Roczniki Kolegium Analiz Ekonomicznych
Zeszyt 31/2013

Wojciech Antoniak

Wpływ reasekuracji i retrocesji na własności składek

Streszczenie

Heerwarden i Kaas (1992) wprowadzili innowacyjną metodologię w podejściu do analizowania składek. Zaproponowali podział ryzyka na dwie części: udział ubezpieczyciela i udział reasekuratora. Przeprowadzone przez nich rozumowanie spowodowało utworzenie składki holenderskiej. W pracy wykorzystam ich podejście, przedstawiając konstrukcję składki, kładącą duży nacisk na sposób, w jaki ryzyko jest dzielone i przekazywane nie tylko reasekuratorowi, ale także koasekuratorom i retrocedentom. Wskażę warunki, aby postulowana składka była koherentna, wypukła lub quasi-wypukła. W pracy wykorzystam opisy transferu ryzyka z prac Gerbera (1984) i Heijnean (1989). Poczynione rozważania pozwolą wskazać, na co musi zwracać uwagę firma ubezpieczeniowa w doborze kontraktów reasekuracyjnych, aby oferowana przez nią składka miała pożądane własności.

1. Wprowadzenie

Rynek reasekuracji jest bardzo ważną częścią rynku ubezpieczeniowego. Podczas powodzi w 2010 r. w Polsce, według Komisji Nadzoru Finansowego (2011), tylko 39% szkód pokryli ubezpieczyciele. Największe firmy reasekuracyjne na świecie, takie jak Munich Re. z Niemiec czy Swiss Re. z Szwajcarii, wykazują roczny przypis w wysokości około 30 miliardów dolarów (2008). Jest to rynek nieustająco rozwijający się. Reasekuratorzy starają się pokrywać kolejne rodzaje zagrożeń. Po atakach z 11 września 2001 r. większe znaczenie zaczęto przypisywać modelowaniu szkód terrorystycznych, w tym także NBCR (ang. *Nuclear*, *Biological*, *Chemical or Radiological*). Mimo to tylko kilka prac naukowych porusza problematykę optymalności struktur tego rynku. Dla ustalonej liczby firm ubezpieczeniowych Shubik i Powers (2001, 2006) udowodnili, przy pomocy teorii gier niekooperacyjnych, że optymalna liczba reasekuratorów powinna być równa w przybliżeniu pierwiastkowi liczby firm ubezpieczeniowych na tym rynku. Reguła ta została potwierdzona przez Veneciana i innych (2005) przy użyciu podejścia ekonomicznego. Jednak reasekurator przejmujący ryzyko może jego część związaną z pewnym typem katastrofy scedować na inny wyspecjalizowany podmiot ubezpieczeniowy. Tego typu umowy nazywane są retrocesją. W mojej pracy skupię się na zbadaniu zależności między własnościami składki płaconej przez osobę ubezpieczającą się w zależności od sposobu cedowania ryzyk. W tym celu rozważę rynek ubezpieczeniowy z różnymi rodzajami składek, ryzyk oraz informacji, które posiadają podmioty uczestniczące w nim. W szczególności rozpatrzę różne rodzaje transferu ryzyk. Rozpocznę od propozycji Gerbera (1984) tzw. transferów łańcuchowych oraz wprowadzę definicję składki ubezpieczeniowej, którą musi zapłacić ubezpieczający się, w zależności od składek wszystkich podmiotów uczestniczących w transferze. Została ona po raz pierwszy w przypadku transferu łańcuchowego zaproponowana przez Paszkiewicza i Olejnika (2010), natomiast przypadek szczególny był badany przez Kaasa i Heerwaardena (1992). Dalej uogólnię powyższe rozważania na inne typy transferu, w tym zaproponowany przez Heijnena (Heijnen, 1989; De Schepper, Heijnen, 1990) transfer drzewkowy.

2. Struktura rynku

Niech $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ będzie ustaloną przestrzenią probabilistyczną. W pracy ryzykiem będę nazywał zmienną losową, zazwyczaj oznaczaną R, o wartościach nieujemnych. Niech $\mathcal{R}$ będzie zbiorem wszystkich takich zmiennych losowych oraz niech $\mathcal{S}$ będzie zbiorem wszystkich pod-σ-ciał $\mathcal{A}$. Skrót p.w., przy danym wyrażeniu, będzie oznaczał, że wyrażenie jest prawdziwe na zbiorze o mierze $\mathbb{P}$ równej 1.

Rynek ubezpieczeniowy będzie zbiorem firm dokonujących między sobą transferu ryzyk. Osoba, która chce się ubezpieczyć, będzie miała kontakt z jedną z nich. Tę wyróżnioną firmę nazwę ubezpieczycielem, natomiast resztę reasekuratorami. Będą oni otrzymywać w procesie wielokrotnej reasekuracji pewną część ryzyka od innego podmiotu. Niech operator $I : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ określa, ile pewien podmiot otrzymuje ryzyka. Będę analizował następujące własności cedowania ryzyk między podmiotami, dla $R, Z \in \mathcal{R}$, $c \geqslant 0$:

$(W1)$ Skalowanie: $I(cR) = cI(R)$ p.w.
$(W2)$ Subaddytywność: $I(R+Z) \leqslant I(R) + I(Z)$ p.w.
$(W3)$ Monotoniczność: Jeśli $R \leqslant Z$ p.w., to $I(R) \leqslant I(Z)$ p.w.
$(W4)$ Addytywność stałej: $I(R+c) = I(R) + I(c)$ p.w.

Ponadto będę rozważał te operatory, które spełniają:
1. $\forall_{R,Z\in\mathcal{R}} \quad R = Z$ p.w. $\Rightarrow I(R) = I(Z)$ p.w.
2. $\forall_{R\in\mathcal{R}} \left(\exists_{a\geqslant 0} \quad R = a \text{ p.w.} \Rightarrow \exists_{b\geqslant 0} \quad I(R) = b \text{ p.w.}\right)$.

Podam teraz przykłady podziałów spełniające rozważane własności. Dalej przez $T : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ będę oznaczał funkcjonały jednorodne ($T(aR) = aT(R)$ dla $a > 0$ i $R \in \mathcal{R}$), subaddytywne, monotoniczne, spełniające własność translacji

$$T(R + a) = T(R) + a$$

dla $a > 0$ i $R \in \mathcal{R}$ oraz takie, że $T(0) \geqslant 0$. Przykładami mogą być znane miary ryzyk takie, jak: *Value at Risk*, *Tail Value at Risk*, *Expected Shortfall* czy też wartość oczekiwana (Denuit i in., 2005).

Przykład 1 (Reasekuracja proporcjonalna). Podział ryzyka $I(R) = aR$, gdzie $a \in (0, 1)$, ma własności $(W1) - (W4)$.

Przykład 2 (*Stop loss*). Podział ryzyka $I(R) = (R - aT(R))_+$, gdzie $a > 0$, ma własność $(W1)$. Ponadto dla $a = 1$ także własność $(W4)$ oraz jeśli T jest addytywnym funkcjonałem, to I spełnia $(W2)$.

Przykład 3 (Ograniczenie odpowiedzialności). Podział ryzyka

$$I(R) = \min(R, aT(R)),$$

gdzie $a > 0$, spełnia $(W1)$, $(W3)$. Ponadto jeśli $a = 1$ i T jest funkcjonałem addytywnym, to I spełnia własność $(W4)$.

Przykład 4 (Franszyza). Podział ryzyka $I(R) = R\mathbf{1}_{\{R \geqslant T(R)\}}$ spełnia warunek $(W1)$.

Ponadto można zmodyfikować podziały: *stop loss*, ograniczenia odpowiedzialności oraz franszyzy w następujący sposób:

$$\begin{array}{ll} (\textit{Stop loss}) & I(R) = (R - a)_+, \\ (\text{Ograniczenie odpowiedzialności}) & I(R) = \min(R, a), \\ (\text{Franszyza}) & I(R) = R\mathbf{1}_{\{R \geqslant a\}}, \end{array}$$

gdzie $a > 0$. Wówczas posiadają one tylko własność $(W3)$. Niech I^* dla danego podziału I będzie oznaczało odwzorowanie opisujące, ile u pierwszego podmiotu pozostaje z ryzyka R po dokonaniu reasekuracji, tzn.:

$$I^*(R) = R - I(R).$$

Stwierdzenie 1. *Niech I_1, I_2 będą odwzorowaniami określającym ilość cedowanego ryzyka. Wówczas prawdziwe są następujące stwierdzenia:*

1. *Jeśli I_1, I_2 spełniają $(W1)$, to I_1^* i $I_1 \circ I_2$ spełniają $(W1)$.*
2. *Jeśli I_1, I_2 spełniają $(W4)$, to I_1^* i $I_1 \circ I_2$ spełniają $(W4)$, gdzie $(I_1 \circ I_2)(\cdot) = I_1(I_2(\cdot))$.*
3. *Jeśli I_1, I_2 są podziałami proporcjonalnymi, to I_1^* i $I_1 \circ I_2$ są podziałami proporcjonalnymi.*
4. *Jeśli I_1, I_2 spełniają $(W2)$ i $(W3)$, to $I_1 \circ I_2$ spełnia $(W2)$ i $(W3)$. Niech $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Jeśli I_1, I_2 spełniają własność (Wi), to $I_1 + I_2$ ma własność (Wi).*

Dowód. Stwierdzenie dowodzi się wprost z definicji założonych własności. Dla przykładu przedstawię dowód dla punktu 4. Niech $R, Z \in \mathcal{R}$. Wówczas z własności $(W2)$ dla operatora I_1 oraz własności $(W2)$ i $(W3)$ dla operatora I_2 mam p.w.:

$$I_2(R + Z) \leqslant I_2(R) + I_2(Z) \Rightarrow \\ \Rightarrow I_1(I_2(R + Z)) \leqslant I_1(I_2(R) + I_2(Z)) \leqslant I_1(I_2(R)) + I_1(I_2(Z)),$$

co daje subaddytywność. Niech teraz $R, Z \in \mathcal{R}$ będą zmiennymi losowymi takimi, że $R \leqslant Z$. Wówczas p.w.:

$$R \leqslant Z \Rightarrow I_2(R) \leqslant I_2(Z) \Rightarrow I_1(I_2(R)) \leqslant I_1(I_2(Z)),$$

co kończy dowód. □

Warto zauważyć, że przykłady 2 i 3 są kontrprzykładami pokazującymi, że jeśli I spełnia ($W2$) (odpowiednio ($W3$)), to I^* nie musi spełniać ($W2$) (odpowiednio ($W3$)). Dokładniejszy opis podziałów ryzyka można znaleźć w publikacji (Otto, 2004, s. 130).

Zakładam, że każdy z podmiotów rynku posiada jakąś informację na temat potencjalnych szkód oraz osób chcących się ubezpieczyć. Jest ona opisana za pomocą pewnego σ-ciała $\mathcal{F} \in \mathcal{S}$. Zazwyczaj jest ono generowane przez ciąg zmiennych losowych, które opisują wszystkie niewiadome związane z polisą. Pierwszą z nich jest klient: czy pali, czy jest żonaty, ile ma lat itd. Ponadto w σ-ciele mogą być zawarte informacje na temat szkodowości z dotychczasowego przebiegu portfela oraz innego typu ryzyk, np. zagrożeń katastroficznych, ryzyka długowieczności, ryzyka rynkowego itd. W konsekwencji pobierana składka będzie zmienną losową.

Z drugiej strony zbieranie oraz analiza informacji jest procesem, który dużo kosztuje. Jednak firma ubezpieczeniowa powinna przykładać do niego dużą wagę. Ryzyko, jakie niesie ze sobą ubezpieczenie pewnej potencjalnej straty opisanej zmienną losową R, można mierzyć za pomocą odległości w przestrzeni L^2. Jeśli podmiot nie posiada żadnych danych, to wówczas przyjmiemy, że σ-ciało opisujące jego informację jest trywialne $\{\emptyset, \Omega\}$. Dla takiego podmiotu ryzyko związane z przejęciem potencjalnej straty opisanej zmienną losową R, przy założeniu, że składka jest warunkową wartością oczekiwaną, wynosi:

$$\mathrm{E}|R - \mathrm{E}(R|\mathcal{F})|^2 = \mathrm{E}|R - \mathrm{E}(R)|^2 = \mathrm{D}^2 R.$$

Gdy firma posiadała jakąkolwiek informację, to ryzyko mierzone wariancją jest mniejsze. Istotnie, dla σ-ciała $\mathcal{F}$, takiego, że $\mathrm{E}(R|\mathcal{F})$ nie jest stałą prawie wszędzie, zachodzi:

$$\mathrm{E}|R - \mathrm{E}(R|\mathcal{F})|^2 = \mathrm{E}(\mathrm{D}^2(R|\mathcal{F})) < \mathrm{E}(\mathrm{D}^2(R|\mathcal{F})) + \mathrm{D}^2(\mathrm{E}(R|\mathcal{F})) = \mathrm{D}^2 R.$$

Powyższy przykład pokazuje, że zbieranie jak największej ilości informacji na temat rynku jest pożądanym procesem.

2.1. Składki podmiotów rynku

Ryzyko oraz stratę ubezpieczyciela będę wykorzystywał zamiennie w dalszej części pracy. Na potrzeby artykułu nie będę rozważał niematerialnych aspektów transferu zobowiązań. Ryzyko będzie zatem zmienną losową z przestrzeni $\mathcal{R}$, a składka odwzorowaniem $P : \mathcal{R} \times \mathcal{S} \to \mathcal{R}$. Dla dowolnych $R, Z \in \mathcal{R}$, $P(R|\mathcal{F})$ będzie $\mathcal{F}$ mierzalną zmienną losową, gdzie $\mathcal{F}$ jest informacją, którą posiada dany podmiot ubezpieczeniowy. Własności, które zbadam w dalszej części pracy, będą następujące:

(1) Subaddytywność: $P(R+Z|\mathcal{F}) \leqslant P(R|\mathcal{F}) + P(Z|\mathcal{F})$ p.w.
(2) Skalowanie składki: $P(aR|\mathcal{F}) = aP(R|\mathcal{F})$ p.w. dla $a \geqslant a$.
(3) Brak narzutu dla trywialnych ryzyk: jeśli $R = a$ p.w., to $P(R|\mathcal{F}) = a$ p.w.
(4) Oczekiwany narzut bezpieczeństwa: $\mathrm{E}P(R|\mathcal{F}) \geqslant \mathrm{E}R$.
(5) Monotoniczność: jeśli $R \leqslant Z$, to $P(R|\mathcal{F}) \leqslant P(Z|\mathcal{F})$ p.w.
(6) $\mathcal{F}$ mierzalność: $P(R|\mathcal{F})$ jest $\mathcal{F}$ mierzalna.
(7) Wypukłość: jeśli $r, z \in (0,1)$ i $r + z = 1$, to

$$P(rR + zZ|\mathcal{F}) \leqslant rP(R|\mathcal{F}) + zP(Z|\mathcal{F}) \quad \text{p.w.}$$

W literaturze (np. Artzner i in., 1997; Artzner i in., 1999; Acerbi, Tasche, 2001a) zamiast własności braku narzutu dla trywialnych ryzyk wprowadza się czasami mocniejsze założenie:

(8) Translacja: $P(R+a|\mathcal{F}) = P(R|\mathcal{F}) + a$ p.w. dla $a \geqslant 0$.

Niektóre z powyższych własności pojawiają się w definicji miary koherentnej. Miara jest tutaj rozumiana jako funkcja działająca ze zbioru ryzyk w liczby rzeczywiste. Koherentność określona została po raz pierwszy przez Artznera i in. (1997) oraz następnie rozwinięta (Artzner i in., 1999).

Definicja 1 (Koherenta miara ryzyka). Miara ryzyka jest koherentną miarą ryzyka, jeśli ma własność: monotoniczności, skalowania, translacji i subaddytywności.

Jedną z najbardziej znanych tego typu miar ryzyka wprowadzoną przez Acerbiego i Taschego (2001b) jest *Expected Shortfall* (na poziomie istotności $\alpha \in (0,1)$, ryzyka R) zdefiniowana $\mathrm{ES}_\alpha^R = \mathrm{E}\left(R - Q_\alpha^R\right)_+$, gdzie

$$Q_\alpha^R = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_R(x) > \alpha\}.$$

Uogólnieniem koherentności zaproponowanym przez Föllmera i Schieda (2002) są miary wypukłe, w których własności subaddytywności i skalowania zastąpione są własnością wypukłości.

Definicja 2 (Wypukła miara ryzyka). Miara ryzyka jest wypukłą miarą ryzyka, jeśli ma własność: monotoniczności, wypukłości i translacji.

Podam teraz przykłady funkcji spełniających przytoczone własności.

Przykład 5. Składka postaci $P(R|\mathcal{F}) := (\mathrm{E}R^p|\mathcal{F})^{\frac{1}{p}}$, dla $p \geqslant 1$ ma własności (1)–(7) oraz w szczególnym przypadku dla $p = 1$ własność (8).

Dowód. Własność (1) udowodniona jest w dodatku (nierówność Minkowskiego), dowody własności (2), (3), (5)–(7) są trywialne, natomiast dowód własność (4) wynika z nierówności Höldera dla warunkowej wartości oczekiwanej udowodnionej w dodatku: $\mathrm{E}(|RZ||\mathcal{F}) \leqslant (\mathrm{E}(|R|^p|\mathcal{F}))^{\frac{1}{p}} (\mathrm{E}(|Z|^q|\mathcal{F}))^{\frac{1}{q}}$, gdy zmienna losowa $Z = 1$. Jeśli $p = 1$, to składka spełnia własność (8), gdyż jest addytywna. □

Przykład 6 (Składka holenderska). Składka postaci

$$P(R|\mathcal{F}) := \mathrm{E}(R|\mathcal{F}) + \theta\mathrm{E}\left((\beta R - \mathrm{E}(R|\mathcal{F}))_+|\mathcal{F}\right),$$

gdzie $\theta \in (0,1], \beta \in (0,1]$ ma własności (1)–(7) oraz w szczególnym przypadku dla $\beta = 1$ własność (8).

Dowód. Dowody własności (1)–(4) i (6) są trywialne. Pokażę teraz monotoniczność składki. Zauważmy, że dla dowolnego ryzyka R spełniona jest prawie wszędzie równość:

$$\begin{aligned} P(R|\mathcal{F}) &= \mathrm{E}(R|\mathcal{F}) + \theta\mathrm{E}\left((\beta R - \mathrm{E}(R|\mathcal{F}))_+|\mathcal{F}\right) \\ &= \mathrm{E}(\mathrm{E}(R|\mathcal{F})|\mathcal{F}) + \mathrm{E}\left(\max(0, \theta\beta R - \theta\mathrm{E}(R|\mathcal{F}))|\mathcal{F}\right) \\ &= \mathrm{E}\left(\mathrm{E}(R|\mathcal{F}) + \max(0, \theta\beta R - \theta\mathrm{E}(R|\mathcal{F}))|\,\mathcal{F}\right) \\ &= \mathrm{E}\left(\max(\mathrm{E}(R|\mathcal{F}), \theta\beta R + (1-\theta)\mathrm{E}(R|\mathcal{F}))|\mathcal{F}\right). \end{aligned}$$

Z powyższego dostaję, że jeśli $R, Z \in \mathcal{R}$ są takimi ryzykami, że $R \leqslant Z$ p.w., to $P(R|\mathcal{F}) \leqslant P(Z|\mathcal{F})$ p.w. Gdy $\beta = 1$, to dla $a \geqslant 0$ mam:

$$\begin{aligned} P(R+a|\mathcal{F}) &= \mathrm{E}(R+a|\mathcal{F}) + \theta\mathrm{E}\left((R + a - \mathrm{E}(R+a|\mathcal{F}))_+|\mathcal{F}\right) = \\ &= \mathrm{E}(R|\mathcal{F}) + a + \theta\mathrm{E}\left((R + a - \mathrm{E}(R|\mathcal{F}) - a)_+|\mathcal{F}\right) = \\ &= P(R|\mathcal{F}) + a, \end{aligned}$$

co było do udowodnienia. □

Niech $\mathcal{Q}$ będzie takim zbiorem miar probabilistycznych określonych na $(\Omega, \mathcal{A})$, że $\mathbb{P} \in \mathcal{Q}$. Przykładem takiego zbioru jest:

$$\mathcal{Q}_\delta = \{\mathbb{P}^* \text{ miara na } (\Omega, \mathcal{A}) : \forall_{A \in \mathcal{A}} \quad |\mathbb{P}^*(A) - \mathbb{P}(A)| < \delta\}, \quad \delta > 0.$$

Przykład 7. Składka postaci $P(R|\mathcal{F}) = \sup_{\mathbb{P}^* \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}(R|\mathcal{F})$ ma własności (1)–(8).

Dowód. Komentarza wymaga tylko dowód własności (4). Dla dowolnego $R \in \mathcal{R}$ zachodzi prawie wszędzie $\sup_{\mathbb{P}^* \in \mathcal{Q}} \mathrm{E}_{\mathbb{P}^*}(R|\mathcal{F}) \geqslant \mathrm{E}_{\mathbb{P}}(R|\mathcal{F})$. Przykładając obustronnie wartość oczekiwaną względem miary $\mathbb{P}$, dostaję:

$$\mathrm{E}_{\mathbb{P}} P(R|\mathcal{F}) \geqslant \mathrm{E}_{\mathbb{P}}\mathrm{E}_{\mathbb{P}}(R|\mathcal{F}) = \mathrm{E}_{\mathbb{P}} R. \qquad \square$$

Przykład 8 (Składka Wanga). Składka postaci

$$P(R|\mathcal{F}) = \int_0^{+\infty} g(\mathbb{P}(R > x|\mathcal{F}))\mathrm{dx},$$

gdzie $\mathbb{P}(\cdot\,|\mathcal{F})$, jest prawdopodobieństwem warunkowym, $g : [0,1] \to [0,1]$ funkcją klasy C^2, „na”, wklęsłą, taką, że $g(0) = 0$ i $g(1) = 1$ spełnia własności (1)–(8).

Dowód. Niech R, Z będą ryzykami, $\mathcal{F} \in \mathcal{S}$ i $a \geqslant 0$.

(1) Dowód przebiega analogicznie jak w przypadku składki Wanga bez warunkowania σ-ciałem $\mathcal{F}$, który przedstawiają Denuit, Dhaene, Goovaerts, Kaas (2005, s. 90).

(2) Całkując przez podstawienie, mam

$$P(aR|\mathcal{F}) = \int_0^{+\infty} g(\mathbb{P}(aR > x|\mathcal{F}))\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} g(\mathbb{P}(R > \frac{x}{a}|\mathcal{F}))\mathrm{d}x = aP(R|\mathcal{F}).$$

(3) i (8) Całkując przez podstawienie, mam

$$\begin{aligned} P(R+a|\mathcal{F}) &= \int_0^{+\infty} g(\mathbb{P}(R+a > x|\mathcal{F}))\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} g(\mathbb{P}(R > x-a|\mathcal{F}))\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{+\infty} g(\mathbb{P}(R > x|\mathcal{F}))\mathrm{d}x = P(R|\mathcal{F}) + a, \end{aligned}$$

ponieważ $g(1) = 1$. Zatem otrzymuję własność translacji oraz narzutu dla trywialnych ryzyk.

(4) Z założeń o funkcji g mam, że dla $x \in [0,1]$ zachodzi $g(x) \geqslant x$. Zatem

$$\begin{aligned} \mathrm{E}P(R|\mathcal{F}) &= \mathrm{E}\int_0^{+\infty} g(\mathbb{P}(R > x|\mathcal{F}))\mathrm{d}x \geqslant \\ &\geqslant \mathrm{E}\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(R > x|\mathcal{F})\mathrm{d}x = \mathrm{E}(\mathrm{E}(R|\mathcal{F})) = \mathrm{E}R. \end{aligned}$$

(5) Dla ryzyk R, Z takich, że $R \leqslant Z$, mam $\mathbb{P}(R > x|\mathcal{F}) \leqslant \mathbb{P}(Z > x|\mathcal{F})$. Zatem

$$P(R|\mathcal{F}) = \int_0^{+\infty} g(\mathbb{P}(R > x|\mathcal{F}))\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} g(\mathbb{P}(R > x|\mathcal{F}))\mathrm{d}x = P(Z|\mathcal{F}),$$

co daje monotoniczność.

(6) Dla ustalonego $x \in [0, +\infty)$ prawdopodobieństwo $\mathbb{P}(R > x|\mathcal{F})$ jest $\mathcal{F}$ mierzalne, zatem zbiór $\{\omega \in \Omega : \mathbb{P}(R > x|\mathcal{F})(\omega) < a\} \in \mathcal{F}$, dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$. Wezmę dowolne $c \in \mathbb{R}$. Pokażę, że $\{\omega \in \Omega : g(\mathbb{P}(R > x|\mathcal{F})(\omega) < c\} \in \mathcal{F}$. Dla $c \notin [0,1]$ jest to oczywiste, niech zatem $c \in [0,1]$. Z założeń funkcji g mam, że jest ona ściśle rosnąca i „na”, zatem istnieje $a \in [0,1]$ takie, że

$$\{\omega \in \Omega : g(\mathbb{P}(R > x|\mathcal{F})(\omega) < c\} = \{\omega \in \Omega : \mathbb{P}(R > x|\mathcal{F})(\omega) < a\} \in \mathcal{F},$$

co dowodzi $\mathcal{F}$ mierzalności funkcji $g(P(R > x|\mathcal{F}))(\cdot)$ przy dowolnie ustalonym x. Z twierdzenia Fubiniego otrzymuję $\mathcal{F}$ mierzalność składki. $\square$

Dla ustalonego zbioru $A \subset \{1, \ldots, 8\}$, $5 \in A$, określę zbiór $\mathcal{V}$ wszystkich składek P spełniających

$$\forall_{i \in A} \text{ P spełnia } (Wi).$$

Dalej przez $\mathcal{W}$ będę oznaczał rodzinę wszystkich zbiorów $\mathcal{V}$.

Przykład 9 (Elementy klasy $\mathcal{W}$). Niepustymi przykładami elementów z klasy $\mathcal{W}$ są zbiory wszystkich składek będących koherentnymi bądź wypukłymi miarami ryzyka.

Stwierdzenie 2. *Dowolny element $\mathcal{V} \in \mathcal{W}$ jest zbiorem wypukłym.*

Stwierdzenie 3. N*iech $R \in \mathcal{R}$ będzie ryzykiem, $I_1, \ldots, I_n$ operatorami określającymi sposób cedowania spełniającymi $(W1) - (W4)$ oraz $\sum_{i=1}^{n} I_i(R) = R$ p.w., $P_1, \ldots, P_n$ składkami z $\mathcal{V} \in \mathcal{W}$, $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n$ σ-ciałami. Wówczas $\mathcal{F}$ mierzalna składka P za ryzyko R zdefiniowana jako*

$$P(R|\mathcal{F}) := \sum_{i=1}^{n} P_i(I_i(R)|\mathcal{F}_i)$$

należy do $\mathcal{V}$, gdzie $\mathcal{F}$ jest najmniejszym σ-ciałem zawierającym $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n$.

2.2. Rodzaje transferu ryzyka

2.2.1. Transfer łańcuchowy

Rozważmy rynek, w którym uczestniczy n reasekuratorów ponumerowanych od 1 do n. Założę, że i-ty reasekurator posiada informację $\mathcal{F}_i$, zaś ubezpieczyciel, przejmujący ryzyko R, $\mathcal{F}_0$. Między σ-ciałami $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n$ nie muszą zachodzić jakiekolwiek relacje. Niech $I_1, I_2, \ldots, I_n$ będą odwzorowaniami określającymi sposób cedowania ryzyka. Transferem łańcuchowym nazwę następujący proces reasekuracji: reasekurator o numerze k ceduje część ryzyka opisanego odwzorowaniem I_{k+1} do reasekuratora o numerze $k+1$, dla $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Przez reasekuratora o numerze 0 rozumiem ubezpieczyciela. Niech $R_0, R_1, \ldots, R_n$ będą ryzykami, które pozostały na udziale własnym odpowiednim reasekuratorom. Wówczas

$$\begin{aligned}
R_0 &= I_1^*(R),\\
R_1 &= I_1(R) - I_2(I_1(R)) = I_2^*(I_1(R)),\\
R_2 &= I_2(I_1(R)) - I_3(I_2(I_1(R))) = I_3^* \circ I_2 \circ I_1(R),\\
&\ldots\\
R_{n-1} &= I_n^* \circ I_{n-1} \circ I_{n-2} \circ \cdots \circ I_2 \circ I_1(R),\\
R_n &= I_n \circ I_{n-1} \circ I_{n-2} \circ \cdots \circ I_2 \circ I_1(R).
\end{aligned}$$

Przez $(\cdot)_i$ dla $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ będę oznaczał odwzorowanie określające, ile z ryzyka R pozostaje u i-tego reasekuratora. Z powyższego przedstawienia oraz stwierdzenia 1 otrzymuję prosty fakt.

Stwierdzenie 4. *Niech $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Wówczas następujące stwierdzenia są prawdziwe:*

1. *Niech $j \in \{1, 3, 4\}$. Jeśli dla dowolnego $k \in \{1, \dots, n\}$ odwzorowania I_k i I_k^* mają własność (Wj), to $(\cdot)_i$ spełnia (Wj).*
2. *Jeśli dla dowolnego $k \in \{1, \dots, n\}$ odwzorowania I_k i I_k^* mają własności $(W2)$ i $(W3)$, to $(\cdot)_i$ spełnia $(W2)$ i $(W3)$.*

Transfer łańcuchowy można zdefiniować także w inny sposób, oznaczając jak powyżej ryzyka $R_0, R_1, \dots, R_n$ jako części pozostające na udziale własnym oraz opisując proces reasekuracji następująco: następuje scedowanie ryzyka $R - R_0$ z ubezpieczyciela na pierwszego reasekuratora, $R - R_0 - R_1$ z pierwszego reasekuratora na drugiego itd.

Rysunek 1. Transfer łańcuchowy

$$\boxed{\text{Ubezp.}} \xrightarrow{R - R_0} \boxed{\text{Reas. 1}} \xrightarrow{R - R_0 - R_1} \dots \xrightarrow{R - \sum_{i=0}^{n-1} R_i} \boxed{\text{Reas. n}}$$

2.2.2. Transfer gwiaździsty

Rozważmy rynek, w którym uczestniczy n reasekuratorów ponumerowanych od 1 do n. Założę, że i-ty reasekurator posiada informację $\mathcal{F}_i$, zaś ubezpieczyciel, przejmujący ryzyko R, $\mathcal{F}_0$. Między σ-ciałami $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ nie muszą zachodzić jakiekolwiek relacje. Niech $I_1, I_2, \dots, I_n$ będą odwzorowaniami określającymi sposób cedowania ryzyka. Transferem gwiaździstym nazwę proces reasekuracji, w którym ubezpieczyciel dzieli ryzyko R na części za pomocą odwzorowań $I_1, I_2, \dots, I_n$ oraz ceduje część $I_i(R)$ do i-tego reasekuratora, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Wówczas na udziale własnym pozostaje do ubezpieczenia

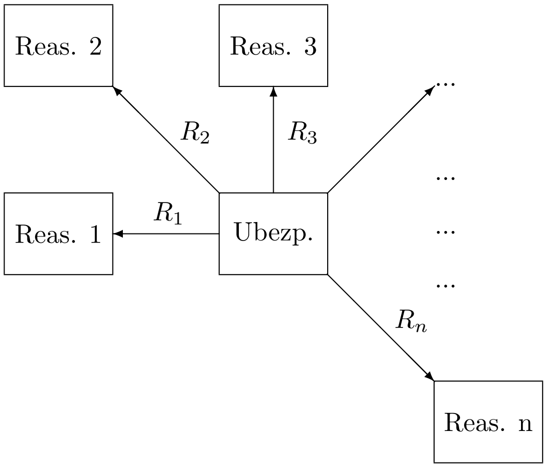
$$\begin{aligned} R_0 &= I^*(R), \\ R_i &= I_i(R), \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}, \end{aligned}$$

gdzie $I = \sum_{i=1}^{n} I_i$. Z powyższego przedstawienia oraz stwierdzenia 1 otrzymuję prosty fakt.

Stwierdzenie 5. *Niech $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ i $j \in \{1, 3, 4\}$. Jeśli dla dowolnego $k \in \{1, \dots, n\}$ odwzorowania I_k i I_k^* mają własność (Wj), to $(\cdot)_i$ spełnia (Wi).*

Transfer gwiaździsty można zdefiniować także w inny sposób, oznaczając jak powyżej ryzyka $R_0, R_1, \dots, R_n$ jako części pozostające na udziale własnym oraz opisując proces reasekuracji następująco: scedowanie przez ubezpieczyciela ryzyka R_1 na pierwszego reasekuratora, R_2 na drugiego itd.

Rysunek 2. Transfer gwiaździsty



2.2.3. Transfer drzewkowy

Rozważę teraz przypadek ogólny. Niech ubezpieczyciel ma do pokrycia ryzyko R. Dzieli je między pewną liczbę reasekuratorów. Następnie każdy z nich robi to samo. Załóżmy, że takich podziałów dokonało się $n \in \mathbb{N}$. Wprowadzę następującą notację:

1. Każdy podmiot ubezpieczeniowy będzie jednoznacznie zdefiniowany przez ciąg $\mathbf{v} := (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, postaci $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_k, 0, 0, \ldots, 0)$, gdzie $v_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, k \leqslant n$.
2. Interpretacją ciągu $(0, 0, \ldots, 0)$ jest ubezpieczyciel. Dla $k = 1, 2, \ldots, n$ ciąg

$$(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k, 0, 0, \ldots, 0),$$

gdzie $v_k \neq 0$ będzie podmiotem, który otrzymał ryzyko od

$$(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, 0, 0, \ldots, 0).$$

3. Przez $R_{\mathbf{v}}$; $n_{\mathbf{v}}$; $P_{\mathbf{v}}$; $\mathcal{F}_{\mathbf{v}}$; $I_{\mathbf{v}}$ oznaczę odpowiednio: ilość ryzyka na udziale własnym, które posiada podmiot $\mathbf{v}$; liczbę reasekuratorów, którzy otrzymali część ryzyka od podmiotu określonego przez $\mathbf{v}$; składkę podmiotu określonego przez $\mathbf{v}$; informację podmiotu określonego przez $\mathbf{v}$; sposób cedowania ryzyka do podmiotu $\mathbf{v}$.

4. Przez $\mathcal{U}$ będę oznaczał zbiór wszystkich powyżej opisanych ciągów $\mathbf{v}$, który jest interpretowany jako wszystkie podmioty ubezpieczeniowe obecne na danym rynku.

Z powyższego łatwo zauważyć, że dla $k = 1, \ldots, n$

$$v_k \leqslant n_{(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, 0, 0, \ldots, 0)},$$

oraz zachodzi $\sum_{\mathbf{v} \in \mathcal{U}} R_{\mathbf{v}} = R$ i ilość ryzyka transferowana z podmiotu

$$(v_1, v_2, \ldots, v_k, 0, 0, \ldots, 0)$$

na podmioty

$$(v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}, 0, 0, \ldots, 0), \text{ gdzie } v_{k+1} = 1, \ldots, n_{(v_1, v_2, \ldots, v_k, 0, 0, \ldots, 0)}$$

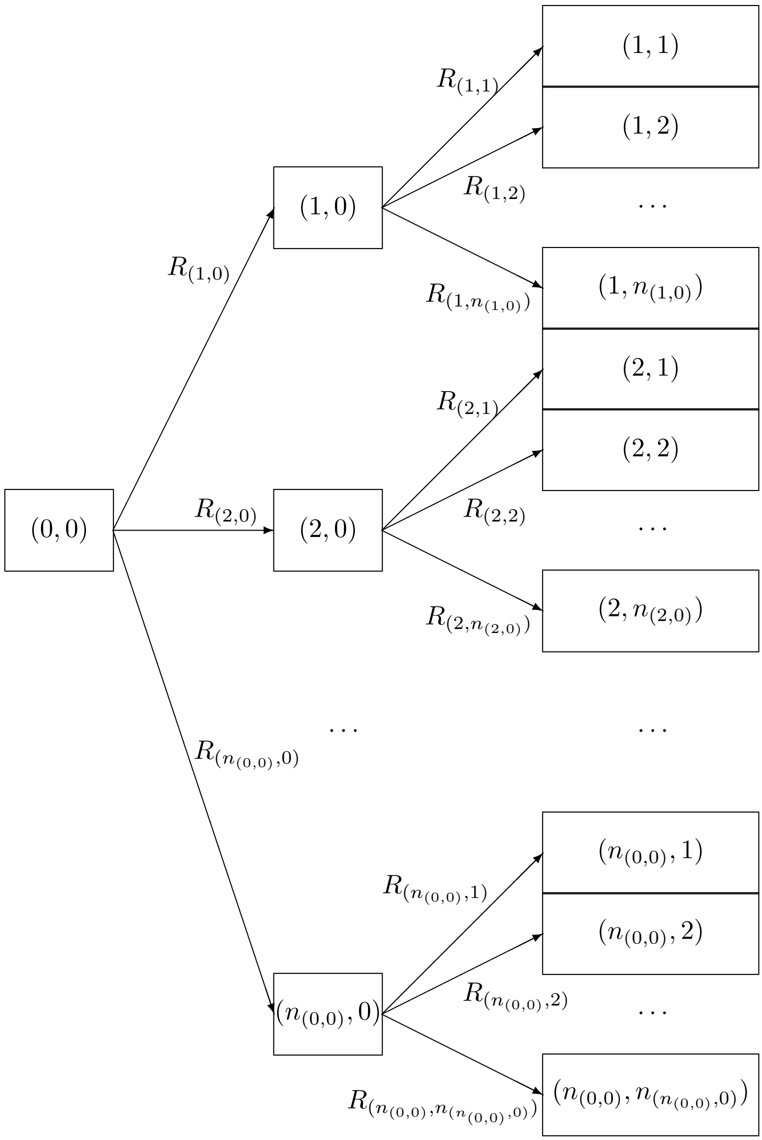
wynosi

$$\sum_{v_{k+1}=1}^{n_{(v_1, v_2, \ldots, v_k, 0, \ldots, 0)}} I_{(v_1, v_2, \ldots, v_{k+1}, 0, \ldots, 0)} \left(R_{(v_1, v_2, \ldots, v_k, 0, \ldots, 0)} \right).$$

Każdą wartość ryzyka na udziale własnym $\{R_{\mathbf{v}}\}_{\mathbf{v} \in \mathcal{U}}$ można wyrazić za pomocą sposobów cedowania $\{I_{\mathbf{v}}\}_{\mathbf{v} \in \mathcal{U}}$ oraz ryzyka R w następujący sposób:

$$\begin{aligned}
R_{(0,\ldots,0)} &= R - \sum_{i_1=1}^{n_{(0,\ldots,0)}} I_{(i_1,0,\ldots,0)}(R), \\
R_{(i_1,0,\ldots,0)} &= I_{(i_1,0,\ldots,0)}(R) - \sum_{i_2=1}^{n_{(i_1,\ldots,0)}} I_{(i_1,i_2,0,\ldots,0)}(I_{(i_1,0,\ldots,0)}(R)) = \\
&= I_{(i_1,0,\ldots,0)}(R) - \sum_{i_2=1}^{n_{(i_1,\ldots,0)}} I_{(i_1,i_2,0,\ldots,0)} \circ I_{(i_1,0,\ldots,0)}(R), \\
R_{(i_1,i_2,0,\ldots,0)} &= I_{(i_1,i_2,0,\ldots,0)} \circ I_{(i_1,0,\ldots,0)}(R) + \\
&- \sum_{i_3=1}^{n_{(i_1,i_2,0,\ldots,0)}} I_{(i_1,i_2,i_3,0,\ldots,0)} \circ I_{(i_1,i_2,0,\ldots,0)} \circ I_{(i_1,0,\ldots,0)}(R), \\
R_{(i_1,\ldots,i_k,0,\ldots,0)} &= I_{(i_1,\ldots,i_k,0,\ldots,0)} \circ I_{(i_1,\ldots,i_{k-1},0,\ldots,0)} \circ I_{(i_1,0,\ldots,0)}(R) + \\
&- \sum_{i_{k+1}=1}^{n_{(i_1,\ldots,i_k,0,\ldots,0)}} I_{(i_1,\ldots,i_{k+1},0,\ldots,0)} \circ I_{(i_1,\ldots,i_k,0,\ldots,0)} \circ I_{(i_1,0,\ldots,0)}(R), \\
R_{(v_1,\ldots,v_n)} &= I_{(i_1,\ldots,i_n)} \circ I_{(i_1,\ldots,i_{n-1},0)} \circ I_{(i_1,0,\ldots,0)}(R),
\end{aligned}$$

Rysunek 3. Przypadek dla dwóch podziałów



gdzie $k = 1, \ldots, n$, $i_k = 1, \ldots, n_{(i_1, \ldots, i_{k-1})}$. Z powyższego łatwo zauważyć, że transfer drzewkowy jest połączeniem transferów wprowadzonych wcześniej: łańcuchowego i gwiaździstego. Zatem z udowodnionych wcześniej stwierdzeń 1, 4 i 5 mam:

Stwierdzenie 6. *Niech* $\mathbf{v} \in \mathcal{U}$ *oraz* $j \in \{1, 3, 4\}$. *Jeśli dla dowolnego* $\mathbf{w} \in \mathcal{U}$ *odwzorowania* $I_{\mathbf{w}}$ *i* $I^*_{\mathbf{w}}$ *mają własność* (Wj), *to* $(\cdot)_{\mathbf{v}}$ *spełnia* (Wi).

Przykład 10. Niech na rynku będą dwa poziomy podziału. Wówczas transfer jest zobrazowany na rysunku 3, gdzie:

$$R_{(i_1,0)} = I_{(i_1,0)}(R),$$
$$R_{(i_1,i_2)} = I_{(i_1,i_2)} \circ I_{(i_1,0)}(R), \quad \text{dla } i_1 = 1, \ldots, n_{(0,0)},\ i_2 = 1, \ldots, n_{(i_1,0)}.$$

2.3. Definicje składek

Najpierw założę, że obowiązuje transfer łańcuchowy. Wówczas reasekurator o numerze n ma do pokrycia ryzyko R_n, zatem przyjmie je za składkę $P_n(R_n|\mathcal{F}_n)$, reasekurator $n-1$ ma do opłacenia składkę $P_n(R_n|\mathcal{F}_n)$ oraz do pokrycia ryzyko R_{n-1}. Zatem przejmie ryzyko od reasekuratora $n-2$ za

$$P_{n-1}(R_{n-1} + P_n(R_n|\mathcal{F}_n)|\mathcal{F}_{n-1}).$$

Postępując dalej, otrzymuję, że składka, za którą przyjmie ryzyko R ubezpieczyciel, wynosi:

$$L(R|\mathcal{F}) := P_0(R_0 + P_1(R_1 + P_2(R_2 + \ldots$$
$$+ P_{n-1}(R_{n-1} + P_n(R_n|\mathcal{F}_n)|\mathcal{F}_{n-1})|\mathcal{F}_{n-2}) \ldots |\mathcal{F}_0),$$

gdzie $\mathcal{F}$ jest najmniejszym σ-ciałem zawierającym $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n$. Składka L jest $\mathcal{F}_0$ mierzalna, jednak ryzyko na wyższych poziomach reasekuracji może być wyceniane za pomocą składki mierzalnej względem mniejszego σ-ciała. Zatem rozsądne jest wprowadzenie oznaczenia $L(R|\mathcal{F})$ zamiast $L(R|\mathcal{F}_0)$, które może sugerować, że otrzymana składka będzie zmienną losową opisaną z dokładnością prezentowaną przez σ-ciało $\mathcal{F}_0$, co obrazuje poniższy przykład.

Przykład 11. Niech na rynku będzie dwóch ubezpieczycieli transferujących ryzyko zgodnie z operatorem $I_1(R) = R$, wyceniających ryzyko przy pomocy odwzorowań danych wzorami $P_1(\cdot) = P_2(\cdot) = \mathrm{E}(\cdot)|\mathcal{F}_i$, posiadających informacje reprezentowane σ-ciałami $\mathcal{F}_1 = \mathcal{A}$, $\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \Omega\}$. Wówczas:

$$L(R|\mathcal{F}) = \mathrm{E}\left(R - I_1(R) + \mathrm{E}\left(I_1(R)|\mathcal{F}_2\right)|\mathcal{F}_1\right) = \mathrm{E}R.$$

W przypadku transferu gwiaździstego k-ty reasekurator ma do pokrycia ryzyko R_k, dla $k = 1, 2, \ldots, n$. Ubezpieczyciel ma do pokrycia R_0 oraz $\sum_{i=1}^{n} P_i(R_i)$, zatem składka za ryzyko R wyniesie

$$G(R|\mathcal{F}) := P_0(R_0 + \sum_{i=1}^{n} P_i(R_i\,|\mathcal{F}_i)|\,\mathcal{F}_0),$$

gdzie $\mathcal{F}$ jest najmniejszym σ-ciałem zawierającym $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n$.

Analogicznie do transferów gwiaździstego oraz łańcuchowego wyznaczę składkę za ubezpieczenie pewnego ryzyka R dla transferu drzewkowego. Założę, że ryzyko podzielono n razy. Wówczas każdy z podmiotów $\mathbf{v} \in \mathcal{U}$, taki, że $v_n \neq 0$ (podmioty, które dalej nie przekazują ryzyka), ma do pokrycia $R_{\mathbf{v}}$. Natomiast każdy $\mathbf{v} \in \mathcal{U}$, taki, że $\max_{i=1,2,\dots,n}\{v_i \neq 0\} = n-1$ (podmioty, które jako ostatnie przekazują ryzyko dalej), ma do pokrycia:

$$R_{\mathbf{v}} + \sum_{\mathbf{w} \in A_{\mathbf{v}}^n} P_{\mathbf{w}}(R_{\mathbf{w}}|\mathcal{F}_{\mathbf{w}}),$$

gdzie $A_{\mathbf{v}}^n$ jest zbiorem wszystkich podmiotów, które otrzymują ryzyko od $\mathbf{v}$. Ogólnie podmiot $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ przekazuje ryzyko w i-tym podziale do podmiotów zawartych w zbiorze $A_{\mathbf{u}}^i := \{\mathbf{o} \in \mathcal{U} : \forall_{k \neq i} \quad o_k = u_k \wedge o_i = 1, 2 \dots, n_{\mathbf{u}}\}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Dalej dla $\mathbf{v} \in \mathcal{U}$ takich, że $\max_{i=1,2,\dots,n}\{v_i \neq 0\} = n-2$, mam:

$$R_{\mathbf{v}} + \sum_{\mathbf{w} \in A_{\mathbf{v}}^{n-1}} P_{\mathbf{w}}(R_{\mathbf{w}} + \sum_{\mathbf{o} \in A_{\mathbf{w}}^n} P_{\mathbf{o}}(R_{\mathbf{o}}|\mathcal{F}_{\mathbf{o}})|\mathcal{F}_{\mathbf{w}}).$$

Postępując tak dalej dla $(0, 0, \dots, 0) =: \mathbf{v}_0$, mam:

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{v}_0} &+ \sum_{\mathbf{v}_1 \in A_{\mathbf{v}_0}^1} P_{\mathbf{v}_1}(R_{\mathbf{v}_1} + \sum_{\mathbf{v}_2 \in A_{\mathbf{v}_1}^2} P_{\mathbf{v}_2}(R_{\mathbf{v}_2} + \dots \\ &+ \sum_{\mathbf{v}_n \in A_{\mathbf{v}_{n-1}}^n} P_{\mathbf{v}_n}(R_{\mathbf{v}_n}|\mathcal{F}_{\mathbf{v}_n})|\mathcal{F}_{\mathbf{v}_{n-1}}) \dots |\mathcal{F}_{\mathbf{v}_1}). \end{aligned}$$

Zatem składka w przypadku transferu drzewkowego będzie wyrażała się wzorem:

$$\begin{aligned} D(R) := P_{\mathbf{v}_0}(R_{\mathbf{v}_0} &+ \sum_{\mathbf{v}_1 \in A_{\mathbf{v}_0}^1} P_{\mathbf{v}_1}(R_{\mathbf{v}_1} + \sum_{\mathbf{v}_2 \in A_{\mathbf{v}_1}^2} P_{\mathbf{v}_2}(R_{\mathbf{v}_2} + \dots \\ &+ \sum_{\mathbf{v}_n \in A_{\mathbf{v}_{n-1}}^n} P_{\mathbf{v}_n}(R_{\mathbf{v}_n}|\mathcal{F}_{\mathbf{v}_n})|\mathcal{F}_{\mathbf{v}_{n-1}}) \dots |\mathcal{F}_{\mathbf{v}_0}). \end{aligned}$$

3. Własności składek L, G, D

Przyjmę uproszczony zapis wszystkich składek. Nie będę uwzględniał drugiej zmiennej. Będę pisać $P(\cdot)$, $L(\cdot)$, $G(\cdot)$, $D(\cdot)$ zamiast $P(\cdot|\cdot)$, $L(\cdot|\cdot)$, $G(\cdot|\cdot)$, $D(\cdot|\cdot)$. Poprzez podział ryzyka w tym paragrafie będę rozumiał funkcje $(\cdot)$ określające udział własny danego podmiotu ubezpieczeniowego.

Własność 1 (Oczekiwany narzut bezpieczeństwa). Jeśli R jest ryzykiem i składka każdego podmiotu ubezpieczeniowego uczestniczącego w transferze spełnia (4), to zachodzi

$$\mathrm{E}L(R) \geqslant \mathrm{E}R.$$

Zauważmy, że dla ryzyka R nie musi zachodzić nierówność $L(R) \geqslant \mathrm{E}R$. Posłużę się prostym kontrprzykładem.

Przykład 12 (Narzut bezpieczeństwa). Niech na rynku nie będzie żadnego reasekuratora oraz niech ubezpieczyciel stosuje składkę $P_0(R) = \mathrm{E}R|\mathcal{F}$, gdzie $\mathcal{F} = \{\emptyset, [0,1), [0,\frac{1}{3}), [\frac{1}{3},\frac{2}{3}), [\frac{1}{3},1)\}$, $\Omega = [0,1)$. Rozważmy zmienną losową $R = \mathbf{1}_{[\frac{1}{2},1)}$. Wówczas dla $\omega \in [0,\frac{1}{3})$ zachodzi $P_0(R)(\omega) < \mathrm{E}R = \frac{1}{2}$.

Własność 2 (Skalowanie składki). Jeśli R jest ryzykiem, c nieujemną stałą rzeczywistą i składka każdego podmiotu ubezpieczeniowego uczestniczącego w transferze spełnia (2), to przy podziałach ryzyka spełniających $(W1)$ zachodzi prawie wszędzie $L(cR) = cL(R)$.

Dla podziału ryzyka niespełniającego $(W1)$ nie musi zachodzić własność skalowania składki.

Przykład 13. Niech R będzie zmienną losową skupioną w trzech punktach $0, 1, 2$ o równych prawdopodobieństwach. Niech podziały będą dane wzorami:

$$R_0 = R - (R - k_1)_+, \quad R_1 = (R - k_1)_+ - (R - k_2)_+, \quad R_2 = (R - k_2)_+,$$

gdzie $k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 3$ oraz $c = \frac{1}{2}$, $\mathcal{F}_i = \{\Omega, \emptyset\}$ dla $i = 0, 1, 2$, składki niech będą określone wzorem $P(\cdot\,) = \sqrt{\mathrm{E}((\cdot\,)^2|\mathcal{F})}$. Wówczas nie zachodzi własność skalowania dla składki L.

Własność 3 (Subaddytywność). Jeśli R, Z są ryzykami, składka każdego podmiotu ubezpieczeniowego uczestniczącego w transferze spełnia (1) i (5) oraz podziały ryzyka spełniają $(W2)$ i $(W3)$, to zachodzi prawie wszędzie $L(R+Z) \leqslant \leqslant L(R) + L(Z)$.

Pokażę teraz, że założenie $(W2)$ jest potrzebne:

Przykład 14 (Założenie o podziałach ryzyka). Niech R, Z będą ryzykami na przestrzeni probabilistycznej $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \mathbb{P} = \lambda)$ zdefiniowanymi:

$$\forall_{\omega \in [0,1]} \quad R(\omega) = \mathbf{1}_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2}] \cup [\frac{3}{4},1]}(\omega), \quad Z(\omega) = \mathbf{1}_{[\frac{1}{2},1]}(\omega).$$

Niech ponadto na rynku będzie tylko jeden ubezpieczyciel. Składki niech będą opisane tak jak w przykładzie 5 dla $p = 2$, gdzie

$$\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_1 = \sigma(\{[0,\tfrac{1}{6}], [\tfrac{1}{6},\tfrac{2}{6}], \ldots, [\tfrac{5}{6},1]\})$$

oraz

$$\begin{aligned} \alpha_0^{(R)} &= \alpha_0^{(Z)} = 1 - \alpha_1^{(R)} = 1 - \alpha_1^{(Z)} = \tfrac{1}{2}, \\ \alpha_0^{(R+Z)} &= 1 - \alpha_1^{(R+Z)} = \tfrac{3}{4}, \end{aligned}$$

gdzie $Z_i = \alpha_i^{(Z)} Z$ i $R_i = \alpha_i^{(R)} R$ i $(R+Z)_i = \alpha_i^{(R+Z)}(R+Z)$.
Wówczas nierówność $L(R+Z) \leqslant L(R) + L(Z)$ nie zachodzi prawie wszędzie.

Własność 4 (Monotoniczność). Jeśli dla ryzyk R, Z zachodzi $R \leqslant Z$ p.w. i składka każdego podmiotu ubezpieczeniowego uczestniczącego w transferze spełnia (5), to przy podziałach ryzyka spełniających $(W3)$ zachodzi prawie wszędzie $L(R) \leqslant L(Z)$.

Własność 5 (Translacja). Jeśli R jest ryzykiem, składka każdego podmiotu ubezpieczeniowego uczestniczącego w transferze spełnia (8), to przy podziałach ryzyka spełniających $(W4)$ zachodzi prawie wszędzie $L(R+a) = L(R)+a$, $a \in \mathbb{R}$.

Własność 6 (Wypukłość). Jeśli R, Z są ryzykami, r, z liczbami z $(0,1)$ takimi, że $r + z = 1$, oraz składka każdego podmiotu ubezpieczeniowego uczestniczącego w transferze spełnia (5) i (7), to przy podziałach ryzyka spełniających $(W1)$ i $(W2)$ zachodzi prawie wszędzie

$$L(rR + zZ) \leqslant rL(R) + zL(Z).$$

Wniosek 1. *Niech $\mathcal{V} \in \mathcal{W}$. Jeśli podziały ryzyka spełniają $(W1) - (W4)$ i składka każdego podmiotu uczestniczącego w transferze należy do $\mathcal{V}$, to $L \in \mathcal{V}$.*

Twierdzenie 1. *Niech $\mathcal{V} \in \mathcal{W}$. Jeśli podziały ryzyka spełniają $(W1) - (W4)$ i składka każdego podmiotu uczestniczącego w transferze należy do $\mathcal{V}$, to $G \in \mathcal{V}$.*

Dowód twierdzenia 1 opiera się na wykorzystaniu stwierdzenia 3 oraz wniosku 1. Ze stwierdzenia 3 otrzymuję, że suma składek płatnych przez reasekuratorów może być przedstawiona w postaci pojedynczej składki. Następnie z wniosku 1 otrzymuję tezę, ponieważ G jest składką dla transferu łańcuchowego z jednym reasekuratorem.

Twierdzenie 2 (Zasadnicze twierdzenie składek). *Niech $\mathcal{V} \in \mathcal{W}$. Jeśli dla dowolnego $\mathbf{v} \in \mathcal{U}$ składka $P_{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}$, to przy podziałach ryzyka spełniających $(W1) - (W4)$ zachodzi $D \in \mathcal{V}$.*

Dowód twierdzenia 2 opiera się na spostrzeżeniu, że jest to składka wielokrotnego podziału gwiaździstego. Wykorzystując twierdzenie 1 oraz indukcję matematyczną, otrzymuje się tezę.

4. Zakończenie

W pracy przedstawiłem konstrukcję składki uwzględniającej nie tylko przejmowane ryzyko, ale także sposób, w jaki ryzyko jest dzielone i przekazywane innym podmiotom ubezpieczeniowym. W pewien sposób składka ta antycypuje podział ryzyka w przyszłości. Pokazałem przy pomocy twierdzenia 3, że ma ona pożądane własności. Przy pomocy skonstruowanej składki można obserwować wpływ zmian struktury rynku na opłatę za polisę ubezpieczeniową. Ponadto z twierdzenia 3 wynika ważne spostrzeżenie.

Wniosek 2. *Jeśli wszystkie podmioty uczestniczące w transferze posiadają składki będące koherentnymi miarami ryzyka (odpowiednio wypukłymi miarami ryzyka), to przy podziałach ryzyka spełniających* $(W1)-(W4)$ *składki* D, L, G *są koherentnymi miarami ryzyka (odpowiednio wypukłymi miarami ryzyka).*

Wynika to z faktu, że za zbiór $\mathcal{V} \in \mathcal{W}$ można wziąć zbiór wszystkich składek będących koherentnymi miarami ryzyka (odpowiednio wypukłymi miarami ryzyka).

Warto zauważyć, że udowodnione własności w 3.2 wskazują, na co musi zwracać uwagę firma ubezpieczeniowa, aby oferowana przez nią składka miała pożądane własności. Wskazują one, że sposoby cedowania ryzyk odgrywają równie ważną rolę jak własności składek poszczególnych podmiotów przejmujących część ryzyka. Dla przykładu, składka ma własność skalowania, jeśli wszystkie firmy wyceniają ryzyko za pomocą odwzorowania jednorodnego i podziały ryzyk mają własność skalowania. Natomiast jeśli chcemy, aby składka była subaddytywna, to należy założyć o wiele więcej niż tylko subaddytywność składek i podziałów.

Ponadto na podstawie przeprowadzonych analiz można podzielić własności składek na trzy główne grupy:

1. Własności niezależne od podziałów reasekuracyjnych, np. brak narzutu dla trywialnych ryzyk.
2. Własności ograniczające dowolność podziału ryzyka, np. monotoniczność.
3. Własności ograniczające dowolność podziałów oraz wymagające założenia monotoniczności, np. subaddytywność.

Z powyższego podziału można wnioskować, że monotoniczność jest jedyną własnością, która jest dodatkowo wymagana. To wyróżnienie jest potwierdzeniem jej unikalności oraz faktu, że zakładanie jej nie jest podważane w literaturze dotyczącej badania składek czy miar ryzyka.

5. Dodatek

Przez p, q będę oznaczał nieujemne liczby rzeczywiste sprzężone ze sobą, tzn. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ponadto dla dowolnej zmiennej losowej X wprowadzę oznaczenie

$$\|X\|_{p|\mathcal{F}} := (\mathrm{E}|X|^p|\mathcal{F})^{\frac{1}{p}},$$

gdzie $\mathcal{F}$ jest σ-ciałem, a $p \in [1, +\infty)$.

Lemat 1. *Dla dowolnych liczb* $\xi, \eta \geqslant 0$ *zachodzi nierówność:*

$$\xi\eta \leqslant \frac{\xi^p}{p} + \frac{\eta^q}{q}.$$

Przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\xi^p = \eta^q$.

Dowód można znaleźć w pracy Beckenbacha i Bellmana (1971).

Twierdzenie 3 (Nierówność Höldera). *Niech* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *będzie przestrzenią probabilistyczną,* $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ *i niech* X, Y *będą zmiennymi losowymi o wartościach rzeczywistych. Jeżeli* $\mathrm{E}|X|^p < \infty$ *oraz* $\mathrm{E}|Y|^q < \infty$*, to* $\mathrm{E}|XY||\mathcal{F}$ *istnieje oraz:*

$$\mathrm{E}|XY|\mathcal{F} \leqslant (\mathrm{E}|X|^p|\mathcal{F})^{\frac{1}{p}} (\mathrm{E}|Y|^q|\mathcal{F})^{\frac{1}{q}}, \quad p.w.$$

Przy czym nierówność jest osiągalna p.w., jeśli na zbiorze, w którym

$$\mathrm{E}(|X|^p|\mathcal{F})\cdot \mathrm{E}(|X|^q|\mathcal{F}) \neq 0,$$

zachodzi p.w.:

$$\frac{|X|^p}{\|X\|^{\,p}_{p|\mathcal{F}}} = \frac{|Y|^q}{\|Y\|^{\,q}_{q|\mathcal{F}}}.$$

Dowód. Istnienie $\mathrm{E}|XY||\mathcal{F}$ otrzymuję wprost z klasycznej nierówności Höldera dla całek oraz twierdzenia o istnieniu warunkowej wartości oczekiwanej. Niech $\Omega_0 \subset \Omega$ będzie takim podzbiorem, że dla $\omega \in \Omega_0$ $\|X\|_{p|\mathcal{F}}(\omega) = 0$ lub $\|Y\|_{q|\mathcal{F}}(\omega) = 0$. Dla $\omega \in \Omega \backslash \Omega_0$ położę:

$$\xi(w) := \frac{|X(\omega)|}{\|X\|_{p|\mathcal{F}}(\omega)}, \quad \eta(w) := \frac{|Y(\omega)|}{\|Y\|_{q|\mathcal{F}}(\omega)}.$$

Z lematu otrzymuję:

$$\frac{|X(\omega)Y(\omega)|}{\|X\|_{p|\mathcal{F}}(\omega)\,\|Y\|_{q|\mathcal{F}}(\omega)} \leqslant \frac{1}{p}\frac{|X(\omega)|^p}{\|X\|^{\,p}_{p|\mathcal{F}}(\omega)} + \frac{1}{q}\frac{|Y(\omega)|^q}{\|Y\|^{\,q}_{q|\mathcal{F}}(\omega)}.$$

Niech $\Omega_1 \subset \Omega$ będzie takim podzbiorem, że dla $\omega \in \Omega_1$ zachodzi:

$$\mathrm{E}\left(\frac{|XY|}{\|X\|_{p|\mathcal{F}}\,\|Y\|_{q|\mathcal{F}}}\middle|\,\mathcal{F}\right)(\omega) \leqslant \frac{1}{p}\mathrm{E}\left(\frac{|X|^p}{\|X\|^{\,p}_{p|\mathcal{F}}}\middle|\,\mathcal{F}\right)(\omega) + \frac{1}{q}\mathrm{E}\left(\frac{|Y|^q}{\|Y\|^{\,q}_{q|\mathcal{F}}}\middle|\,\mathcal{F}\right)(\omega).$$

Niech $\Omega_2 \subset \Omega$ będzie takim podzbiorem, że dla $\omega \in \Omega_2$ zachodzi:

$$\mathrm{E}\left(\frac{|XY|}{\|X\|_{p|\mathcal{F}}\,\|Y\|_{q|\mathcal{F}}}\middle|\,\mathcal{F}\right)(\omega) = \frac{\mathrm{E}\left(|XY||\,\mathcal{F}\right)(\omega)}{\|X\|_{p|\mathcal{F}}(\omega)\,\|Y\|_{q|\mathcal{F}}(\omega)},$$

$$\mathrm{E}\left(\frac{|X|^p}{\|X\|^{\,p}_{p|\mathcal{F}}}\middle|\,\mathcal{F}\right)(\omega) = \frac{\mathrm{E}\left(|X|^p|\,\mathcal{F}\right)(\omega)}{\|X\|^{\,p}_{p|\mathcal{F}}(\omega)} = \frac{\|X\|^{\,p}_{p|\mathcal{F}}(\omega)}{\|X\|^{\,p}_{p|\mathcal{F}}(\omega)} = 1,$$

$$\mathrm{E}\left(\frac{|Y|^q}{\|Y\|^{\,q}_{q|\mathcal{F}}}\middle|\,\mathcal{F}\right)(\omega) = \frac{\mathrm{E}\left(|Y|^q|\,\mathcal{F}\right)(\omega)}{\|Y\|^{\,q}_{q|\mathcal{F}}(\omega)} = \frac{\|Y\|^{\,q}_{q|\mathcal{F}}(\omega)}{\|Y\|^{\,q}_{q|\mathcal{F}}(\omega)} = 1.$$

Z podstawowych własności warunkowej wartości oczekiwanej mam, że $P(\Omega_1) = P(\Omega_2) = 1$. Ponadto dla $\omega \in (\Omega \backslash \Omega_0) \cap \Omega_1 \cap \Omega_2$ zachodzi:

$$\frac{\mathrm{E}\left(|XY|| \mathcal{F}\right)(\omega)}{\|X\|_{p|\mathcal{F}}(\omega)\, \|Y\|_{q|\mathcal{F}}(\omega)} \leqslant \frac{1}{p} \cdot 1 + \frac{1}{q} \cdot 1 = 1.$$

Zatem na zbiorze $(\Omega \backslash \Omega_0) \cap \Omega_1 \cap \Omega_2$ zachodzi nierówność Höldera. Z definicji warunkowej wartości oczekiwanej mam, że $\Omega_0 \in \mathcal{F}$. Ponadto

$$\int\limits_{\Omega_0} \mathrm{E}|XY||\mathcal{F}\mathrm{dP} = \int\limits_{\Omega_0} |XY|\mathrm{dP} \leqslant \int\limits_{X_\mathcal{F}} |XY|\mathrm{dP} + \int\limits_{Y_\mathcal{F}} |XY|\mathrm{dP} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{X_\mathcal{F}} |X|^p \mathrm{dP} \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int\limits_{X_\mathcal{F}} |Y|^q \mathrm{dP} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int\limits_{Y_\mathcal{F}} |X|^p \mathrm{dP} \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int\limits_{Y_\mathcal{F}} |Y|^q \mathrm{dP} \right)^{\frac{1}{q}} = 0,$$

gdzie $X_\mathcal{F} = \{\omega \in \Omega : \|X\|_{p|\mathcal{F}}(\omega) = 0\}$, $Y_\mathcal{F} = \{\omega \in \Omega : \|Y\|_{q|\mathcal{F}}(\omega) = 0\}$. Niech $\Omega_3 \subset \Omega$ będzie takim podzbiorem Ω, że dla $\omega \in \Omega_3$ zachodzi $\mathbb{E}(|XY||\mathcal{F})(\omega) \geqslant 0$. Wówczas dla $\omega \in \Omega_0 \cap \Omega_3$ zachodzi $\mathbb{E}(|XY||\mathcal{F})(\omega) = 0$. Zatem na zbiorze $\Omega_0 \cap \Omega_3$ zachodzi nierówność Höldera. Reasumując: spełniona jest ona na zbiorze:

$$(\Omega \cap \Omega_0' \cap \Omega_1 \cap \Omega_2) \cup (\Omega_0 \cap \Omega_3) = \Omega \cap \bigcap_{i=1}^{3} \Omega_i.$$

Powyższy zbiór jest miary 1 jako skończony iloczyn zbiorów miary 1, co daje pierwszą część tezy. Na zbiorze Ω_0 nierówność Höldera jest osiągalna. Z założenia istnieje $\Omega_4 \subset \Omega$, taki, że dla $\omega \in (\Omega \backslash \Omega_0) \cap \Omega_4$ zachodzi $\xi(w)^p = \eta(w)^q$ oraz $\mathbb{P}(\Omega_4|\Omega \backslash \Omega_0) = 1$. Wówczas z lematu nierówność jest osiągalna na zbiorze

$$(\Omega \backslash \Omega_0) \cap \Omega_4 \cap \Omega_1 \cap \Omega_2,$$

co daje tezę. □

Twierdzenie 4 (Nierówność Minkowskiego). *Niech* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *będzie przestrzenią probabilistyczną,* $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ *i niech* X, Y *będą zmiennymi losowymi o wartościach rzeczywistych. Jeżeli* $\mathbb{E}|X|^p < \infty$ *oraz* $\mathbb{E}|Y|^p < \infty$, *to* $\mathbb{E}|X+Y|^p|\mathcal{F}$ *istnieje oraz p.w.:*

$$(\mathrm{E}|X+Y|^p|\mathcal{F})^{\frac{1}{p}} \leqslant (\mathrm{E}|X|^p|\mathcal{F})^{\frac{1}{p}} + (\mathrm{E}|Y|^p|\mathcal{F})^{\frac{1}{p}}.$$

Dowód. Z nierówności

$$|X+Y|^p \leqslant 2^{p-1}(|X|^p + |Y|^p)$$

mam, że $\mathbb{E}|X+Y|^p < \infty$, co z twierdzenia o istnieniu warunkowej wartości oczekiwanej daje istnienie $\mathrm{E}(|X+Y|^p|\mathcal{F})$. Zauważmy, że dla zmiennej losowej Z, takiej, że $\|Z\|_{q|\mathcal{F}} = 1$, i dowolnej zmiennej $X \in \mathrm{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ z nierówności Höldera zachodzi p.w.:

$$\mathrm{E}\left(|XZ||\mathcal{F}\right) \leqslant \|X\|_{p|\mathcal{F}}.$$

Z osiągalności nierówności Höldera otrzymuję p.w.:

$$\|X\|_{p|\mathcal{F}} = \sup_{Z \in Z_{\mathcal{F}}} \mathrm{E}(|XZ||\mathcal{F}),$$

gdzie

$$Z_{\mathcal{F}} = \{Z \in \mathrm{L}^q(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) : \|Z\|_{q|\mathcal{F}} = 1\}.$$

Zatem dla dowolnych $X, Y \in \mathrm{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ zachodzi p.w.:

$$\begin{aligned}\|X+Y\|_{p|\mathcal{F}} &= \sup_{Z \in Z_{\mathcal{F}}} \mathrm{E}(|(X+Y)Z||\mathcal{F}) \leqslant \\ &\leqslant \sup_{Z \in Z_{\mathcal{F}}} \mathrm{E}(|XZ||\mathcal{F}) + \sup_{Z \in Z_{\mathcal{F}}} \mathrm{E}(|XZ||\mathcal{F}) = \|X\|_{p|\mathcal{F}} + \|Y\|_{p|\mathcal{F}},\end{aligned}$$

co kończy dowód. □

Bibliografia

[1] Acerbi C., Tasche D. (2001a), *Expected Shortfall: a natural coherent alternative to Value at Risk*, Working paper.

[2] Acerbi C., Tasche D. (2001b), *On the Coherence of Expected Shortfall*, Working paper.

[3] Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M., Heath D. (1997), *Thinking coherently*, RISK 10, s. 68–71.

[4] Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M., Heath D. (1999), *Coherent measures of risk*, „Mathematical Finance", vol. 9, s. 203–228.

[5] Baranoff E., Brockett P.L., Kahane Y. (2008), *Risk Management for Enterprises and Individuals*, Creative Commons.

[6] Beckenbach E.F., Bellman R. (1971), *Inequalities*, Springer, Berlin.

[7] Denuit M., Dhaene J., Goovaerts M., Kaas R. (2005), *Actuarial theory for dependent Risks: Measures, Orders and Models*, John Wiley & Sons Ltd, West Sussex.

[8] De Schepper A., Heijnen B. (1990), *Hierarchical Models in Insurance*, „Mitteilungen der Schweizerischen Vereinigung der Versicherungsmathematiker", vol. 1, s. 169–179.

[9] Föllmer, H., Schied, A. (2002), *Convex measures of risk and trading constraints*, „Finance and Stochastics", vol. 6, s. 429–447.

[10] Gerber H.U. (1984), *Chains of reinsurance*, „Insurance: Mathematics and Economics", vol. 3, s. 43–48.

[11] Heerwaarden A.E. van, Kaas R. (1992), *The Dutch premium principle*, „Insurance: Mathematics and Economics", vol. 11, s. 129–133.

[12] Heijnen B. (1989), *Perturbation calculus in risk theory: Application to chains and trees of reinsurance*, „Insurance: Mathematics and Economics", vol. 8, s. 97–104.

[13] Komisja Nadzoru Finansowego (2011), *Komunikat w sprawie szkód spowodowanych przez powodzie, burze oraz ulewne deszcze w maju, czerwcu, sierpniu i wrześniu.*
[14] Otto W. (2004), *Ubezpieczenia majątkowe*, cz. 1, *Teoria ryzyka*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.
[15] Paszkiewicz A., Olejnik J. (2010), *Reinsurance – a new approach*, „Banach Center Publications", vol. 90, s. 139–151.
[16] Powers M.R., Shubik M. (2001), *Toward a theory of reinsurance and retrocession,* „Insurance: Mathematics and Economics", vol. 29, s. 271–290.
[17] Powers M.R., Shubik M. (2006), *A 'Square-Root Rule' for Reinsurance*, „Review of Accounting and Finance", vol. 17, s. 101–107.
[18] Venezian E.C., Viswanathan K.S., Jucá I.B. (2005), *A 'Square-Root Rule' for Reinsurance? Evidence from Several National Markets*, „Journal of Risk Finance", vol. 6, s. 319–334.

* * *

Reinsurance and retrocession influence on premium principles

Abstract

Heerwarden and Kaas (1992) introduced innovative methodology of premium construction. They proposed to split the risk intwo parts: a part subject to reinsurance and a part to be retained by the cedent. Such assumption has been used as a background for creating Dutch Premium. The purpose of this paper is to derive the premium construction, which involves risk transfer between insurance and reinsurance entities. The necessary conditions for premiums to be coherent and convex are shown. Furtheremore the paper covers also the expanded description of risk transfer presented by Gerber (1984) and Heijnean (1989). The aim of this paper is to provide necessary information to insurance companies, which will help them with choosing reinsurance contracts in order to retain desired premium principles.

Autor:

Wojciech Antoniak, Kolegium Analiz Ekonomicznych, Szkoła Główna Handlowa w Warszawie, al. Niepodległości 162, 02-554 Warszawa,
email: antoniakwojtek@gmail.com