Roczniki Kolegium Analiz Ekonomicznych
Zeszyt 31/2013

Joanna Sawicka

Model stochastycznej zależności liczby szkód i wartości pojedynczej szkody

Streszczenie

W literaturze dotyczącej metody zaufania (ang. credibility method) oraz wyceny składki na podstawie historii szkodowej ubezpieczonego (ang. experience rating) rozpatruje się zazwyczaj modele stochastycznej niezależności liczby szkód i wartości pojedynczej szkody. W niniejszym artykule rozważony zostanie natomiast model stochastycznej zależności liczby szkód i wartości pojedynczej szkody w populacji ubezpieczonych jednorodnych pod względem charakterystyk obserwowalnych. W artykule obliczona zostanie składka zaufania dla łącznej wartości szkód na podstawie liczby szkód, a także zaproponowana zostanie regresja pomocnicza pozwalająca na przetestowanie w prosty sposób, czy parametry ryzyka rozkładów liczby szkód i wartości pojedynczej szkody są stochastycznie zależne. Rozpatrzone zostaną ponadto przykładowe modele stochastycznej zależności liczby szkód i wartości pojedynczej szkody, a także uzyskane zostaną dla nich wielkości składek zaufania i teoretyczne wartości parametrów w regresji pomocniczej.

1. Wstęp

W ubezpieczeniach komunikacyjnych często stosowaną postacią składki netto jest predyktor liczby szkód przemnożony przez populacyjną wartość oczekiwaną wartości pojedynczej szkody. Jest to dobre przybliżenie ryzyka związanego z daną polisą w przypadku, gdy liczba szkód i wartość pojedynczej szkody są stochastycznie niezależne. Należałoby się jednak zastanowić, czy w rzeczywistości nie może pojawić się jakaś zależność między owymi zmiennymi, co powodowałoby, że standardowo stosowana formuła obliczania składki będzie niepoprawna. Przykładem sytuacji, w której założenie o niezależności liczby i wartości pojedynczych szkód będzie złamane, jest często cytowany model jazdy po mieście oraz model jazdy po autostradzie. Rozważmy kierowców jeżdżących po mieście oraz kierowców poruszających się głównie po autostradach – można się zapewne spodziewać, że pierwszy typ kierowców ze względu na większe natężenie ruchu w miastach oraz średnio niższą osiąganą prędkość będzie ponosić szkody częściej, ale prawdopodobnie będą to szkody o średnio mniejszej wartości niż w przypadku drugiego typu kierowców. Sugerowałoby to występowanie ujemnej korelacji między liczbą i wartością pojedynczych szkód, a jednocześnie oznaczałoby, że standardowa postać składki nie będzie w tym przypadku prawidłowa. Także pewne badania empiryczne (por. np. Pinquet, 1997) potwierdzają, że założenie o stochastycznej niezależności liczby szkód i wartości pojedynczej szkody w populacji kierowców może w praktyce nie być spełnione.

W literaturze teoretycznej poświęconej kalkulacji składki dla łącznej wartości szkód na podstawie liczby i/lub wartości szkód za pomocą metody zaufania (ang. *credibility method*) rozpatruje się przede wszystkim modele stochastycznej niezależności liczby szkód i wartości pojedynczej szkody (por. np. Goulet i in., 2006; Frees, 2003; Sawicka, 2011), rozszerzone ewentualnie o występowanie składnika regresyjnego w warunkowych wartościach oczekiwanych rozkładów (por. Frangos, Vrontos, 2001). Otto (2004) i Szprengiel (2007) zaproponowali modele opisujące pewne szczególne formy zależności parametrów ryzyka rozkładu liczby i wartości pojedynczej szkody, jednak w ich podejściu brakowało bardziej ogólnego spojrzenia na tę ważną z praktycznego punktu widzenia kwestię. Wielowymiarowy model zaufania umożliwiający jednoczesne obliczenie składki dla wektora skorelowanych ze sobą zmiennych losowych można znaleźć w monografii Bühlmanna i Gislera (2005). Podobny, choć nieco bardziej ogólny model został zaproponowany przez Englunda i in. (2008) – w modelu tym każda z modelowanych zmiennych zależy od nieznanego parametru ryzyka, który może zmieniać się w czasie. Jednakże w obu podanych przykładach głównym celem jest estymacja składki dla wektora zmiennych przy uwzględnieniu wszystkich dostępnych informacji. W żadnym z tych artykułów natomiast nie została podana postać składki dla łącznej wartości szkód obliczona na podstawie liczby szkód w przypadku ogólnej zależności między liczbą a wartością pojedynczej szkody. Z praktycznego punktu widzenia warto rozważyć obliczenie składki na podstawie tylko liczby szkód z następujących powodów:

1) Ze względu na często wydłużony proces likwidacji szkód dane dotyczące ostatecznych wartości szkód danego kierowcy mogą pojawiać się ze znacznym opóźnieniem, w związku z czym obliczenie predyktora na podstawie liczby szkód może być dużo wygodniejszym rozwiązaniem.

2) W typowych portfelach znaczna liczba kierowców nie ponosi w trakcie trwania polisy żadnej szkody, co powoduje, że rozkład liczby i wartości szkód mają punkt skupienia w zerze. W konsekwencji ubezpieczyciel dysponuje zazwyczaj stosunkowo niewielką liczbą obserwacji o większej od 0 wartości pojedynczej szkody, co może spowodować, że estymatory nieznanych parametrów i w konsekwencji także sama składka będą miały wysoką wariancję.

3) Zgodnie z Sawicką (2011), w przypadku, gdy posiadamy informacje zarówno o liczbie, jak i o wartościach szkód, a ponadto spełnione jest założenie o niezależności tych zmiennych, najefektywniejszym sposobem obliczania składki jest predykcja oparta zarówno na liczbie, jak i na łącznych wartościach szkód. Ten sposób predykcji prowadzi jednak do stosunkowo bardziej złożonej postaci składki, a ponadto wiąże się z większą liczbą nieznanych parametrów, które należy wyestymować.

4) W sytuacji, gdy mamy do czynienia z portfelem ubezpieczonych o skończonej historii szkodowej i spełnione jest założenie o niezależności liczby i wartości pojedynczych szkód, nie można w przypadku ogólnym wskazać, czy lepszym sposobem predykcji łącznej wartości szkód jest predykcja oparta tylko na liczbie, czy też tylko na wartości szkód (por. Sawicka, 2011). Przykładowo, gdy rozkład wartości pojedynczej szkody nie jest zróżnicowany między ubezpieczonymi, lepszym sposobem predykcji jest predykcja oparta tylko na liczbie szkód. Co istotne, predykcja oparta na liczbie szkód pozwala znacznie ograniczyć liczbę nieznanych parametrów koniecznych do estymacji, a ponadto nie pojawia się w tym przypadku problem z niewielką liczbą obserwacji.

Podstawowym celem niniejszego artykułu będzie zatem znalezienie formuły składki dla łącznej wartości szkód na podstawie liczby szkód, która będzie prawidłowa dla dowolnej formy zależności między liczbą szkód a wartością pojedynczej szkody. W rozważaniach skupimy się na populacji ubezpieczonych nieróżniących się pod względem charakterystyk obserwowalnych, co oznacza, że w obliczeniach pominięty zostanie składnik regresyjny. W artykule zostanie ponadto zaproponowana regresja pomocnicza pozwalająca na przetestowanie w prosty sposób tego, czy parametry ryzyka rozkładu liczby szkód i wartości pojedynczej szkody są zależne, co ma kluczowe znaczenie dla postaci stosowanej składki. Sprawdzone także zostanie to, przy jakich założeniach składka w modelu ogólnym upraszcza się do postaci standardowo stosowanej w praktyce. W ostatniej części artykułu zostaną rozpatrzone pewne przykładowe formy zależności parametrów ryzyka, a także zostaną dla nich uzyskane postaci predyktorów łącznej wartości szkód oraz wartości parametrów w zaproponowanej regresji pomocniczej.

2. Założenia modelu, podstawowe oznaczenia oraz parametry rozkładów

Mamy zbiór danych zawierający informacje o liczbie szkód wygenerowanych przez M ubezpieczonych podczas T okresów. Oznaczmy przez $N_{j,t}$ liczbę szkód j-tego ubezpieczonego w t-tym okresie, przez $Y_{j,t,k}$ wartość k-tej szkody j-tego ubezpieczonego w t-tym okresie. Niech $X_{j,t} = \sum_{k=1}^{N_{j,t}} Y_{j,t,k}$ oznacza łączną wartość szkód, jakie poniósł j-ty ubezpieczony w t-tym okresie. Przyjmijmy ponadto następujące oznaczenia dla wektora zawierającego informacje o wszystkich liczbach szkód j-tego ubezpieczonego w kolejnych latach: $\mathbf{N}_j^T = \begin{bmatrix} N_{j,1} & N_{j,2} & \ldots & N_{j,T} \end{bmatrix}$, dla wektora zawierającego informacje o łącznych wartościach szkód j-tego ubezpieczonego w kolejnych latach: $\mathbf{X}_j^T = \begin{bmatrix} X_{j,1} & X_{j,2} & \ldots & X_{j,T} \end{bmatrix}$ oraz dla wektora zawierającego informacje o wszystkich wartościach pojedynczych szkód j-tego ubezpieczonego w kolejnych latach: $\mathbf{Y}_j^T = \begin{bmatrix} Y_{j,1,1} & Y_{j,1,2} & \ldots & Y_{j,T,N_{j,T}} \end{bmatrix}$ (przy czym T nie jest tutaj symbolem transpozycji, lecz symbolem ostatniego okresu obserwacji).

Jak zatem widać, łączna wartość szkód j-tego ubezpieczonego w t-tym okresie zależy od dwóch elementów, które najczęściej uznaje się za losowe, a mianowicie – od liczby szkód i od wartości poszczególnych szkód. Co istotne, w praktyce można zaobserwować, że rozkłady zarówno liczby szkód, jak i wartości pojedynczej szkody różnią się między ubezpieczonymi. W związku z tym w niniejszym artykule przyjmiemy tradycyjne dla teorii zaufania założenia, zgodnie z którymi warunkowy rozkład łącznej wartości szkód danego ubezpieczonego zależy od dwóch parametrów ryzyka: Λ_j i Θ_j, gdzie Λ_j jest parametrem ryzyka warunkowego rozkładu liczby szkód, a Θ_j jest parametrem ryzyka warunkowego rozkładu wartości pojedynczej szkody. Przyjmiemy ponadto, że owe parametry ryzyka są realizacjami pewnych zmiennych losowych oraz że proces generowania szkód składa się z dwóch etapów: na pierwszym etapie losowane są wartości parametrów ryzyka dla danego ubezpieczonego, na drugim etapie ubezpieczeni o ustalonych wartościach parametrów ryzyka generują w kolejnych latach różne liczby szkód o różnych wartościach.

Zapiszmy powyższe założenia w nieco bardziej formalny sposób:

A1) Rozkład łącznej wartości szkód j-tego ubezpieczonego zależy od dwóch parametrów ryzyka: Λ_j i Θ_j, $j = 1, ..., M$, gdzie Λ_j jest parametrem ryzyka rozkładu liczby szkód, a Θ_j jest parametrem ryzyka rozkładu wartości pojedynczej szkody. Pary (Λ_1, Θ_1), $\ldots$, (Λ_M, Θ_M) są wzajemnie niezależne i pochodzą z tego samego rozkładu.

A2) Przy ustalonych wartościach parametrów ryzyka Λ_j i Θ_j liczby szkód $(N_{j,1}, N_{j,2}, ..., N_{j,T})$ oraz wartości poszczególnych szkód $(Y_{j,1,1}, Y_{j,1,2}, ..., Y_{j,T,N_{j,T}})$ j-tego ubezpieczonego w kolejnych okresach są wzajemnie warunkowo niezależne i pochodzą z tego samego rozkładu.

A3) Wektory $\left(\Lambda_1, \Theta_1, \mathbf{N}_1^T, \mathbf{Y}_1^T\right)$, $\ldots$, $\left(\Lambda_M, \Theta_M, \mathbf{N}_M^T, \mathbf{Y}_M^T\right)$ są wzajemnie bezwarunkowo niezależne.

Powyższe założenia są na razie dość ogólnej natury i dotyczą samego procesu generowania szkód. Aby przeprowadzić dalszą analizę, trzeba przyjąć pewne bardziej szczegółowe założenia dotyczące momentów warunkowych rozkładów liczby szkód i wartości pojedynczej szkody. Co więcej, konieczne jest także sformułowanie ogólnego sposobu zapisu dla możliwych form zależności parametrów ryzyka Λ_j i Θ_j. Ponieważ w niniejszym artykule koncentrujemy się na predykcji łącznej wartości szkód, opierając się na predyktorze liczby szkód, najwygodniej będzie przyjąć konwencję, zgodnie z którą zależność między parametrami ryzyka będzie uwzględniana w momentach rozkładu parametru ryzyka wartości pojedynczej szkody. Przyjmijmy zatem następujące założenia i oznaczenia będące uzupełnieniem założeń A):

B1) Wartość oczekiwana i wariancja parametrów ryzyka $\Lambda_1, \Lambda_2, ..., \Lambda_M$ wynoszą:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(\Lambda_j|\Theta_j\right) &= \mathrm{E}\left(\Lambda_j\right) = \Lambda, \\ \mathrm{Var}\left(\Lambda_j|\Theta_j\right) &= \mathrm{Var}\left(\Lambda_j\right) = a_\Lambda^2. \end{aligned}$$

B2) Warunkowa i bezwarunkowa wartość oczekiwana oraz wariancja rozkładu liczby szkód są równe:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(N_{j,t}|\Lambda_j,\Theta_j\right) &= \mathrm{E}\left(N_{j,t}|\Lambda_j\right) = \Lambda_j, \\ \mathrm{Var}\left(N_{j,t}|\Lambda_j,\Theta_j\right) &= \mathrm{Var}\left(N_{j,t}|\Lambda_j\right) = \sigma_N^2\left(\Lambda_j\right), \\ \mathrm{E}\left(N_{j,t}\right) &= \mathrm{E}\left(\mathrm{E}\left(N_{j,t}|\Lambda_j\right)\right) = \mathrm{E}\left(\Lambda_j\right) = \Lambda, \\ \mathrm{E}\left(\mathrm{Var}\left(N_{j,t}|\Lambda_j\right)\right) &= \mathrm{E}\left(\sigma_N^2\left(\Lambda_j\right)\right) = s_N^2. \end{aligned}$$

B3) Warunkowa i bezwarunkowa wartość oczekiwana rozkładu wartości pojedynczej szkody wynosi:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(Y_{j,t,k}|\Lambda_j,\Theta_j\right) &= \Theta_j = \Theta\left(\Lambda_j\right), \\ \mathrm{E}\left(Y_{j,t,k}\right) &= E\left(\Theta_j\right), \end{aligned}$$

gdzie $\Theta(\cdot)$ jest oznaczeniem pewnej funkcji.

Jak zatem widać, dotychczas przyjęte założenia dotyczące rozkładów $Y_{j,t,k}$ i Θ_j mają na razie niezbyt restrykcyjną postać, co pozwala na zachowanie ogólności modelu. W praktyce często zakłada się, że parametr Θ_j jest jednowymiarowym parametrem skali warunkowego rozkładu wartości pojedynczej szkody, co implikuje, że wartość oczekiwana jest liniową, a wariancja kwadratową funkcją Θ_j. Ponieważ jednak w niniejszym artykule skupiamy się na predykcji opartej na liczbie szkód, nie ma potrzeby przyjmowania żadnych założeń na temat wariancji warunkowego rozkładu wartości pojedynczej szkody i przyjmiemy tylko raczej standardowe założenie, że Θ_j (a także Λ_j) jest jednowymiarową zmienną losową.

Warto w tym miejscu podkreślić, że zależność między parametrami ryzyka może być modelowana na wiele sposobów – parametr Θ_j może być opisany za pomocą jakiejś funkcji parametru Λ_j; parametry ryzyka Λ_j i Θ_j mogą także być modelowane jako skorelowane ze sobą zmienne losowe. Pewne przykładowe formy zależności zostaną rozpatrzone w czwartej części artykułu; do tego momentu w analizie zawartej w kolejnej części artykułu pozostaniemy przy zapisie opartym w głównej mierze na momentach rozkładów bez odwoływania się do konkretnych oznaczeń, ponieważ pozwala to na wygodne analizowanie modelu niezależnie od tego, jaką postać przyjmie zależność między parametrami ryzyka.

3. Najlepszy liniowy predyktor łącznej wartości szkód oparty na liczbie szkód

W tej części artykułu obliczony zostanie najlepszy – w sensie kwadratowej funkcji straty – liniowy predyktor łącznej wartości szkód w okresie $T+1$ na podstawie dotychczasowych liczb szkód. Ponieważ zakładamy, że każdy z ubezpieczonych ponosi szkody w sposób niezależny od pozostałych, predyktor dla j-tego ubezpieczonego będzie oparty tylko na obserwacjach dotyczących tegoż ubezpieczonego. Co więcej, można łatwo pokazać, że przy przyjętych założeniach problem predykcji łącznej wartości szkód w okresie $T+1$ sprowadza się do problemu predykcji $\mathrm{E}\left(X_{j,T+1}|\Lambda_j,\Theta_j\right)$, który można zapisać w następujący sposób:

$$
\begin{aligned}
BLP^O\left(X_{j,T+1}|\mathbf{N}_j^T\right) &= BLP^O\left(\mathrm{E}\left(X_{j,T+1}|\Lambda_j,\Theta_j\right)|\mathbf{N}_j^T\right) = \\
&= \arg\min_{d_{j,0},\ldots,d_{j,T}} \mathrm{E}\left[\left(\mathrm{E}\left(X_{j,T+1}|\Lambda_j,\Theta_j\right) - d_{j,0} - \sum_{t=1}^{T} d_{j,t}N_{j,t}\right)^2\right] = \\
&= \arg\min_{d_{j,0},\ldots,d_{j,T}} S\left(d_{j,0},\ldots,d_{j,T}\right),
\end{aligned}
$$

gdzie $S(\cdot)$ to funkcja, której minimum szukamy.

Twierdzenie 1. *Przy założeniach A)–B) najlepszy liniowy predyktor łącznej wartości szkód w okresie $T+1$ oparty na dotychczasowych liczbach szkód jest dany następującym wzorem:*

$$
BLP^O\left(X_{j,T+1}|\mathbf{N}_j^T\right) = E\left(\Lambda_j\Theta_j\right) + \frac{T\mathrm{Cov}\left(\Lambda_j\Theta_j,\Lambda_j\right)}{T\mathrm{Var}\left(\Lambda_j\right) + \mathrm{E}\left(\mathrm{Var}\left(N_{j,k}|\Lambda_j\right)\right)}\left(\bar{N}_j^T - \mathrm{E}\left(\Lambda_j\right)\right), \tag{1}
$$

gdzie:

$$
\bar{N}_j^T = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} N_{j,t}.
$$

Dowód. Aby znaleźć rozwiązanie postawionego problemu optymalizacji, policzmy pierwsze pochodne funkcji $S\left(d_{j,0},\ldots,d_{j,T}\right)$ po szukanych parametrach $d_{j,0},\ldots,d_{j,T}$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial S\left(d_{j,0},\ldots,d_{j,T}\right)}{\partial d_{j,0}} &= -\mathrm{E}\left[2\left(\mathrm{E}\left(X_{j,T+1}|\Lambda_j,\Theta_j\right) - d_{j,0} - \sum_{t=1}^{T} d_{j,t}N_{j,t}\right)\right], \\
\frac{\partial S\left(d_{j,0},\ldots,d_{j,T}\right)}{\partial d_{j,k}} &= -\mathrm{E}\left[2\left(\mathrm{E}\left(X_{j,T+1}|\Lambda_j,\Theta_j\right) - d_{j,0} - \sum_{t=1}^{T} d_{j,t}N_{j,t}\right)N_{j,k}\right],
\end{aligned}
$$

dla $k=1,\ldots,T$.

Po przyrównaniu powyższych pochodnych do 0 otrzymujemy następujący układ równań:

$$\mathrm{E}\left(X_{j,T+1}\right) - d_{j,0} - \sum_{t=1}^{T} d_{j,t}\mathrm{E}\left(N_{j,t}\right) = 0,$$

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{E}\left(X_{j,T+1}|\Lambda_j,\Theta_j\right)N_{j,k}\right) - d_{j,0}\mathrm{E}\left(N_{j,k}\right) - \sum_{t=1}^{T} d_{j,t}\mathrm{E}\left(N_{j,t}N_{j,k}\right) = 0,$$

gdzie $k = 1, ..., T$. Jeśli pomnożymy pierwsze z równań przez $\mathrm{E}\left(N_{j,k}\right)$ i odejmiemy je od drugiego równania, otrzymamy następujący układ równań:

$$\mathrm{E}\left(X_{j,T+1}\right) - d_{j,0} - \sum_{t=1}^{T} d_{j,t}\mathrm{E}\left(N_{j,t}\right) = 0,$$

$$\mathrm{Cov}\left(\mathrm{E}\left(X_{j,T+1}|\Lambda_j,\Theta_j\right), N_{j,k}\right) = \sum_{t=1}^{T} d_{j,t}\mathrm{Cov}\left(N_{j,t}, N_{j,k}\right),\ \ k = 1, ..., T.$$

Przy przyjętych założeniach A) i B) momenty i kowariancje zawarte w powyższym układzie równań możemy zapisać w następujący sposób:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left(X_{j,T+1}\right) &= \mathrm{E}\left(\mathrm{E}\left(X_{j,T+1}|\Lambda_j,\Theta_j\right)\right) = \\ &= \mathrm{E}\left(\mathrm{E}\left(N_{j,T+1}|\Lambda_j,\Theta_j\right)\mathrm{E}\left(Y_{j,T+1,k}|\Lambda_j,\Theta_j\right)\right) = \mathrm{E}\left(\Lambda_j\Theta_j\right),\end{aligned}$$

$$\mathrm{E}\left(N_{j,t}\right) = \mathrm{E}\left(\Lambda_j\right),$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\left(\mathrm{E}\left(X_{j,T+1}|\Lambda_j,\Theta_j\right), N_{j,k}\right) &= \mathrm{E}\left(\mathrm{Cov}\left(\Lambda_j\Theta_j, N_{j,k}|\Lambda_j,\Theta_j\right)\right) + \\ &+ \mathrm{Cov}\left(\mathrm{E}\left(\Lambda_j\Theta_j|\Lambda_j,\Theta_j\right), \mathrm{E}\left(N_{j,k}|\Lambda_j,\Theta_j\right)\right) = \mathrm{Cov}\left(\Lambda_j\Theta_j,\Lambda_j\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\left(N_{j,t}, N_{j,k}\right) &= \mathrm{E}\left(\mathrm{Cov}\left(N_{j,t}, N_{j,k}|\Lambda_j\right)\right) + \mathrm{Cov}\left(\mathrm{E}\left(N_{j,t}|\Lambda_j\right), \mathrm{E}\left(N_{j,k}|\Lambda_j\right)\right) = \\ &= I_{\{t=k\}}\mathrm{E}\left(\mathrm{Var}\left(N_{j,t}|\Lambda_j\right)\right) + \mathrm{Var}\left(\Lambda_j\right),\end{aligned}$$

gdzie $I_{\{t=k\}}$ przyjmuje wartość 1, gdy $t = k$ oraz 0 gdy $t \neq k$. Z przyjętych wcześniej założeń wynika, że warunkowa wariancja liczby szkód jest stała w czasie dla danego ubezpieczonego. W konsekwencji zachodzi $d_{j,1} = ... = d_{j,T}$, a interesujący nas układ równań można zapisać następująco:

$$\mathrm{E}\left(\Lambda_j\Theta_j\right) - d_{j,0} - Td_{j,k}\mathrm{E}\left(\Lambda_j\right) = 0,$$

$$\mathrm{Cov}\left(\Lambda_j\Theta_j,\Lambda_j\right) = Td_{j,k}\mathrm{Var}\left(\Lambda_j\right) + d_{j,k}\mathrm{E}\left(\mathrm{Var}\left(N_{j,k}|\Lambda_j\right)\right), k = 1, ..., T.$$

Na podstawie drugiego równania otrzymujemy następujące rozwiązanie dla $d_{j,k}$:

$$d_{j,k} = \frac{\mathrm{Cov}\left(\Lambda_j \Theta_j, \Lambda_j\right)}{T\mathrm{Var}\left(\Lambda_j\right) + \mathrm{E}\left(\mathrm{Var}\left(N_{j,k}|\Lambda_j\right)\right)}. \tag{2}$$

Po wstawieniu powyższego wyniku do pierwszego równania układu równań otrzymamy:

$$d_{j,0} = \mathrm{E}\left(\Lambda_j \Theta_j\right) - \frac{T\mathrm{Cov}\left(\Lambda_j \Theta_j, \Lambda_j\right)}{T\mathrm{Var}\left(\Lambda_j\right) + \mathrm{E}\left(\mathrm{Var}\left(N_{j,k}|\Lambda_j\right)\right)} \mathrm{E}\left(\Lambda_j\right). \tag{3}$$

Po wstawieniu obliczonych parametrów do predyktora i uporządkowaniu uzyskujemy równanie (1). □

Jak zatem widać, uzyskany predyktor jest do pewnego stopnia analogiczny do standardowego predyktora łącznej wartości szkód opartego na liczbie szkód, a mianowicie jest to suma populacyjnej wartości oczekiwanej łącznej wartości szkód i elementu, który ma za zadanie przybliżać odchylenie warunkowej wartości oczekiwanej liczby szkód j-tego ubezpieczonego od populacyjnej wartości oczekiwanej liczby szkód $\left(\bar{N}_j^T - \mathrm{E}\left(\Lambda_j\right)\right)$, przemnożonego przez pewną wagę. Ponieważ dokonujemy predykcji na podstawie liczby szkód, średnia populacyjna łącznej wartości szkód zawarta w predyktorze jest więc korygowana o przybliżenie odchylenia warunkowej wartości oczekiwanej liczby szkód od bezwarunkowej wartości oczekiwanej, z pominięciem informacji o ewentualnych odchyleniach warunkowej wartości oczekiwanej wartości pojedynczej szkody od populacyjnej wartości oczekiwanej wartości pojedynczej szkody $\left(\bar{Y}_j^T - E\left(\Theta_j\right)\right)$. Jednocześnie należy zauważyć, że predyktor w modelu ogólnej zależności nie ma postaci typowej dla składki zaufania, choć oczywiście w przypadku m.in. niezależności parametrów ryzyka uprości się on do standardowej postaci ważonej średniej dwóch składników podawanej w literaturze.

4. Regresja pomocnicza

Rozważmy teraz zagadnienie regresji liniowej, w której zmienną zależną jest łączna wartość szkód w okresie T, a zmienne niezależne to predyktor liczby szkód w okresie T oraz stała. Wyniki owej regresji pozwolą bowiem na zapisanie predyktora łącznej wartości szkód z twierdzenia 1 w bardziej interesującej postaci, która pozwoli na sformułowanie prostego sposobu na sprawdzenie, czy parametry ryzyka rozkładu liczby i wartości pojedynczych szkód są stochastycznie zależne. Należy tutaj podkreślić, że rozważana regresja będzie dotyczyć przekrojowej próby M ubezpieczonych w okresie T, a dotychczas rozważaliśmy predyktor łącznej wartości szkód w okresie $T+1$. Zmiana okresu z $T+1$ na T ma znaczenie czysto techniczne (dzięki temu dysponujemy obserwacjami dla zmiennej zależnej), natomiast wnioski wyciągnięte na tej podstawie będą wiążące dla dowolnego okresu obserwacji. Zanim obliczymy wartości parametrów w zaproponowanej regresji liniowej, podajmy bez dowodu twierdzenie dotyczące postaci predyktora liczby szkód w okresie T.

Twierdzenie 2. *Przy założeniach A)–B) najlepszy liniowy predyktor liczby szkód w okresie T obliczony na podstawie dotychczasowej liczby szkód jest dany następującym wzorem:*

$$BLP\left(N_{j,T}|\mathbf{N}_j^{T-1}\right) = \left(1 - z_N^{T-1}\right)\Lambda + z_N^{T-1}\bar{N}_j^{T-1}, \tag{4}$$

gdzie:

$$z_N^{T-1} = \frac{(T-1)\,a_\Lambda^2}{(T-1)\,a_\Lambda^2 + s_N^2} = \frac{(T-1)\operatorname{Var}(\Lambda_j)}{(T-1)\operatorname{Var}(\Lambda_j) + \operatorname{E}(\operatorname{Var}(N_{j,k}|\Lambda_j))}, \tag{5}$$

$$1 - z_N^{T-1} = \frac{s_N^2}{(T-1)\,a_\Lambda^2 + s_N^2} = \frac{\operatorname{E}(\operatorname{Var}(N_{j,k}|\Lambda_j))}{(T-1)\operatorname{Var}(\Lambda_j) + \operatorname{E}(\operatorname{Var}(N_{j,k}|\Lambda_j))}. \tag{6}$$

Podana powyżej postać predyktora to najlepszy liniowy predyktor wyprowadzony przez Bühlmanna (1967) – w jego artykule można znaleźć dowód twierdzenia 2.

Zapiszmy także dla porządku postać predyktora łącznej wartości szkód w okresie T w modelu ogólnym:

$$\begin{aligned} BLP^O\left(X_{j,T}|\mathbf{N}_j^{T-1}\right) &= \operatorname{E}(\Lambda_j\Theta_j) + \\ &+ \frac{(T-1)\operatorname{Cov}(\Lambda_j\Theta_j,\Lambda_j)}{(T-1)\operatorname{Var}(\Lambda_j) + \operatorname{E}(\operatorname{Var}(N_{j,k}|\Lambda_j))}\left(\bar{N}_j^{T-1} - \operatorname{E}(\Lambda_j)\right). \end{aligned} \tag{7}$$

Lemat 1. *Przy założeniach A)–B) rozwiązaniem problemu regresji liniowej postaci:*

$$\arg\min_{\beta_0^O,\beta_1^O} \operatorname{E}\left[\left(X_{j,T} - \beta_0^O - \beta_1^O \cdot BLP\left(N_{j,T}|\mathbf{N}_j^{T-1}\right)\right)^2\right] = \arg\min_{\beta_0^O,\beta_1^O} S\left(\beta_0^O,\beta_1^O\right)$$

są parametry:

$$\beta_0^O = \operatorname{E}(\Lambda_j\Theta_j) - \frac{\operatorname{Cov}(\Lambda_j\Theta_j,\Lambda_j)}{\operatorname{Var}(\Lambda_j)}\operatorname{E}(\Lambda_j), \tag{8}$$

$$\beta_1^O = \frac{\operatorname{Cov}(\Lambda_j\Theta_j,\Lambda_j)}{\operatorname{Var}(\Lambda_j)}, \tag{9}$$

gdzie $S\left(\beta_0^O,\beta_1^O\right)$ to funkcja, której minimum szukamy.

Dowód. Policzmy pochodne z funkcji $S\left(\beta_0^O, \beta_1^O\right)$ po szukanych parametrach:

$$\frac{\partial S\left(\beta_0^O, \beta_1^O\right)}{\partial \beta_0^O} = -\mathrm{E}\left[2\left(X_{j,T} - \beta_0^O - \beta_1^O \cdot BLP\left(N_{j,T}|\mathbf{N}_j^{T-1}\right)\right)\right],$$
$$\frac{\partial S\left(\beta_0^O, \beta_1^O\right)}{\partial \beta_1^O} =$$
$$= -\mathrm{E}\left[2\left(X_{j,T} - \beta_0^O - \beta_1^O \cdot BLP\left(N_{j,T}|\mathbf{N}_j^{T-1}\right)\right) BLP\left(N_{j,T}|\mathbf{N}_j^{T-1}\right)\right].$$

Po przyrównaniu powyższych pochodnych do 0 otrzymujemy następujący układ równań:

$$\mathrm{E}\left(X_{j,T}\right) - \beta_0^O - \beta_1^O \cdot \mathrm{E}\left(BLP\left(N_{j,T}|\mathbf{N}_j^{T-1}\right)\right) = 0,$$
$$\mathrm{E}\left(X_{j,T} \cdot BLP\left(N_{j,T}|\mathbf{N}_j^{T-1}\right)\right) - \beta_0^O \cdot \mathrm{E}\left(BLP\left(N_{j,T}|\mathbf{N}_j^{T-1}\right)\right) +$$
$$-\beta_1^O \cdot \mathrm{E}\left[\left(BLP\left(N_{j,T}|\mathbf{N}_j^{T-1}\right)\right)^2\right] = 0.$$

Po odjęciu od równania drugiego pierwszego równania przemnożonego przez wartość oczekiwaną predyktora uzyskamy następującą postać układu równań:

$$\beta_0^O = \mathrm{E}\left(X_{j,T}\right) - \beta_1^O \cdot \mathrm{E}\left(BLP\left(N_{j,T}|\mathbf{N}_j^{T-1}\right)\right),$$
$$\mathrm{Cov}\left(X_{j,T}, BLP\left(N_{j,T}|\mathbf{N}_j^{T-1}\right)\right) = \beta_1^O \cdot \mathrm{Var}\left(BLP\left(N_{j,T}|\mathbf{N}_j^{T-1}\right)\right).$$

Wobec tego szukane parametry będą równe:

$$\beta_0^O = \mathrm{E}\left(X_{j,T}\right) - \frac{\mathrm{Cov}\left(X_{j,T}, BLP\left(N_{j,T}|\mathbf{N}_j^{T-1}\right)\right)}{\mathrm{Var}\left(BLP\left(N_{j,T}|\mathbf{N}_j^{T-1}\right)\right)} \mathrm{E}\left(BLP\left(N_{j,T}|\mathbf{N}_j^{T-1}\right)\right), \quad (10)$$

$$\beta_1^O = \frac{\mathrm{Cov}\left(X_{j,T}, BLP\left(N_{j,T}|\mathbf{N}_j^{T-1}\right)\right)}{\mathrm{Var}\left(BLP\left(N_{j,T}|\mathbf{N}_j^{T-1}\right)\right)}. \quad (11)$$

Zastanówmy się zatem, ile wynoszą wartości momentów, wariancji i kowariancji znajdujące się w powyższych wzorach. Zacznijmy od obliczenia wartości oczekiwanej predyktora z wykorzystaniem założeń B):

$$\mathrm{E}\left(BLP\left(N_{j,T}|\mathbf{N}_j^{T-1}\right)\right) = \mathrm{E}\left(\left(1 - z_N^{T-1}\right)\Lambda + z_N^{T-1}\bar{N}_j^{T-1}\right) =$$
$$= \left(1 - z_N^{T-1}\right)\Lambda + z_N^{T-1}\mathrm{E}\left(\bar{N}_j^{T-1}\right) = \left(1 - z_N^{T-1}\right)\Lambda + z_N^{T-1}\Lambda = \Lambda = \mathrm{E}\left(\Lambda_j\right).$$

Aby obliczyć wariancję predyktora, ponownie skorzystamy z oznaczeń przyjętych w założeniach B):

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Var}\left(BLP\left(N_{j,T}|\mathbf{N}_j^{T-1}\right)\right) = \\
&\qquad = \operatorname{Var}\left(\left(1-z_N^{T-1}\right)\Lambda + z_N^{T-1}\bar{N}_j^{T-1}\right) = \left(z_N^{T-1}\right)^2 \operatorname{Var}\left(\bar{N}_j^{T-1}\right) = \\
&= \left(z_N^{T-1}\right)^2\left[\operatorname{Var}\left(\mathrm{E}\left(\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T-1} N_{j,t}|\Lambda_j\right)\right) + \mathrm{E}\left(\operatorname{Var}\left(\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T-1} N_{j,t}|\Lambda_j\right)\right)\right] = \\
&\qquad = \left(z_N^{T-1}\right)^2\left[\operatorname{Var}\left(\Lambda_j\right) + \mathrm{E}\left(\frac{1}{(T-1)^2}\sum_{t=1}^{T-1}\operatorname{Var}\left(N_{j,t}|\Lambda_j\right)\right)\right] = \\
&\quad = \left(z_N^{T-1}\right)^2\left[a_\Lambda^2 + \mathrm{E}\left(\frac{1}{(T-1)^2}\sum_{t=1}^{T-1}\sigma_N^2\left(\Lambda_j\right)\right)\right] = \left(z_N^{T-1}\right)^2\left[a_\Lambda^2 + \frac{1}{T-1}s_N^2\right].
\end{aligned}$$

Warto w tym momencie zauważyć, że definicję wagi z_N^{T-1} z równania (5) można zapisać równoważnie w następujący sposób:

$$\frac{a_\Lambda^2}{z_N^{T-1}} = a_\Lambda^2 + \frac{1}{T-1}s_N^2.$$

Gdy wykorzystamy ten zapis w równaniu na wariancję predyktora, otrzymamy ostateczny wynik:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}\left(BLP\left(N_{j,T}|\mathbf{N}_j^{T-1}\right)\right) &= \left(z_N^{T-1}\right)^2\left[a_\Lambda^2 + \frac{1}{T-1}s_N^2\right] = \\
&= \left(z_N^{T-1}\right)^2\frac{a_\Lambda^2}{z_N^{T-1}} = z_N^{T-1}a_\Lambda^2 = z_N^{T-1}\operatorname{Var}\left(\Lambda_j\right). \quad (12)
\end{aligned}$$

Pozostałych elementów nie można obliczyć bez założenia konkretnej postaci zależności między parametrami ryzyka Λ_j i Θ_j, można jednak zapisać je w nieco wygodniejszej postaci. Wartość oczekiwaną łącznej wartości szkód możemy zapisać w następujący sposób:

$$\mathrm{E}\left(X_{j,T}\right) = \mathrm{E}\left(\Lambda_j\Theta_j\right).$$

Natomiast kowariancję między łączną wartością szkód w okresie T a predyktorem liczby szkód w okresie T można zapisać następująco:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}\left(X_{j,T}, BLP\left(N_{j,T}|\mathbf{N}_j^{T-1}\right)\right) = \mathrm{E}\left(\operatorname{Cov}\left(X_{j,T}, BLP\left(N_{j,T}|\mathbf{N}_j^{T-1}\right)|\Lambda_j,\Theta_j\right)\right) + \\
+\operatorname{Cov}\left(\mathrm{E}\left(X_{j,T}|\Lambda_j,\Theta_j\right), \mathrm{E}\left(BLP\left(N_{j,T}|\mathbf{N}_j^{T-1}\right)|\Lambda_j,\Theta_j\right)\right) =
\end{aligned}$$

$$= \mathrm{E}\left(\mathrm{Cov}\left(X_{j,T}, \left(1 - z_N^{T-1}\right)\Lambda + z_N^{T-1}\bar{N}_j^{T-1}|\Lambda_j, \Theta_j\right)\right) +$$
$$+\mathrm{Cov}\left(\Lambda_j\Theta_j, \mathrm{E}\left(\left(1 - z_N^{T-1}\right)\Lambda + z_N^{T-1}\bar{N}_j^{T-1}|\Lambda_j, \Theta_j\right)\right) =$$
$$= z_N^{T-1}\mathrm{Cov}\left(\Lambda_j\Theta_j, \Lambda_j\right). \tag{13}$$

Po wstawieniu powyższych wyników do równań (10) i (11) otrzymamy tezę lematu. □

Na podstawie lematu 1 oraz równań (4)–(7) możemy teraz sformułować twierdzenie opisujące związek między predyktorem łącznej wartości szkód w okresie T opartym na liczbach szkód a predyktorem liczby szkód w okresie T.

Twierdzenie 3. *Przy założeniach A)–B) najlepszy liniowy predyktor łącznej wartości szkód w okresie T oparty na dotychczasowych liczbach szkód można zapisać następująco:*

$$BLP^O\left(X_{j,T}|\mathbf{N}_j^{T-1}\right) = \beta_0^O + \beta_1^O \cdot BLP\left(N_{j,T}|\mathbf{N}_j^{T-1}\right), \tag{14}$$

gdzie parametry β_0^O i β_1^O zostały podane w lemacie 1, a postać predyktora

$$BLP\left(N_{j,T}|\mathbf{N}_j^{T-1}\right)$$

została podana w twierdzeniu 2.

Dowód. Na wstępie zapiszmy predyktor łącznej wartości szkód z równania (7) w następującej postaci:

$$BLP^O\left(X_{j,T}|\mathbf{N}_j^{T-1}\right) = d_{j,0} + \sum_{t=1}^{T-1} d_{j,t}N_{j,t} =$$
$$= \mathrm{E}\left(\Lambda_j\Theta_j\right) - \frac{(T-1)\,\mathrm{Cov}\left(\Lambda_j\Theta_j, \Lambda_j\right)}{(T-1)\,\mathrm{Var}\left(\Lambda_j\right) + \mathrm{E}\left(\mathrm{Var}\left(N_{j,k}|\Lambda_j\right)\right)}\mathrm{E}\left(\Lambda_j\right) +$$
$$+ \sum_{t=1}^{T-1} \frac{\mathrm{Cov}\left(\Lambda_j\Theta_j, \Lambda_j\right)}{(T-1)\,\mathrm{Var}\left(\Lambda_j\right) + \mathrm{E}\left(\mathrm{Var}\left(N_{j,k}|\Lambda_j\right)\right)}N_{j,t}. \tag{15}$$

Bez trudu można zauważyć, że korzystając z definicji parametru β_1^O z równania (9) oraz wagi z_N^{T-1} z równania (5), parametr $d_{j,k}$ można zapisać równoważnie w następujący sposób:

$$d_{j,k} = \frac{\mathrm{Var}\left(\Lambda_j\right)}{(T-1)\,\mathrm{Var}\left(\Lambda_j\right) + \mathrm{E}\left(\mathrm{Var}\left(N_{j,k}|\Lambda_j\right)\right)}\frac{\mathrm{Cov}\left(\Lambda_j\Theta_j, \Lambda_j\right)}{\mathrm{Var}\left(\Lambda_j\right)} = \frac{z_N^{T-1}}{T-1}\beta_1^O.$$

Natomiast na podstawie równań (5), (8) i (9) parametr $d_{j,0}$ można zapisać następująco:

$$d_{j,0} = \mathrm{E}\left(\Lambda_j\Theta_j\right) - \frac{(T-1)\,\mathrm{Var}\left(\Lambda_j\right)}{(T-1)\,\mathrm{Var}\left(\Lambda_j\right) + \mathrm{E}\left(\mathrm{Var}\left(N_{j,k}|\Lambda_j\right)\right)}\frac{\mathrm{Cov}\left(\Lambda_j\Theta_j, \Lambda_j\right)}{\mathrm{Var}\left(\Lambda_j\right)}\mathrm{E}\left(\Lambda_j\right) =$$

$$= \mathrm{E}\left(\Lambda_j\Theta_j\right) - \beta_1^O \mathrm{E}\left(\Lambda_j\right) + \left(1 - z_N^{T-1}\right)\beta_1^O \mathrm{E}\left(\Lambda_j\right) = \beta_0^O + \left(1 - z_N^{T-1}\right)\beta_1^O \mathrm{E}\left(\Lambda_j\right).$$

Po wstawieniu do równania (15) parametrów $d_{j,0}$ i $d_{j,k}$ zapisanych jako funkcje parametrów regresji liniowej otrzymamy tezę twierdzenia. □

Na podstawie twierdzenia 2 możemy zatem stwierdzić, że w modelu ogólnej zależności parametrów ryzyka predyktor łącznej wartości szkód w okresie T jest równy predyktorowi liczby szkód w okresie T przemnożonemu przez wartość parametru β_1^O oraz powiększonemu o stałą wartość β_0^O; innymi słowy, predyktor łącznej wartości szkód jest afiniczną funkcją predyktora liczby szkód. Oznacza to, że jeśli liczba szkód i wartość pojedynczej szkody nie są stochastycznie niezależne, standardowo stosowana formuła składki może nie być poprawna. Warto zauważyć, że jeśli parametr β_0^O przyjmie wartość 0, predyktor łącznej wartości szkód będzie można zapisać jako ważoną sumę dwóch składników przemnożoną przez odpowiednią stałą równą β_1^O, czyli optymalny liniowy predyktor będzie miał postać składki zaufania. Jeśliby dodatkowo parametr β_1^O był równy populacyjnej wartości oczekiwanej wartości pojedynczej szkody, otrzymalibyśmy standardowo stosowaną w praktyce postać składki. Warto się zatem zastanowić nad tym, jakie warunki muszą być spełnione, aby predyktor łącznej wartości szkód był liniową funkcją predyktora liczby szkód oraz aby uprościł się do postaci standardowo stosowanej w praktyce.

Wniosek 1. 1) *Jeżeli spełniony będzie warunek:*

$$\frac{\mathrm{E}\left(\Lambda_j^2\right)}{\mathrm{E}\left(\Lambda_j\right)} = \frac{\mathrm{E}\left(\Lambda_j^2\Theta_j\right)}{\mathrm{E}\left(\Lambda_j\Theta_j\right)}, \tag{16}$$

predyktor łącznej wartości szkód oparty na liczbie szkód będzie miał postać:

$$BLP^O\left(X_{j,T}|\mathbf{N}_j^{T-1}\right) = \beta_1^O \cdot BLP\left(N_{j,T}|\mathbf{N}_j^{T-1}\right), \tag{17}$$

gdzie:

$$\beta_1^O = \frac{\mathrm{E}\left(\Lambda_j\Theta_j\right)}{\mathrm{E}\left(\Lambda_j\right)}. \tag{18}$$

2) Jeżeli zachodzi:

$$\mathrm{Cov}\left(\Lambda_j^2, \Theta_j\right) = 0, \tag{19}$$

$$\mathrm{Cov}\left(\Lambda_j, \Theta_j\right) = 0, \tag{20}$$

predyktor łącznej wartości szkód oparty na liczbie szkód uprości się do:

$$BLP^O\left(X_{j,T}|\mathbf{N}_j^{T-1}\right) = \mathrm{E}\left(\Theta_j\right) \cdot BLP\left(N_{j,T}|\mathbf{N}_j^{T-1}\right). \tag{21}$$

Jeżeli więc Λ_j i Θ_j oraz Λ_j^2 i Θ_j są ze sobą nieskorelowane, standardowo stosowana postać składki jest poprawna. Warunki (19) i (20) są spełnione, jeżeli parametry ryzyka Λ_j i Θ_j są niezależnymi zmiennymi losowymi lub w przypadku jakiejś specyficznej formy zależności.

W obliczu dotychczasowych rozważań wydaje się, że dobrym sposobem na sprawdzenie tego, czy parametry ryzyka Λ_j i Θ_j są od siebie zależne, jest przetestowanie istotności stałej w regresji liniowej postaci:

$$X_{j,T} = \beta_0^O + \beta_1^O \cdot BLP\left(N_{j,T}|\mathbf{N}_j^{T-1}\right) + \varepsilon_j, \qquad j = 1, ..., M, \tag{22}$$

gdzie ε_j to błąd losowy. Jeśli parametr β_0^O będzie istotnie różnił się od 0, będzie to świadczyło o tym, iż parametry ryzyka Λ_j i Θ_j są od siebie zależne. Będzie to także znaczyło, że nie należy stosować predyktora łącznej wartości szkód danego wzorem (21). Jednocześnie parametr β_0^O nieistotnie różniący się od 0 może oznaczać, że parametry ryzyka Λ_j i Θ_j są niezależne lub że w modelu występuje pewna szczególna postać zależności parametrów ryzyka spełniająca warunek (16). Co jednak istotne, nawet jeżeli ma miejsce druga możliwość, to i tak zgodnie z wzorem (17) prawidłową postacią predyktora łącznej wartości szkód jest predyktor liczby szkód przemnożony przez odpowiednią stałą daną równaniem (18). Wydaje się ponadto, że postać warunku (16) jest na tyle specyficzna, że raczej rzadko będzie on spełniony przez spotykane w praktyce rozkłady, wobec czego można mieć nadzieję, że zerowanie się parametru β_0^O będzie zazwyczaj równoważne z niezależnością parametrów Λ_j i Θ_j.

Zanim w kolejnej części artykułu zostaną rozpatrzone przykładowe formy zależności między parametrami ryzyka, warto najpierw zastanowić się nad tym, jakimi własnościami cechował się będzie błąd losowy w zaproponowanej regresji liniowej (22). Nietrudno pokazać, iż będzie miał on zerową wartość oczekiwaną:

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}\left(\varepsilon_j\right) = \mathrm{E}\left(X_{j,T}\right) - \beta_0^O - \beta_1^O \cdot \mathrm{E}\left(BLP\left(N_{j,T}|\mathbf{N}_j^{T-1}\right)\right) = \\ &= \mathrm{E}\left(\Lambda_j\Theta_j\right) - \mathrm{E}\left(\Lambda_j\Theta_j\right) + \frac{\mathrm{Cov}\left(\Lambda_j\Theta_j, \Lambda_j\right)}{\mathrm{Var}\left(\Lambda_j\right)}\mathrm{E}\left(\Lambda_j\right) - \frac{\mathrm{Cov}\left(\Lambda_j\Theta_j, \Lambda_j\right)}{\mathrm{Var}\left(\Lambda_j\right)}\mathrm{E}\left(\Lambda_j\right) = 0.\end{aligned}$$

Brak autokorelacji błędu losowego wynika z faktu, że łączne wartości szkód i predyktory liczby szkód są niezależne dla różnych ubezpieczonych. Jeżeli zaś chodzi o wariancję błędu losowego, to w przypadku ogólnej zależności parametrów ryzyka wynosi ona:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Var}\left(\varepsilon_j\right) = \\ &= \mathrm{E}\left[\mathrm{Var}\left(Y_{j,t,k}|\Lambda_j, \Theta_j\right) E\left(N_{j,t}|\Lambda_j, \Theta_j\right) + \mathrm{Var}\left(N_{j,t}|\Lambda_j, \Theta_j\right)\left[\mathrm{E}\left(Y_{j,t,k}|\Lambda_j, \Theta_j\right)\right]^2\right] + \\ &\qquad + \mathrm{Var}\left(\Lambda_j\Theta_j\right) + \left(\beta_1^O\right)^2 z_N^{T-1}\mathrm{Var}\left(\Lambda_j\right) - 2\beta_1^O z_N^{T-1}\mathrm{Cov}\left(\Lambda_j\Theta_j, \Lambda_j\right).\end{aligned}$$

Jeśli skorzystamy z definicji β_1^O z równania (9) oraz z oznaczeń zawartych w założeniach B) otrzymamy równoważny, nieco prostszy zapis:

$$\operatorname{Var}(\varepsilon_j) = \mathrm{E}\left[\Lambda_j \operatorname{Var}(Y_{j,t,k}|\Lambda_j, \Theta_j) + \sigma_N^2(\Lambda_j)\left[\Theta(\Lambda_j)\right]^2\right] + \\ + \operatorname{Var}(\Lambda_j\Theta_j) - \frac{\operatorname{Cov}(\Lambda_j\Theta_j, \Lambda_j)^2}{\operatorname{Var}(\Lambda_j)} z_N^{T-1}.$$

Dalsze obliczenia są niemożliwe bez przyjęcia założeń na temat postaci zależności między parametrami ryzyka Λ_j i Θ_j. Ponieważ jednak w niniejszym artykule zakładamy, że wszystkie momenty rozkładów są takie same dla wszystkich ubezpieczonych, można bezpiecznie przyjąć, że w regresji nie pojawi się problem heteroskedastyczności.

Z powyższych rozważań wynika zatem, że błąd losowy w proponowanym równaniu regresji jest homoskedastyczny, ma zerową wartość oczekiwaną oraz nie jest skorelowany z błędami losowymi dla innych obserwacji. Wydawałoby się więc, że odpowiednią metodą estymacji nieznanych parametrów β_0^O i β_1^O może być metoda najmniejszych kwadratów (MNK). Jeżeliby okazało się ponadto, że błąd losowy ma rozkład normalny, lub jeśli liczebność próby byłaby wystarczająca, do testowania hipotezy zerowej o nieistotności stałej można by posłużyć się tradycyjnie stosowanym w MNK testem istotności opartym na rozkładzie t-Studenta lub na granicznym rozkładzie normalnym. Z analiz przeprowadzonych przez zespół badawczy WNE UW pod kierunkiem W. Otto wynika jednak, że rozkład błędu losowego ma zdecydowanie grubszy prawy ogon niż rozkład normalny, co w połączeniu z wysoką wariancją ε_j może powodować, że tradycyjny sposób estymacji i testowania hipotez będzie dawać nieprawidłowe wyniki. Zaproponowanie odpowiedniejszych metod estymacji parametrów i testowania hipotez w regresji pomocniczej (22) będzie zatem stanowić ważny kierunek dalszych badań. Równie istotnym rozwinięciem niniejszego artykułu będzie dołączenie do modelu składnika regresyjnego, co znacznie zwiększy elastyczność modelu i rozszerzy możliwości jego praktycznego zastosowania.

W kolejnej części artykułu zostaną tymczasem zaproponowane pewne przykładowe formy zależności między parametrami ryzyka. Dla każdego z rozpatrywanych modeli zostaną obliczone teoretyczne wielkości parametrów β_0^O i β_1^O w pomocniczej regresji liniowej, a także zostanie przedstawiona postać predyktora łącznej wartości szkód.

5. Przykłady

W dwóch pierwszych przykładach będziemy zakładać, że parametr ryzyka rozkładu wartości pojedynczej szkody jest pewną funkcją parametru ryzyka Λ_j, mającą postać:

$$\Theta_j = \Theta\left(\Lambda_j, \varepsilon_j\right),$$

gdzie ε_j jest niezależną od Λ_j zmienną losową o wartości oczekiwanej równej 0 ($\mathrm{E}\left(\varepsilon_j\right) = 0$). W dwóch kolejnych przykładach przyjmować będziemy założenia na temat dwuwymiarowego łącznego rozkładu Λ_j i Θ_j, dopuszczając możliwość, iż kowariancja między tymi zmiennymi jest niezerowa. Należy zauważyć, że w literaturze można napotkać różne modele dla rozkładu parametru ryzyka Λ_j (np. Denuit i in., 2007, i wiele innych) lub, znacznie rzadziej, dla rozkładu parametru Θ_j (np. Frangos, Vrontos, 2001). Trudno jest jednak znaleźć konkretne modele, w których analizowany byłby łączny rozkład wzajemnie zależnych parametrów Λ_j i Θ_j – jeden z nielicznych przykładów stanowi praca Pinqueta (1997).

Przykład 1. Rozważmy przypadek, gdy warunkowa wartość oczekiwana wartości pojedynczej szkody jest malejącą funkcją warunkowej wartości oczekiwanej liczby szkód daną wzorem:

$$\Theta_j = \frac{m_1}{\Lambda_j} + m_2 + \varepsilon_j,$$

gdzie ε_j jest niezależną od Λ_j zmienną losową o wartości oczekiwanej równej 0 ($\mathrm{E}\left(\varepsilon_j\right) = 0$), a $m_1 \geqslant 0$ i $m_2 \geqslant 0$ to nielosowe skalary. Zakładamy ponadto, że przynajmniej jeden z parametrów $m_i \neq 0$, $i = 1, 2$. Podobną zależność rozpatrywał Szprengiel (2007). Oczywiście, jeżeli m_1 będzie równe 0, parametry ryzyka będą niezależne.

Zastanówmy się zatem nad tym, jak przyjęcie powyższej postaci zależności między parametrami ryzyka wpłynie na wartości parametrów w regresji pomocniczej. Zacznijmy od parametru stojącego przy predyktorze liczby szkód (ozn. $\hat{\beta}_1^{Z1}$) danego równaniem (9). Aby uzyskać wartość parametru $\hat{\beta}_1^{Z1}$, musimy obliczyć wartość kowariancji między $\Lambda_j\Theta_j$ i Λ_j przy założonej postaci zależności:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}\left(\Lambda_j\Theta_j, \Lambda_j\right) &= \mathrm{E}\left(\Lambda_j^2\Theta_j\right) - \mathrm{E}\left(\Lambda_j\Theta_j\right)\mathrm{E}\left(\Lambda_j\right) = \\
&= \mathrm{E}\left(\Lambda_j^2\left(\frac{m_1}{\Lambda_j} + m_2 + \varepsilon_j\right)\right) - \mathrm{E}\left(\Lambda_j\left(\frac{m_1}{\Lambda_j} + m_2 + \varepsilon_j\right)\right)\mathrm{E}\left(\Lambda_j\right) = \\
&= \mathrm{E}\left(m_1\Lambda_j + m_2\Lambda_j^2\right) - \mathrm{E}\left(m_1 + m_2\Lambda_j\right)\mathrm{E}\left(\Lambda_j\right) = m_2\mathrm{Var}\left(\Lambda_j\right).
\end{aligned}$$

Wobec tego parametr $\hat{\beta}_1^{Z1}$ wyniesie:

$$\hat{\beta}_1^{Z1} = \frac{m_2\mathrm{Var}\left(\Lambda_j\right)}{\mathrm{Var}\left(\Lambda_j\right)} = m_2.$$

Natomiast parametr stojący przy stałej (ozn. $\hat{\beta}_0^{Z1}$) będzie równy:

$$\hat{\beta}_0^{Z1} = \mathrm{E}\left(\Lambda_j \Theta_j\right) - \frac{\mathrm{Cov}\left(\Lambda_j \Theta_j, \Lambda_j\right)}{\mathrm{Var}\left(\Lambda_j\right)} \mathrm{E}\left(\Lambda_j\right) =$$

$$= \mathrm{E}\left(\Lambda_j \left(\frac{m_1}{\Lambda_j} + m_2 + \varepsilon_j\right)\right) - m_2 \mathrm{E}\left(\Lambda_j\right) = \mathrm{E}\left(m_1 + m_2 \Lambda_j\right) - m_2 \mathrm{E}\left(\Lambda_j\right) = m_1.$$

Jak zatem widać, w przypadku założonej postaci zależności między parametrami ryzyka parametr stojący przy stałej będzie równy 0 tylko w przypadku, gdy parametr m_1 będzie równy 0, co oznaczałoby brak zależności między parametrami ryzyka w ramach rozpatrywanego w niniejszym przykładzie modelu.

Zobaczmy jeszcze, jaką postać przyjmie predyktor łącznej wartości szkód przy założonej postaci zależności. Po wstawieniu powyżej uzyskanych wyników do wzoru (14) otrzymamy:

$$BLP^{Z1}\left(X_{j,T} | \mathbf{N}_j^{T-1}\right) = m_1 + \left(1 - z_N^{T-1}\right) m_2 \mathrm{E}\left(\Lambda_j\right) + z_N^{T-1} m_2 \bar{N}_j^{T-1} =$$

$$= m_1 + m_2 \cdot BLP\left(N_{j,T} | \mathbf{N}_j^{T-1}\right).$$

Aby więc uzyskać prawidłową postać predyktora łącznej wartości szkód, powinniśmy do pomnożonego przez wartość m_2 predyktora liczby szkód dodać wartość stałą m_1.

Przykład 2. Przyjmijmy teraz, że warunkowa wartość oczekiwana wartości pojedynczej szkody jest następującą rosnącą funkcją warunkowej wartości oczekiwanej liczby szkód:

$$\Theta_j = n_1 + n_2 \Lambda_j + \varepsilon_j$$

dla nielosowych $n_1, n_2 \geqslant 0$ i przy założeniu, że przynajmniej jeden parametr $n_i \neq 0$, $i = 1, 2$; ε_j jest ponownie niezależną od Λ_j zmienną losową o wartości oczekiwanej równej 0 ($E\left(\varepsilon_j\right) = 0$). Podobną postać zależności rozpatrywał Otto (2004, s. 192). Dodajmy, że dla $n_2 = 0$ parametry ryzyka będą niezależne.

Przejdźmy do obliczenia parametrów w regresji pomocniczej. Aby uzyskać wartość parametru stojącego przy predyktorze liczby szkód (ozn. $\hat{\beta}_1^{Z2}$), ponownie będziemy potrzebować wartości kowariancji między $\Lambda_j \Theta_j$ i Λ_j:

$$\mathrm{Cov}\left(\Lambda_j \Theta_j, \Lambda_j\right) = \mathrm{E}\left(\Lambda_j^2 \Theta_j\right) - \mathrm{E}\left(\Lambda_j \Theta_j\right) \mathrm{E}\left(\Lambda_j\right) =$$

$$= \mathrm{E}\left(\Lambda_j^2 \left(n_1 + n_2 \Lambda_j + \varepsilon_j\right)\right) - \mathrm{E}\left(\Lambda_j \left(n_1 + n_2 \Lambda_j + \varepsilon_j\right)\right) \mathrm{E}\left(\Lambda_j\right) =$$

$$= \mathrm{E}\left(n_1 \Lambda_j^2 + n_2 \Lambda_j^3\right) - \mathrm{E}\left(n_1 \Lambda_j + n_2 \Lambda_j^2\right) \mathrm{E}\left(\Lambda_j\right) =$$

$$= n_1 \mathrm{Var}\left(\Lambda_j\right) + n_2 \left[\mathrm{E}\left(\Lambda_j^3\right) - \mathrm{E}\left(\Lambda_j^2\right) \mathrm{E}\left(\Lambda_j\right)\right].$$

Jak zatem widać, przy przyjętej postaci zależności obliczenie parametrów regresji oraz wartości predyktora będzie wymagało znajomości trzeciego momentu zwykłego rozkładu parametru ryzyka Λ_j. Zdefiniujmy wartość trzeciego momentu zwykłego na podstawie następującego oznaczenia dla trzeciego momentu centralnego:

$$\mathrm{E}\left((\Lambda_j - \Lambda)^3\right) = \mu_3.$$

Aby obliczyć wartość $\mathrm{E}\left(\Lambda_j^3\right)$, skorzystamy z faktu, że:

$$\mathrm{E}\left((\Lambda_j - \Lambda)^3\right) = \mathrm{E}\left(\Lambda_j^3\right) - 3\mathrm{E}\left(\Lambda_j\right)\mathrm{E}\left(\Lambda_j^2\right) + 3\left(\mathrm{E}\left(\Lambda_j\right)\right)^2 \mathrm{E}\left(\Lambda_j\right) - \left(\mathrm{E}\left(\Lambda_j\right)\right)^3.$$

Wobec tego zachodzi następująca równość:

$$\mathrm{E}\left(\Lambda_j^3\right) = \mu_3 + 3\Lambda a_\Lambda^2 + \Lambda^3.$$

W konsekwencji, korzystając z oznaczeń B), kowariancję między $\Lambda_j\Theta_j$ i Λ_j możemy zapisać w następujący sposób:

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\left(\Lambda_j\Theta_j, \Lambda_j\right) &= n_1 a_\Lambda^2 + n_2\left(\mu_3 + 3\Lambda a_\Lambda^2 + \Lambda^3 - \Lambda a_\Lambda^2 - \Lambda^3\right) = \\ &= n_1 a_\Lambda^2 + n_2\left(\mu_3 + 2\Lambda a_\Lambda^2\right).\end{aligned}$$

Parametr $\hat{\beta}_1^{Z2}$ wyniesie zatem:

$$\hat{\beta}_1^{Z2} = \frac{n_1 a_\Lambda^2 + n_2\left(\mu_3 + 2\Lambda a_\Lambda^2\right)}{a_\Lambda^2} = n_1 + 2n_2\Lambda + n_2\frac{\mu_3}{a_\Lambda^2},$$

parametr stojący przy stałej $\hat{\beta}_0^{Z2}$ będzie zaś równy:

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_0^{Z2} &= E\left(\Lambda_j\left(n_1 + n_2\Lambda_j + \varepsilon_j\right)\right) - \left(n_1 + 2n_2\Lambda + n_2\frac{\mu_3}{a_\Lambda^2}\right)\Lambda = \\ &= n_1\Lambda + n_2 a_\Lambda^2 + n_2\Lambda^2 - n_1\Lambda - 2n_2\Lambda^2 - n_2\Lambda\frac{\mu_3}{a_\Lambda^2} = n_2 a_\Lambda^2 - n_2\Lambda\left(\Lambda + \frac{\mu_3}{a_\Lambda^2}\right).\end{aligned}$$

Jak zatem widać, parametr $\hat{\beta}_0^{Z2}$ będzie równy 0, jeżeli $n_2 = 0$, to jednak będzie oznaczało, że w ramach rozpatrywanego obecnie modelu parametry ryzyka są niezależne. Parametr $\hat{\beta}_0^{Z2}$ będzie także równy 0, jeżeli będzie spełnione równanie:

$$\frac{\Lambda}{a_\Lambda}\left(\frac{\Lambda}{a_\Lambda} + \frac{\mu_3}{a_\Lambda^3}\right) = 1.$$

Bez bliższej wiedzy na temat rozkładu parametru ryzyka Λ_j nie da się powiedzieć, kiedy równanie to będzie spełnione. Można je jednak zapisać w nieco innej i bardziej interesującej postaci. Zacznijmy od tego, że Λ_j jest nieujemną zmienną losową, wobec czego zachodzi dla niej następująca nierówność:

$$\left(\mathrm{E}\left(\Lambda_j^2\right)\right)^2 \leqslant \mathrm{E}\left(\Lambda_j^3\right)\mathrm{E}\left(\Lambda_j\right). \tag{23}$$

Na podstawie równania (16) warunek na zerowanie się parametru $\hat{\beta}_0^{Z2}$ możemy zapisać w następującej postaci:

$$\frac{\mathrm{E}\left(\Lambda_j^2\right)}{\mathrm{E}\left(\Lambda_j\right)} = \frac{\mathrm{E}\left(\Lambda_j^2\left(n_1 + n_2\Lambda_j + \varepsilon_j\right)\right)}{\mathrm{E}\left(\Lambda_j\left(n_1 + n_2\Lambda_j + \varepsilon_j\right)\right)},$$

co można zapisać równoważnie w następujący sposób:

$$\mathrm{E}\left(n_1\Lambda_j + n_2\Lambda_j^2\right)\mathrm{E}\left(\Lambda_j^2\right) = \mathrm{E}\left(n_1\Lambda_j^2 + n_2\Lambda_j^3\right)\mathrm{E}\left(\Lambda_j\right).$$

Ostatecznie dostaniemy zatem następujący warunek na zerowanie się parametru przy stałej:

$$\left(\mathrm{E}\left(\Lambda_j^2\right)\right)^2 = \mathrm{E}\left(\Lambda_j^3\right)\mathrm{E}\left(\Lambda_j\right).$$

Oznacza to, że parametr $\hat{\beta}_0^{Z2}$ będzie równy 0, tylko jeżeli nierówność (23) będzie spełniona w formie równości.

Na zakończenie tej części zobaczmy, jaką postać będzie miał predyktor łącznej wartości szkód przy przyjętych założeniach:

$$\begin{aligned} BLP^{Z2}\left(X_{j,T}|\mathbf{N}_j^{T-1}\right) &= \hat{\beta}_0^{Z2} + \left(1 - z_N^{T-1}\right)\hat{\beta}_1^{Z2}E\left(\Lambda_j\right) + z_N^{T-1}\hat{\beta}_1^{Z2}\bar{N}_j^{T-1} = \\ &= n_2a_\Lambda^2 - n_2\Lambda\left(\Lambda + \frac{\mu_3}{a_\Lambda^2}\right) + \left(1 - z_N^{T-1}\right)\left(n_1 + 2n_2\Lambda + n_2\frac{\mu_3}{a_\Lambda^2}\right)\mathrm{E}\left(\Lambda_j\right) + \\ &\quad + z_N^{T-1}\left(n_1 + 2n_2\Lambda + n_2\frac{\mu_3}{a_\Lambda^2}\right)\bar{N}_j^{T-1} = \\ &= n_2a_\Lambda^2 - n_2\Lambda\left(\Lambda + \frac{\mu_3}{a_\Lambda^2}\right) + \left(n_1 + 2n_2\Lambda + n_2\frac{\mu_3}{a_\Lambda^2}\right)BLP\left(N_{j,T}|\mathbf{N}_j^{T-1}\right). \end{aligned}$$

Przy przyjętej postaci zależności predyktor łącznej wartości szkód uzyskamy zatem, mnożąc predyktor liczby szkód przez wartość

$$\left(n_1 + 2n_2\Lambda + n_2\frac{\mu_3}{a_\Lambda^2}\right)$$

oraz dodając do niego (zazwyczaj różną od 0) wartość

$$n_2a_\Lambda^2 - n_2\Lambda\left(\Lambda + \frac{\mu_3}{a_\Lambda^2}\right).$$

Przykład 3. Załóżmy następnie, że parametry Λ_j i Θ_j mają rozkład dwuwymiarowy dwupunktowy. Oznacza to zatem, że parametry Λ_j i Θ_j przyjmują z różnymi prawdopodobieństwami dwie wartości.

Tabela 1. Prawdopodobieństwa w rozkładzie dwuwymiarowym dwupunktowym

	$P(\Theta_j = \theta_1)$	$P(\Theta_j = \theta_2)$
$P(\Lambda_j = \lambda_1)$	$p_{1,1}$	$p_{1,2}$
$P(\Lambda_j = \lambda_2)$	$p_{2,1}$	$p_{2,2}$

Załóżmy, że $\theta_2 > \theta_1$ oraz że $\lambda_2 > \lambda_1$. Zaproponowany rozkład jest bardzo prosty, ale w pewnych sytuacjach może stanowić wystarczające przybliżenie opisywanej rzeczywistości. Model ten stanowi rozszerzenie tradycyjnego jednowymiarowego modelu *good driver–bad driver*, rozważanego np. przez Lemaire'a (1995) lub Denuita i in. (2007). Warto dodać, że w ramach tego modelu parametry ryzyka Λ_j i Θ_j mogą być zarówno dodatnio, jak i ujemnie skorelowane. Parametry te mogą być także niezależne, a ponieważ przypadek niezależności jest w kontekście zaproponowanej regresji liniowej szczególnie interesujący, zanim przejdziemy do obliczenia parametrów w pomocniczej regresji liniowej, zastanówmy się nad tym, kiedy parametry ryzyka pochodzące z zaproponowanego powyżej rozkładu będą niezależne. Z definicji niezależności wynika, że muszą być spełnione następujące warunki:

$$P(\Lambda_j = \lambda_i, \Theta_j = \theta_k) = P(\Lambda_j = \lambda_i) \cdot P(\Theta_j = \theta_k)$$

dla $i = 1, 2$ oraz $k = 1, 2$.

Warunki te można zapisać równoważnie przy pomocy prawdopodobieństw $p_{i,k}$:

$$p_{i,k} = (p_{i,1} + p_{i,2})(p_{1,k} + p_{2,k})$$

dla $i = 1, 2$ oraz $k = 1, 2$.

Rozpatrzmy powyższe równanie dla $i = k = 1$:

$$p_{1,1} = p_{1,1}p_{1,1} + p_{1,1}p_{2,1} + p_{1,2}p_{1,1} + p_{1,2}p_{2,1}.$$

Równanie to można zapisać równoważnie w następujący sposób:

$$p_{1,1}p_{2,2} + p_{1,1} = p_{1,1}p_{1,1} + p_{1,1}p_{2,1} + p_{1,2}p_{1,1} + p_{1,2}p_{2,1} + p_{1,1}p_{2,2},$$

co prowadzi do następującego równania:

$$p_{1,1}p_{2,2} + p_{1,1} = p_{1,1}(p_{1,1} + p_{2,1} + p_{1,2} + p_{2,2}) + p_{1,2}p_{2,1}.$$

Wobec tego warunek niezależności dla $i = k = 1$ ma następującą postać:

$$p_{1,1}p_{2,2} = p_{1,2}p_{2,1}.$$

Nietrudno sprawdzić, że dla pozostałych wartości i oraz k otrzymamy tę samą postać warunku.

Przejdźmy teraz do obliczenia parametrów w regresji pomocniczej (ozn. $\hat{\beta}_0^{Z3}$ i $\hat{\beta}_1^{Z3}$). Zacznijmy ponownie od parametru stojącego przy predyktorze liczby szkód $\hat{\beta}_1^{Z3}$. Wartość kowariancji między $\Lambda_j\Theta_j$ i Λ_j w przypadku rozkładu dwuwymiarowego dwupunktowego wyniesie:

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\left(\Lambda_j\Theta_j, \Lambda_j\right) = \mathrm{E}\left(\Lambda_j^2\Theta_j\right) - \mathrm{E}\left(\Lambda_j\Theta_j\right)\mathrm{E}\left(\Lambda_j\right) = \\ = \lambda_1^2\theta_1p_{1,1} + \lambda_1^2\theta_2p_{1,2} + \lambda_2^2\theta_1p_{2,1} + \lambda_2^2\theta_2p_{2,2} + \\ - \left(\lambda_1\theta_1p_{1,1} + \lambda_1\theta_2p_{1,2} + \lambda_2\theta_1p_{2,1} + \lambda_2\theta_2p_{2,2}\right)\cdot \\ \cdot\left[\lambda_1\left(p_{1,1} + p_{1,2}\right) + \lambda_2\left(p_{2,1} + p_{2,2}\right)\right],\end{aligned}$$

co po pewnych przekształceniach można zapisać następująco:

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\left(\Lambda_j\Theta_j, \Lambda_j\right) = \left(\lambda_2 - \lambda_1\right)\left[\lambda_2\left(p_{1,1} + p_{1,2}\right)\left(\theta_1p_{2,1} + \theta_2p_{2,2}\right) + \right. \\ \left. - \lambda_1\left(p_{2,1} + p_{2,2}\right)\left(\theta_1p_{1,1} + \theta_2p_{1,2}\right)\right]\end{aligned}$$

lub równoważnie:

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\left(\Lambda_j\Theta_j, \Lambda_j\right) = \left(\lambda_2 - \lambda_1\right)^2\left(p_{2,1} + p_{2,2}\right)\left(\theta_1p_{1,1} + \theta_2p_{1,2}\right) + \\ + \lambda_2\left(\lambda_2 - \lambda_1\right)\left(\theta_2 - \theta_1\right)\left(p_{1,1}p_{2,2} - p_{1,2}p_{2,1}\right).\end{aligned}$$

Jeżeli parametry ryzyka Λ_j i Θ_j będą niezależne, ostatni fragment po lewej stronie powyższego równania będzie oczywiście równy 0. Obliczmy jeszcze wartość wariancji Λ_j przy przyjętych oznaczeniach i założeniach:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left(\Lambda_j\right) = \mathrm{E}\left(\Lambda_j^2\right) - \left(\mathrm{E}\left(\Lambda_j\right)\right)^2 = \\ = \lambda_1^2\left(p_{1,1} + p_{1,2}\right) + \lambda_2^2\left(p_{2,1} + p_{2,2}\right) - \left[\lambda_1\left(p_{1,1} + p_{1,2}\right) + \lambda_2\left(p_{2,1} + p_{2,2}\right)\right]^2,\end{aligned}$$

co można uprościć do następującej postaci:

$$\mathrm{Var}\left(\Lambda_j\right) = \left(\lambda_2 - \lambda_1\right)^2\left(p_{1,1} + p_{1,2}\right)\left(p_{2,1} + p_{2,2}\right).$$

Wobec tego parametr $\hat{\beta}_1^{Z3}$ można zapisać w następującej postaci:
$\hat{\beta}_1^{Z3} = \left(\lambda_2 - \lambda_1\right)\cdot$

$$\cdot\frac{\left[\lambda_2\left(p_{1,1} + p_{1,2}\right)\left(\theta_1p_{2,1} + \theta_2p_{2,2}\right) - \lambda_1\left(p_{2,1} + p_{2,2}\right)\left(\theta_1p_{1,1} + \theta_2p_{1,2}\right)\right]}{\left(\lambda_2 - \lambda_1\right)^2\left(p_{1,1} + p_{1,2}\right)\left(p_{2,1} + p_{2,2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left[\lambda_2 \frac{\theta_1 p_{2,1} + \theta_2 p_{2,2}}{p_{2,1} + p_{2,2}} - \lambda_1 \frac{\theta_1 p_{1,1} + \theta_2 p_{1,2}}{p_{1,1} + p_{1,2}}\right] = \tag{24}$$

$$= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left[\lambda_2 \mathrm{E}\left(\Theta_j | \Lambda_j = \lambda_2\right) - \lambda_1 \mathrm{E}\left(\Theta_j | \Lambda_j = \lambda_1\right)\right].$$

Element w nawiasie jest zatem ważoną różnicą między warunkowymi wartościami oczekiwanymi wartości pojedynczej szkody $\mathrm{E}\left(\Theta_j|\Lambda_j = \lambda_2\right)$ i $\mathrm{E}\left(\Theta_j|\Lambda_j = \lambda_1\right)$. Parametr $\hat{\beta}_1^{Z3}$ można zapisać równoważnie w następujący sposób:

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_1^{Z3} &= \frac{\left(\lambda_2 - \lambda_1\right)^2 \left(p_{2,1} + p_{2,2}\right)\left(\theta_1 p_{1,1} + \theta_2 p_{1,2}\right)}{\left(\lambda_2 - \lambda_1\right)^2 \left(p_{1,1} + p_{1,2}\right)\left(p_{2,1} + p_{2,2}\right)} + \\
&+ \frac{\lambda_2\left(\lambda_2 - \lambda_1\right)\left(\theta_2 - \theta_1\right)\left(p_{1,1}p_{2,2} - p_{1,2}p_{2,1}\right)}{\left(\lambda_2 - \lambda_1\right)^2 \left(p_{1,1} + p_{1,2}\right)\left(p_{2,1} + p_{2,2}\right)} = \\
&= \frac{\theta_1 p_{1,1} + \theta_2 p_{1,2}}{p_{1,1} + p_{1,2}} + \frac{\lambda_2\left(\theta_2 - \theta_1\right)\left(p_{1,1}p_{2,2} - p_{1,2}p_{2,1}\right)}{\left(\lambda_2 - \lambda_1\right)\left(p_{1,1} + p_{1,2}\right)\left(p_{2,1} + p_{2,2}\right)} = \\
&= \mathrm{E}\left(\Theta_j | \Lambda_j = \lambda_1\right) + \frac{\lambda_2\left(\theta_2 - \theta_1\right)\left(p_{1,1}p_{2,2} - p_{1,2}p_{2,1}\right)}{\left(\lambda_2 - \lambda_1\right)\left(p_{1,1} + p_{1,2}\right)\left(p_{2,1} + p_{2,2}\right)}.
\end{aligned} \tag{25}$$

Widzimy zatem, że w przypadku niezależności parametrów ryzyka drugi element sumy z powyższego równania będzie równy 0, a parametr $\hat{\beta}_1^{Z3}$ będzie równy warunkowej wartości oczekiwanej parametru ryzyka Θ_j, pod warunkiem, że parametr Λ_j jest równy λ_1. W przypadku niezależności parametrów ryzyka Λ_j i Θ_j ową warunkową wartość oczekiwaną można zapisać następująco:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\Theta_j | \Lambda_j = \lambda_1\right) &= \frac{\theta_1\left(p_{1,1} + p_{1,2}\right)\left(p_{1,1} + p_{2,1}\right) + \theta_2\left(p_{1,1} + p_{1,2}\right)\left(p_{1,2} + p_{2,2}\right)}{p_{1,1} + p_{1,2}} = \\
&= \theta_1\left(p_{1,1} + p_{2,1}\right) + \theta_2\left(p_{1,2} + p_{2,2}\right) = \mathrm{E}\left(\Theta_j\right).
\end{aligned}$$

Oznacza to, że w przypadku, gdy parametry ryzyka będą niezależne, parametr $\hat{\beta}_1^{Z3}$ będzie równy bezwarunkowej wartości oczekiwanej wartości pojedynczej szkody, co oczywiście jest zgodne z wynikami uzyskanymi w części 4 artykułu.

Obliczmy jeszcze wartość parametru stojącego przy stałej w pomocniczej regresji liniowej:

$$\hat{\beta}_0^{Z3} = \mathrm{E}\left(\Lambda_j \Theta_j\right) - \frac{\mathrm{Cov}\left(\Lambda_j \Theta_j, \Lambda_j\right)}{\mathrm{Var}\left(\Lambda_j\right)} \mathrm{E}\left(\Lambda_j\right) =$$

$$= \lambda_1 \theta_1 p_{1,1} + \lambda_1 \theta_2 p_{1,2} + \lambda_2 \theta_1 p_{2,1} + \lambda_2 \theta_2 p_{2,2} - \hat{\beta}_1^{Z3}\left[\lambda_1\left(p_{1,1} + p_{1,2}\right) + \lambda_2\left(p_{2,1} + p_{2,2}\right)\right].$$

Na podstawie wartości $\hat{\beta}_1^{Z3}$ z równania (24) otrzymamy następującą postać parametru $\hat{\beta}_0^{Z3}$:

$$\hat{\beta}_0^{Z3} = \frac{\lambda_2\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\left[\frac{\theta_1 p_{1,1}+\theta_2 p_{1,2}}{p_{1,1}+p_{1,2}} - \frac{\theta_1 p_{2,1}+\theta_2 p_{2,2}}{p_{2,1}+p_{2,2}}\right] = \\ = \frac{\lambda_2\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\left[\mathrm{E}\left(\Theta_j|\Lambda_j=\lambda_1\right) - \mathrm{E}\left(\Theta_j|\Lambda_j=\lambda_2\right)\right].$$

W przypadku, gdy parametry ryzyka Λ_j i Θ_j są niezależne, zachodzi:

$$\mathrm{E}\left(\Theta_j|\Lambda_j=\lambda_2\right) = \frac{\theta_1\left(p_{2,1}+p_{2,2}\right)\left(p_{1,1}+p_{2,1}\right)+\theta_2\left(p_{2,1}+p_{2,2}\right)\left(p_{1,2}+p_{2,2}\right)}{p_{2,1}+p_{2,2}} = \\ = \theta_1\left(p_{1,1}+p_{2,1}\right)+\theta_2\left(p_{1,2}+p_{2,2}\right) = \mathrm{E}\left(\Theta_j|\Lambda_j=\lambda_1\right) = \mathrm{E}\left(\Theta_j\right),$$

co oznacza, że parametr $\hat{\beta}_0^{Z3}$ będzie równy 0. Na podstawie postaci parametru $\hat{\beta}_1^{Z3}$ z równania (25) parametr $\hat{\beta}_0^{Z3}$ w przypadku ogólnym można zapisać równoważnie w następujący sposób:

$$\hat{\beta}_0^{Z3} = \frac{\lambda_2\lambda_1\left(\theta_2-\theta_1\right)}{\lambda_2-\lambda_1}\left[\frac{p_{2,1}p_{1,2}-p_{1,1}p_{2,2}}{\left(p_{1,1}+p_{1,2}\right)\left(p_{2,1}+p_{2,2}\right)}\right].$$

Jak zatem ponownie widać, parametr $\hat{\beta}_0^{Z3}$ będzie równy 0 w przypadku, gdy $p_{1,1}p_{2,2} = p_{1,2}p_{2,1}$, czyli gdy parametry ryzyka Λ_j i Θ_j będą niezależne.

Na zakończenie zapiszmy jeszcze postać predyktora dla łącznej wartości szkód:

$$BLP^{Z3}\left(X_{j,T}|\mathbf{N}_j^{T-1}\right) = \hat{\beta}_0^{Z3} + \left(1-z_N^{T-1}\right)\hat{\beta}_1^{Z3}\mathrm{E}\left(\Lambda_j\right) + z_N^{T-1}\hat{\beta}_1^{Z3}\bar{N}_j^{T-1} = \\ = \frac{\lambda_2\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\left[\frac{\theta_1 p_{1,1}+\theta_2 p_{1,2}}{p_{1,1}+p_{1,2}} - \frac{\theta_1 p_{2,1}+\theta_2 p_{2,2}}{p_{2,1}+p_{2,2}}\right] + \\ + \left(1-z_N^{T-1}\right)\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\left[\lambda_2\frac{\theta_1 p_{2,1}+\theta_2 p_{2,2}}{p_{2,1}+p_{2,2}} - \lambda_1\frac{\theta_1 p_{1,1}+\theta_2 p_{1,2}}{p_{1,1}+p_{1,2}}\right]\mathrm{E}\left(\Lambda_j\right) + \\ + z_N^{T-1}\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\left[\lambda_2\frac{\theta_1 p_{2,1}+\theta_2 p_{2,2}}{p_{2,1}+p_{2,2}} - \lambda_1\frac{\theta_1 p_{1,1}+\theta_2 p_{1,2}}{p_{1,1}+p_{1,2}}\right]\bar{N}_j^{T-1} = \\ = \frac{\lambda_2\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\left[\frac{\theta_1 p_{1,1}+\theta_2 p_{1,2}}{p_{1,1}+p_{1,2}} - \frac{\theta_1 p_{2,1}+\theta_2 p_{2,2}}{p_{2,1}+p_{2,2}}\right] + \\ + \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\left[\lambda_2\frac{\theta_1 p_{2,1}+\theta_2 p_{2,2}}{p_{2,1}+p_{2,2}} - \lambda_1\frac{\theta_1 p_{1,1}+\theta_2 p_{1,2}}{p_{1,1}+p_{1,2}}\right]\cdot BLP\left(N_{j,T}|\mathbf{N}_j^{T-1}\right).$$

Oczywiście predyktor ten jest ponownie afiniczną funkcją predyktora liczby szkód.

Przykład 4. Przyjmijmy wreszcie, że parametry ryzyka Λ_j i Θ_j mają dwuwymiarowy rozkład lognormalny, czyli załóżmy, że Λ_j i Θ_j to para dodatnich zmiennych losowych, których logarytmy naturalne mają dwuwymiarowy rozkład normalny:

$\Lambda_j > 0$ i $\Theta_j > 0$,

$$\begin{bmatrix} \log(\Lambda_j) \\ \log(\Theta_j) \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} u_\Lambda \\ u_\Theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \omega_\Lambda^2 & \omega_{\Lambda\Theta} \\ \omega_{\Lambda\Theta} & \omega_\Theta^2 \end{bmatrix}\right).$$

W literaturze rozpatrywane były modele, w których parametr ryzyka Λ_j miał rozkład lognormalny (por. Denuit i in., 2007) i, co istotne, stanowiły często dobre przybliżenie do rzeczywistych danych. Z tego powodu warto rozważyć dwuwymiarowe rozszerzenie owych modeli. Należy wspomnieć, że przyjęcie wartości $\omega_{\Lambda\Theta} = 0$ będzie oznaczało, że parametry ryzyka Λ_j i Θ_j są niezależne. W przypadku, gdy zachodzi $\omega_{\Lambda\Theta} \neq 0$, parametry ryzyka mogą być zarówno dodatnio, jak i ujemnie skorelowane.

Tak jak dotychczas rozpocznijmy od obliczenia kowariancji między $\Lambda_j\Theta_j$ i Λ_j, ponieważ jest ona niezbędna do uzyskania wartości parametru stojącego w regresji przy predyktorze liczby szkód (ozn. $\hat{\beta}_1^{Z4}$):

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(\Lambda_j\Theta_j, \Lambda_j) &= \operatorname{E}\left(\Lambda_j^2\Theta_j\right) - \operatorname{E}(\Lambda_j\Theta_j)\operatorname{E}(\Lambda_j) = \\ &= \exp\left(2u_\Lambda + u_\Theta + 2\omega_\Lambda^2 + \frac{1}{2}\omega_\Theta^2 + 2\omega_{\Lambda\Theta}\right) + \\ &\quad - \exp\left(u_\Lambda + u_\Theta + \frac{1}{2}\omega_\Lambda^2 + \frac{1}{2}\omega_\Theta^2 + \omega_{\Lambda\Theta}\right)\exp\left(u_\Lambda + \frac{1}{2}\omega_\Lambda^2\right) = \\ &= \exp\left(2u_\Lambda + \omega_\Lambda^2\right)\exp\left(u_\Theta + \frac{1}{2}\omega_\Theta^2\right)\exp(\omega_{\Lambda\Theta})\left[\exp\left(\omega_\Lambda^2 + \omega_{\Lambda\Theta}\right) - 1\right].\end{aligned}$$

Wariancja parametru Λ_j jest natomiast równa:

$$\operatorname{Var}(\Lambda_j) = \exp\left(2u_\Lambda + \omega_\Lambda^2\right)\left[\exp\left(\omega_\Lambda^2\right) - 1\right],$$

wobec czego parametr stojący przy predyktorze liczby szkód w regresji pomocniczej będzie równy:

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_1^{Z4} &= \frac{\exp(2u_\Lambda + \omega_\Lambda^2)\exp\left(u_\Theta + \frac{1}{2}\omega_\Theta^2\right)\exp(\omega_{\Lambda\Theta})\left[\exp(\omega_\Lambda^2 + \omega_{\Lambda\Theta}) - 1\right]}{\exp(2u_\Lambda + \omega_\Lambda^2)\left[\exp(\omega_\Lambda^2) - 1\right]} = \\ &= \exp\left(u_\Theta + \frac{1}{2}\omega_\Theta^2\right)\exp(\omega_{\Lambda\Theta})\frac{\exp(\omega_\Lambda^2 + \omega_{\Lambda\Theta}) - 1}{\exp(\omega_\Lambda^2) - 1},\end{aligned}$$

co w przypadku niezależności parametrów uprości się oczywiście do:

$$\hat{\beta}_1^{NZ} = \exp\left(u_\Theta + \frac{1}{2}\omega_\Theta^2\right) = \operatorname{E}(\Theta_j).$$

Parametr stojący przy stałej (ozn. $\hat{\beta}_0^{Z4}$) będzie natomiast w przypadku ogólnym równy:

$$\hat{\beta}_0^{Z4} = \exp\left(u_\Lambda + u_\Theta + \frac{1}{2}\omega_\Lambda^2 + \frac{1}{2}\omega_\Theta^2 + \omega_{\Lambda\Theta}\right) + \\ - \exp\left(u_\Theta + \frac{1}{2}\omega_\Theta^2\right)\exp\left(\omega_{\Lambda\Theta}\right)\frac{\exp\left(\omega_\Lambda^2 + \omega_{\Lambda\Theta}\right) - 1}{\exp\left(\omega_\Lambda^2\right) - 1}\exp\left(u_\Lambda + \frac{1}{2}\omega_\Lambda^2\right) = \\ = \exp\left(u_\Lambda + \frac{1}{2}\omega_\Lambda^2\right)\exp\left(u_\Theta + \frac{1}{2}\omega_\Theta^2\right)\exp\left(\omega_\Lambda^2 + \omega_{\Lambda\Theta}\right)\frac{1 - \exp\left(\omega_{\Lambda\Theta}\right)}{\exp\left(\omega_\Lambda^2\right) - 1}.$$

Nietrudno dostrzec, że warunkiem zerowania się parametru $\hat{\beta}_0^{Z4}$ jest $\omega_{\Lambda\Theta} = 0$, czyli warunek niezależności parametrów ryzyka.

Zapiszmy jeszcze postać predyktora łącznej wartości szkód:

$$BLP^{Z4}\left(X_{j,T}|\mathbf{N}_j^{T-1}\right) = \hat{\beta}_0^{Z4} + \left(1 - z_N^{T-1}\right)\hat{\beta}_1^{Z4}\mathrm{E}\left(\Lambda_j\right) + z_N^{T-1}\hat{\beta}_1^{Z4}\bar{N}_j^{T-1} = \\ = \exp\left(u_\Lambda + \frac{1}{2}\omega_\Lambda^2\right)\exp\left(u_\Theta + \frac{1}{2}\omega_\Theta^2\right)\exp\left(\omega_\Lambda^2 + \omega_{\Lambda\Theta}\right)\frac{1 - \exp\left(\omega_{\Lambda\Theta}\right)}{\exp\left(\omega_\Lambda^2\right) - 1} + \\ + \left(1 - z_N^{T-1}\right)\exp\left(u_\Theta + \frac{1}{2}\omega_\Theta^2\right)\exp\left(\omega_{\Lambda\Theta}\right)\frac{\exp\left(\omega_\Lambda^2 + \omega_{\Lambda\Theta}\right) - 1}{\exp\left(\omega_\Lambda^2\right) - 1}\mathrm{E}\left(\Lambda_j\right) + \\ + z_N^{T-1}\exp\left(u_\Theta + \frac{1}{2}\omega_\Theta^2\right)\exp\left(\omega_{\Lambda\Theta}\right)\frac{\exp\left(\omega_\Lambda^2 + \omega_{\Lambda\Theta}\right) - 1}{\exp\left(\omega_\Lambda^2\right) - 1}\bar{N}_j^{T-1} = \\ = \exp\left(u_\Lambda + \frac{1}{2}\omega_\Lambda^2\right)\exp\left(u_\Theta + \frac{1}{2}\omega_\Theta^2\right)\exp\left(\omega_\Lambda^2 + \omega_{\Lambda\Theta}\right)\frac{1 - \exp\left(\omega_{\Lambda\Theta}\right)}{\exp\left(\omega_\Lambda^2\right) - 1} + \\ + \exp\left(u_\Theta + \frac{1}{2}\omega_\Theta^2\right)\exp\left(\omega_{\Lambda\Theta}\right)\frac{\exp\left(\omega_\Lambda^2 + \omega_{\Lambda\Theta}\right) - 1}{\exp\left(\omega_\Lambda^2\right) - 1}BLP\left(N_{j,T}|\mathbf{N}_j^{T-1}\right).$$

Podsumowując rozważania zawarte w tej części artykułu, należy zauważyć, że praktycznie we wszystkich rozpatrywanych modelach w przypadku zależności parametrów ryzyka predyktor łącznej wartości szkód okazał się afiniczną funkcją predyktora liczby szkód. Wyjątek stanowi przykład 3, ale nawet przy założeniach w nim przyjętych warunek konieczny zerowania się parametru przy stałej w przypadku zależności parametrów ryzyka raczej rzadko będzie spełniony w praktyce. Oznacza to, że jeżeli parametry ryzyka nie są niezależne, wartość stałej w regresji pomocniczej powinna istotnie różnić się od 0. Stanowi to potwierdzenie wniosków otrzymanych w części 4 artykułu.

Należy dodać, że zaprezentowane powyżej modele nie wyczerpują zbioru możliwych form zależności między parametrami ryzyka, ale nie było to bynajmniej celem niniejszego artykułu. Warto natomiast podkreślić, że zaproponowane modele zależności są rozszerzeniem popularnych modeli jednowymiarowych, które dobrze sprawdzały się w dotychczas przeprowadzonych badaniach empirycznych.

6. Zakończenie

W niniejszym artykule został obliczony najlepszy liniowy predyktor łącznej wartości szkód na podstawie liczby szkód w ogólnym modelu stochastycznej zależności liczby szkód i wartości pojedynczych szkód. Co ciekawe, okazało się, że predyktor ten jest afiniczną funkcją predyktora liczby szkód. Następnie została zaproponowana regresja pomocnicza pozwalająca na przetestowanie w prosty sposób tego, czy liczba i wartości pojedynczych szkód są stochastycznie zależne, co z kolei oznaczałoby, że nie należy stosować do predykcji łącznej wartości szkód predyktora liczby szkód pomnożonego przez populacyjną wartość oczekiwaną wartości pojedynczej szkody. W ostatniej części artykułu zostały rozpatrzone pewne przykładowe formy zależności między parametrami ryzyka, a także zostały dla nich obliczone teoretyczne wartości parametrów w zaproponowanej regresji liniowej oraz została uzyskana postać predyktora łącznej wartości szkód.

Bibliografia

[1] Bühlmann H. (1967), *Experience Rating and Credibility*, „ASTIN Bulletin", vol. 4, no. 3, s. 199–207.

[2] Bühlmann H., Gisler A. (2005), *A Course in Credibility Theory and Its Applications*, Springer-Verlag, Berlin.

[3] Bühlmann H., Gisler A., Kolöffel D. (2003), *Multidimensional Credibility Applied to Estimating The Frequency of Big Claims*, ASTIN Colloquium w Berlinie.

[4] Denuit M., Marechal X., Pitrebois S., Walhin J.-F. (2007), *Actuarial Modelling of Claim Counts*, John Wiley & Sons Ltd, Chichester.

[5] Englund M., Guillen M., Gustafsson J., Nielsen L.H., Nielsen J.P. (2008), *Multivariate Latent Risk: a Credibility Approach*, „ASTIN Bulletin", vol. 38, no. 1, s. 137–146.

[6] Frangos N.E., Vrontos S.E. (2001), *Design of Optimal Bonus-Malus Systems with a Frequency and a Severity Component on an Individual Basis in Automobile Insurance*, „ASTIN Bulletin", vol. 31, no. 1, s. 1–22.

[7] Frees E. (2003), *Multivariate Credibility for Aggregate Loss Models*, „North American Actuarial Journal", vol. 7, no. 1, s. 13–37.

[8] Goulet V., Forgues A., Lu J. (2006), *Credibility for Severity Revisited*, „North American Actuarial Journal", vol. 10, no. 1, s. 49–62.

[9] Lemaire J. (1995), *Bonus-Malus Systems in Automobile Insurance*, Kluwer-Nijhoff Publishing, Boston.

[10] Otto W. (2004), *Ubezpieczenia majątkowe*, cz. 1, *Teoria ryzyka*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.

[11] Pinquet J. (1997), *Allowance for Cost of Claims in Bonus-Malus Systems*, „ASTIN Bulletin", vol. 27, no. 1, s. 33–57.

[12] Sawicka J. (2011), *Zagadnienia kalkulacji składki zaufania na podstawie łącznej wartości i liczby szkód*, w: *Zagadnienia aktuarialne – teoria i praktyka*, red.

W. Ostasiewicz, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu, Wrocław, s. 202–228.

[13] Szprengiel Ł. (2007), *Kalkulacja składki na podstawie przebiegu ubezpieczenia a zależność częstotliwości i wartości szkód*, praca magisterska obroniona na Wydziale Nauk Ekonomicznych UW pod kierunkiem W. Otto.

***

Model of stochastic dependence between number and amount of claims

Abstract

In the literature on credibility method and experience rating concerning calculation of premium for total claim amount on the basis of frequency and/or severity component one can usually find models based on assumption that number and amount of claims are independent random variables. In this article we consider general model of stochastic dependence between number and amount of claims and calculate in this general model credibility premium for total claim amount on the basis of the number of claims. We propose also simple linear regression which can serve to test whether number and amount of claims are stochastically dependent. Finally, we present examples of specific forms of dependence between number and amount of claims – for each exemplary model we calculate credibility premium and present theoretical values of regression parameters.

Autor:

Joanna Sawicka, Katedra Statystyki i Ekonometrii, Wydział Nauk Ekonomicznych, Uniwersytet Warszawski, ul. Długa 44/50, 00-241 Warszawa,

e-mail: sawicka@wne.uw.edu.pl