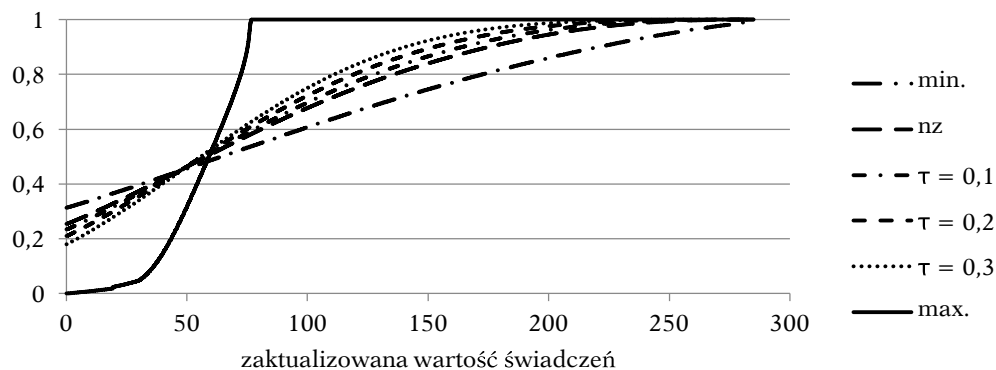
Ze wzoru (8) wynika, że składkę jednorazową za to ubezpieczenie możemy łatwo obliczyć jako różnicę składek za dwie renty. Jednocześnie korzystając z przedstawionych w punkcie czwartym wyników, można podać, jak składka ta jest powiązana z siłą zależności między długością życia ubezpieczonych. Zwróćmy uwagę na to, że w tym ubezpieczeniu wartość bieżąca świadczeń zależy od dwuwymiarowej zmiennej losowej  $T = (T(x), T(y))$  i wyraża się wzorem:

$$PV = b(T(x), T(y)) = \frac{1 - v_{12}^{\lceil T(y) \rceil + 1}}{1 - v_{12}} - \frac{1 - v_{12}^{\lceil \min(T(x), T(y)) \rceil + 1}}{1 - v_{12}}, \quad (12)$$

gdzie  $v_{12}$  jest miesięcznym czynnikiem dyskontującym. Ze względu na dość skomplikowaną postać tego wzoru analiza rozkładu zmiennej  $PV$  wymaga wykorzystania metod symulacyjnych. Symulacje polegały na generowaniu realizacji wektora losowego  $(T(x), T(y))$  o zadanym rozkładzie wielowymiarowym<sup>21</sup> i obliczaniu na jej podstawie realizacji zmiennej  $PV$  za pomocą wzoru (12).

<sup>21</sup> Opis metod komputerowego generowania realizacji wektora losowego o rozkładzie danym kopulą można znaleźć np. w pracy: R.B. Nelsen, op.cit., s. 40–42.

Na rysunku 1 zostały przedstawione dystrybuanty empiryczne rozkładu wartości bieżącej świadczeń w rozważnym ubezpieczeniu wyznaczone przy strukturach zależności odpowiadających górnemu (max.) oraz dolnemu (min.) ograniczeniu Fréchet–Hoeffdinga, niezależności (nz) oraz wartościom  $\tau$ -Kendalla ze zbioru  $\{0,1;0,2;0,3\}$ .



**Rysunek 1. Rozkład prawdopodobieństwa zaktualizowanej wartości świadczeń dla renty wdowiej przy różnych strukturach zależności**

Źródło: opracowanie własne.

Zauważmy, że w powyższych rozkładach występuje dodatnia masa prawdopodobieństwa w zerze – odpowiada ona sytuacji, w której nie nastąpi żadna płatność renty. Z tego względu warto rozważyć jednocześnie zarówno cały rozkład, jak i jego część dodatnią. Zwróćmy uwagę na fakt, że ze wzrostem siły zależności  $\mathbb{P}(PV = 0)$  maleje, co wynika z tego, że równocześnie rośnie prawdopodobieństwo  $\mathbb{P}(T(x) \leq T(y))$ , które dla górnego ograniczenia Fréchet–Hoeffdinga, wobec relacji  $T(x) \preceq_{st} T(y)$ , jest równe 1. Wtedy  $\mathbb{P}(PV = 0) = 0,00006$  odpowiada prawdopodobieństwu, że zgon obojga ubezpieczonych osób nastąpi w tym samym miesiącu. Jeśli natomiast rozkład zmiennej  $T(x)$  byłby dominujący, to rozkład wartości świadczeń miałby całą masę skoncentrowaną w zerze.

W tabeli 2 przedstawiono statystyki opisowe dla rozkładu zaktualizowanej wartości świadczeń i jego części dodatniej. Zostały obliczone: średnia arytmetyczna ( $\bar{x}$ ), wariancja ( $S^2$ ), odchylenie standardowe ( $std$ ), współczynnik asymetrii ( $A$ ), współczynnik zmienności losowej ( $CV = \frac{std}{\bar{x}}$ ), a także kwantyle wybranych rzędów.

Tabela 2. Statystyki opisowe rozkładu wartości bieżącej świadczeń dla renty wdowiej

	Cały rozkład						Część dodatnia					
	min.	nz	$\tau = 0,1$	$\tau = 0,2$	$\tau = 0,3$	max.	min.	nz	$\tau = 0,1$	$\tau = 0,2$	$\tau = 0,3$	max.
$\bar{x}$	5,6	71,9	69,1	66,1	63,4	56,9	124,7	96,5	90,2	83,7	77,2	56,9
$S^2$	7 473,5	4 701,1	4 114,7	3 522,6	2 928,7	239,1	6 008,0	3 936,5	3 467,0	2 990,2	2 500,1	237,2
std	86,5	68,6	64,2	59,4	54,1	15,5	77,5	62,7	58,9	54,7	50,0	15,4
CV	100,9%	95,3%	92,9%	89,7%	85,3%	27,2%	62,1%	65,0%	65,3%	65,4%	64,7%	27,1%
A	0,65	0,70	0,70	0,70	0,67	-0,77	0,29	0,51	0,56	0,61	0,63	-0,75
min.	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,6	0,3	0,3	0,3	0,3	1,0
0,25	0,0	0,0	4,2	9,3	14,4	46,3	59,4	45,1	42,5	39,7	37,4	46,4
0,5	63,9	58,1	57,3	56,4	55,9	59,0	116,7	87,3	81,6	75,7	70,4	59,0
0,75	152,0	120,2	113,4	106,5	99,9	70,5	185,2	140,4	130,3	119,9	109,8	70,5
0,9	220,4	175,1	164,1	152,5	140,5	75,1	239,1	188,1	175,5	162,1	147,7	75,1
0,95	250,9	203,2	191,2	178,4	164,1	75,8	261,8	212,5	199,8	185,8	170,1	75,8
0,975	269,1	223,5	211,8	199,0	183,9	76,1	276,7	230,6	218,4	205,1	189,0	76,1
0,99	280,8	242,9	232,1	220,2	205,5	76,4	281,8	247,9	237,2	224,8	209,7	76,4
0,995	282,8	253,8	244,3	233,0	219,1	76,4	283,8	257,9	248,4	236,7	222,7	76,4
max.	284,8	284,8	284,8	284,8	283,8	76,8	284,8	284,8	284,8	284,8	283,8	76,8

Źródło: opracowanie własne.

Analiza uzyskanych wyników prowadzi do kilku wniosków. Po pierwsze, zgodnie z przewidywaniami teoretycznymi, JSN jest malejącą funkcją siły zależności między długością życia ubezpieczonych. Ten sam wniosek dotyczy części dodatniej rozkładu. Jednocześnie ograniczenia Fréchet–Hoeffdinga dostarczają oszacowania przedziału możliwych wartości dla JSN – w tym przypadku jest to przedział (56,87; 85,64), który jest dość szeroki. Jeśli ograniczymy się tylko do zależności dodatniej (która wydaje się naturalna w ubezpieczeniach dla wielu osób), to przedział ten skraca się do (56,87; 71,93), jest więc o prawie 50% krótszy. Znajomość takiego przedziału może być użyteczna dla ubezpieczyciela, który nie dysponuje danymi odpowiednimi do oceny siły zależności między długością życia ubezpieczonych.

Po drugie, mimo monotoniczności JSN nie występuje tutaj relacja dominacji stochastycznej między rozkładami. Warto zwrócić uwagę na fakt, że wraz z siłą zależności maleje prawdopodobieństwo, że nie dojdzie do żadnych wypłat, a także skraca się ogon rozkładu. Rośnie więc ryzyko, że dojdzie do wypłaty świadczenia, natomiast same wypłaty będą mniejsze. Oznacza to, że wpływ siły zależności na ryzyko może być zróżnicowany, przy czym pomiar ryzyka za pomocą jednej miary może nie dawać pełnego obrazu sytuacji. Określenie, czy występuje tu inna relacja porządku (np. dominacja stochastyczna rzędu wyższego niż 1), może być kierunkiem dalszych badań.

Po trzecie, wariancja jest w rozważanym przykładzie malejącą funkcją siły zależności. Warto zwrócić uwagę na duże zróżnicowanie współczynnika asymetrii, który może przyjmować wartości zarówno dodatnie, jak i ujemne. Zróżnicowane jest również zachowanie kwantyli – kwantyle wyższych rzędów maleją ze wzrostem siły zależności, podczas gdy kwantyle niższych rzędów (np. mediana) nie zachowują się monotonicznie.

Zaprezentowany przykład pokazuje, że analiza rozkładu wartości bieżącej świadczeń jest użytecznym narzędziem do oceny ryzyka w ubezpieczeniach dla wielu osób, a wykorzystanie tylko jednej miary ryzyka nie jest wystarczające. Podsumowując, należy stwierdzić, że przedstawione wyniki teoretyczne pozwalają wstępnie oszacować ryzyko związane z umową ubezpieczenia, podczas gdy analiza symulacyjna pozwala je zbadać bardziej szczegółowo.



## 7. Podsumowanie

W niniejszej pracy zostały zaprezentowane wybrane problemy związane z rozkładem prawdopodobieństwa wartości bieżącej świadczeń w ubezpieczeniach dla wielu osób. Przedstawiono model, w którym zależność między długością życia ubezpieczonych jest opisana kopułą i który następnie został wykorzystany do zbadania wpływu siły zależności i wieku ubezpieczonych na parametry rozkładu zaktualizowanej wartości świadczeń, takie jak wartość oczekiwana i kwantyle. Uzyskane rezultaty teoretyczne odnoszą się do szerokiej klasy ubezpieczeń, stanowiąc jednocześnie uogólnienie wyników obecnych w literaturze przedmiotu. Jako kierunki dalszych badań można wskazać poszukiwanie innych relacji porządku stochastycznego (np. dominacji stochastycznej wyższych rzędów), a także dokładniejszą analizę wpływu struktury zależności (np. zależności w ogonach rozkładu) na ryzyko związane z umową ubezpieczenia.

W sytuacji, gdy ubezpieczyciel nie dysponuje danymi pozwalającymi precyzyjnie określić struktury zależności między długością życia ubezpieczonych, przedstawione wyniki mogą być użyteczne np. do oceny ryzyka, umożliwiając oszacowanie interesujących go wielkości. Co więcej, dla szerokiej klasy produktów możliwe jest określenie tego, kiedy przyjęcie do wyceny założenia o niezależności długości życia ubezpieczonych wymaga uwzględnienia dodatkowego narzutu bezpieczeństwa, a kiedy narzut ten jest już zawarty w składce wyznaczonej przy tym założeniu. Wiedza ta może być przydatna dla ubezpieczyciela przy tworzeniu oferty produktowej.

## Bibliografia

- Bijak W., *Ubezpieczenia na życie jako niejednorodny łańcuch Markowa*, „Prace Naukowe” Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu, nr 312, Wrocław 2013, s. 9–28.
- Denuit M., Cornet A., *Multiple premium calculation with dependent future lifetimes*, „Journal of Actuarial Practice” 1999, vol. 7, s. 147–180.
- Denuit M., Dhaene J., Goovaerts M., Kaas R., *Actuarial Theory for Dependent Risks: Measures, Orders and Models*, Wiley, New York 2005.
- Denuit M., Dhaene J., Le Bailly de Tillegheem C., Teghem S., *Measuring the impact of a dependence among insured lifetimes*, „Belgian Actuarial Bulletin” 2001, no. 1, s. 18–39.

- Dhaene J., Vanneste M., Wolthuis H., *A Note on Dependencies in Multiple Life Statuses*, „Bulletin of the Swiss Association of Actuaries” 2000, vol. 1, s. 19–34.
- Frees E.W., Carriere J., Valdez E., *Annuity Valuation with Dependent Mortality*, „The Journal of Risk and Insurance” 1996, vol. 63, no. 2, s. 229–261.
- Gala K., *Analiza ubezpieczeń dla wielu osób z wykorzystaniem funkcji copula*, „Prace Naukowe” Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu, nr 312, Wrocław 2013, s. 50–66.
- Heilpern S., *Funkcje łączące*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. Oskara Langego, Wrocław 2007.
- Heilpern S., *Wyznaczanie wielkości renty w zależnych grupowych ubezpieczeniach na życie*, „Prace Naukowe” Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu nr 230, Wrocław 2011, s. 30–48.
- Kaas R., Goovaerts M.J., Dhaene J., Denuit M., *Modern Actuarial Risk Theory*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 2001.
- Nelsen R.B., *An Introduction to Copulas*, Springer, New York 2006.
- Norberg R., *Actuarial Analysis of Dependent Lives*, „Bulletin de l’Association Suisse des Actuaries” 1989, vol. 40, s. 243–254.
- Scarsini M., *On measures of concordance*, „Stochastica” 1984, vol. 8, s. 201–218.

## Źródła sieciowe

- Georges P., Lamy A.-G., Nicolas E., Quibel G., Roncalli T., *Multivariate Survival Modeling: A Unified Approach with Copulas*, 2001, <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1032559> (dostęp: 4.08.2014).
- Tablice trwania życia 2011*, Główny Urząd Statystyczny, <http://www.stat.gov.pl/2pol.xls> (dostęp: 4.08.2014).

\* \* \*

## On the probability distribution of the present value of benefits in multiple life insurance

### Summary

In the standard approach to actuarial analysis of multiple life insurance, the stochastic independence of future lifetimes of the insured is assumed. However, this assumption appears to be unrealistic. The aim of this paper is to analyse the properties of the probability distribution of the present value of future benefits in multiple life insurance in the case of dependent lifetimes. To this end, a model in which joint distribution of future lifetimes is modelled with a copula is used. The paper presents the results concerning the impact of the dependence structure on the expected value

---

and quantiles of the present value of future benefits. These results are a generalisation of the author's previous research and of some results found in the actuarial literature and may be useful when the insurer does not possess full knowledge on the dependence structure between future lifetimes of the insured.

**Keywords:** multiple life insurance, dependence, copula, stochastic ordering