Roczniki Kolegium Analiz Ekonomicznych
Zeszyt 31/2013

Marek Kałuszka
Michał Krzeszowiec

Iteracyjność składek ubezpieczeniowych w ujęciu teorii skumulowanej perspektywy i teorii nieokreśloności[1]

Streszczenie

Jedną z najważniejszych z praktycznego punktu widzenia własności składek ubezpieczeniowych jest iteracyjność. Pojęcie iteracyjności zostało wprowadzone w latach 70. ubiegłego stulecia i od tej pory wielu matematyków i ekonomistów badało tę własność dla różnych funkcjonałów zdefiniowanych w matematyce finansowej i ubezpieczeniowej. W niniejszej pracy omawiamy iteracyjność składek zerowej użyteczności oraz mean-value zdefiniowanych w ujęciu dwóch różnych teorii ekonomicznych. Pierwsza z nich, teoria skumulowanej perspektywy Kahnemana-Tversky'ego, zakłada, że przy podejmowaniu decyzji w warunkach ryzyka i niepewności ludzie zniekształcają prawdopodobieństwa zysków i strat oraz używają funkcji wartości do oceny wielkości zmian w posiadanym majątku. W drugim z modeli, uwzględniającym założenia teorii nieokreśloności, przyjmujemy, że nie mamy całkowitej wiedzy na temat rozkładu szkody. Przeprowadzona w tym artykule analiza pozwoli nam wzbogacić informacje, jakie posiadamy na temat iteracyjności składek ubezpieczeniowych zdefiniowanych w teorii skumulowanej perspektywy i teorii nieokreśloności.

1. Wstęp

Pojęcie iteracyjności wprowadził Bühlmann (1970), badając różnicę pomiędzy składką za ryzyko (indywidualne) a składką kolektywną. W celu obliczenia składki indywidualnej firma ubezpieczeniowa bierze pod uwagę możliwie wszystkie właściwości ryzyka, na wypadek którego sprzedawane jest ubezpieczenie. Jeśli parametr y wspomnianego ryzyka jest znany, to $H\left(X|y\right)$ jest składką za ryzyko X, którego charakterystyką jest y. Najczęściej jednak wielkość y jest realizacją pewnej zmiennej losowej Y. Wobec tego składka kolektywna nie może zostać wyznaczona w sposób bezpośredni, ale powinna być obliczona w dwóch krokach.

[1] Badania prowadzone przez Michała Krzeszowca zostały sfinansowane z dotacji na zadania służące rozwojowi młodych naukowców w ramach finansowania działalności statutowej Wydziału Fizyki Technicznej, Informatyki i Matematyki Stosowanej Politechniki Łódzkiej.

Najpierw firma ubezpieczeniowa powinna wyznaczyć składkę $H(X|Y)$, która jest zmienną losową – funkcją zmiennej od Y. Następnie struktura ryzyka Y powinna zostać skompensowana poprzez obliczenie $H(H(X|Y))$. Ponieważ w większości przypadków składka $H(X)$ jest różna od $H(H(X|Y))$, powstaje problem, aby znaleźć warunki, przy których obie są równe. Bühlmann (1970) i Gerber (1974) zauważają również analogię pomiędzy iteracyjnością a metodą wyznaczania składek wiarygodności.

Gerber (1974) dowodzi, że składka ubezpieczeniowa, która spełnia pewien warunek ciągłości, jest iteracyjna wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona składką *mean-value*, tzn. jest rozwiązaniem równania $v(H(X)) = \mathrm{E}v(X)$, gdzie v jest ściśle rosnącą, wypukłą i dwukrotnie różniczkowalną funkcją. Wynik ten uogólnili Goovaerts i de Vylder (1979). Pokazują oni, że składka szwajcarska jest iteracyjna wtedy i tylko wtedy, gdy redukuje się do składki *mean-value* lub składki zerowej użyteczności z liniową lub wykładniczą funkcją użyteczności. Gerber (1979) zauważa również, że jeśli $S = X_1 + ... + X_N$ jest sumą o losowej liczbie składników, składka $H(X)$ zaś jest zarówno addytywna, jak i iteracyjna, to $H(S) = H(H(S|N)) = H(H(X) \cdot N)$. Ponadto, Goovaerts i inni (2010) wykazują, że jeśli składka jest mieszaniną funkcji wykładniczych, to jest ona iteracyjna wtedy i tylko wtedy, gdy mieszanina ta jest zdegenerowana.

W artykule podajemy charakterystykę własności iteracyjności dla składek *mean-value* oraz zerowej użyteczności zdefiniowanych w teorii skumulowanej perspektywy i teorii nieokreśloności. W paragrafie 2 przypominamy założenia teorii skumulowanej perspektywy, przedstawiamy dostosowane do niej składki ubezpieczeniowe oraz podajemy twierdzenia opisujące iteracyjność tych składek. Dowody tych twierdzeń można znaleźć w pracach Kałuszki i Krzeszowca (2013a, 2013b). W paragrafie 3, zawierającym nowe i oryginalne wyniki, uogólniamy w ramach teorii nieokreśloności składki wprowadzone w paragrafie 2 i analizujemy, przy jakich warunkach są one iteracyjne. W paragrafie 4 znajduje się podsumowanie otrzymanych wyników.

2. Teoria skumulowanej perspektywy

W modelu *rank-dependent utility* zakładamy, że prawdopodobieństwa są zniekształcane przez pewną rosnącą funkcję $g : [0,1] \to [0,1]$ taką, że $g(0) = 0$ i $g(1) = 1$, nazywaną funkcją zniekształcającą prawdopodobieństwo (np. Segal, 1989; Denneberg, 1994). Niech $\mathcal{G}$ oznacza klasę wszystkich funkcji zniekształcających prawdopodobieństwo. Dla ustalonego $g \in \mathcal{G}$ i nieujemnej zmiennej losowej X całką Choqueta nazywamy liczbę

$$\mathrm{E}_g X := \int_0^\infty g(P(X > t))\, dt.$$

W dalszej części zakładamy, że wszystkie zmienne losowe są określone na pewnej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Jeżeli X przyjmuje skończoną liczbę wartości $x_1 < x_2 < ... < x_n$ z prawdopodobieństwami $P(X = x_i) = p_i > 0$, to $\mathrm{E}_g X = x_1 + \sum_{i=1}^{n-1} g(q_i)(x_{i+1} - x_i)$, gdzie $q_i = \sum_{k=i+1}^{n} p_k$. W szczególności dla $n = 2$ mamy $\mathrm{E}_g X = x_1 (1 - g(p_2)) + g(p_2) x_2$.

Dla $g, h \in \mathcal{G}$ i dowolnej zmiennej losowej X uogólnioną całką Choqueta nazywamy

$$\mathrm{E}_{gh} X = \mathrm{E}_g X_+ - \mathrm{E}_h (-X)_+ ,$$

o ile obie całki są skończone. Tu i w dalszej części pracy $X_+ = \max\{0, X\}$. Uogólniona całka Choqueta została wprowadzona przez Tversky'ego i Kahnemana (1992) dla dyskretnych zmiennych losowych i jest używana do matematycznego opisu teorii skumulowanej perspektywy. W licznych eksperymentach Tversky i Kahneman zauważają, że prawdopodobieństwa strat są zniekształcane w inny sposób niż prawdopodobieństwa zysków. Sugerują oni również zastąpienie funkcji użyteczności funkcją wartości, która zależy od względnej wielkości wypłaty. W przeciwieństwie do teorii oczekiwanej użyteczności, funkcja wartości mierzy straty i zyski, a nie bezwzględny majątek. Zarówno funkcja wartości, jak i funkcje zniekształcające prawdopodobieństwo w teorii skumulowanej perspektywy nie muszę być różniczkowalne.

Uogólnioną warunkową całką Choqueta nazywamy funkcjonał

$$\mathrm{E}_{gh}(X|Y) = \int_0^\infty g(P(X_+ > s|Y))\, ds - \int_0^\infty h\left(P\left((-X)_+ > s|Y\right)\right) ds,$$

o ile obie całki są skończone. Mówimy, że składka ubezpieczeniowa $H(X)$ jest iteracyjna, jeśli dla dowolnych zmiennych losowych X, Y mamy

$$H(X) = H(H(X|Y)),$$

pod warunkiem, że $H(X)$ oraz $H(H(X|Y))$ istnieją.

Przypomnimy teraz modyfikację składki *mean-value* dostosowaną do teorii skumulowanej perspektywy. Niech X będzie dowolną zmienną losową, która nie musi być nieujemna. Wówczas X oznacza wartość całkowitej szkody ubezpieczonego pomniejszonej o dochód z inwestycji. Założenie to pozwoli nam na analizę produktów w ubezpieczeniach na życie dopuszczających możliwość inwestowania. W przypadku ubezpieczeń majątkowych rozsądnie jest rozważać jedynie nieujemne zmienne losowe. Rozważmy decydenta, którego punktem referencyjnym jest nieujemna liczba w i który chce kupić polisę wypłacającą równowartość losowej straty X. W dalszym ciągu poprzez $(X - w)_+$ będziemy oznaczali straty (lub katastroficzne straty), przez $(w - X)_+$ zaś zyski (lub straty niekatastroficzne). Załóżmy, że $u_1, u_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ są pewnymi ściśle rosnącymi funkcjami wartości, gdzie u_1 mierzy zyski, u_2 zaś – straty. Niech g i h będą funkcjami zniekształcającymi prawdopodobieństwo odpowiednio dla zysków i strat. Kałuszka i Krzeszowiec (2012a) wprowadzają składkę $H(X)$ za ubezpieczenie się na wypadek ryzyka X jako rozwiązanie równania

$$u_1\Big((w - H(X))_+\Big) - u_2\Big((H(X) - w)_+\Big) = \mathrm{E}_g u_1\Big((w - X)_+\Big) - \mathrm{E}_h u_2\Big((X - w)_+\Big). \tag{1}$$

Zauważmy, że wzór (1) można zapisać jako

$$u(w - H(X)) = \mathrm{E}_{gh} u(w - X) \tag{2}$$

ze ściśle rosnącą funkcją $u(x) = u_1(x_+) - u_2\Big((-x)_+\Big)$ dla $x \in \mathbb{R}$. Gerber (1979) rozważa podobne równanie na składkę $H(X)$ przy założeniu, że funkcja wartości u jest wypukła, prawdopodobieństwa zaś nie są zniekształcane, tzn. $g(p) = h(p) = p$. W bardziej ogólnym modelu Luan (2001) zakłada, że $h = \overline{g}$, g jest wklęsła, funkcja wartości zaś jest wypukła, gdzie $\overline{g}(x) = 1 - g(1 - x)$. Van der Hoek i Sherris (2001) analizują funkcjonał H z różnymi funkcjami zniekształcającymi prawdopodobieństwo dla zysków i strat w przypadku, gdy funkcja wartości jest liniowa. Goovaerts i inni (2010) rozważają miarę ryzyka otrzymaną przy zastosowaniu zasady równoważnej użyteczności w modelu *rank-dependent utility* i analizują, kiedy otrzymana w ten sposób miara jest addytywna. Okazuje się, że dzieje się tak w przypadku, gdy funkcje zniekształcające prawdopodobieństwo dla zysków i strat muszą być identycznościami. Al-Nowaihi i inni (2008), za pomocą równań funkcyjnych, wyznaczają warunki konieczne i wystarczające jednorodności preferencji i awersji do ryzyka w teorii skumulowanej perspektywy. Kałuszka i Krzeszowiec (2012a) analizują składkę *mean-value* w teorii skumulowanej perspektywy i badają jej własności. Część z nich zachodzi tylko w przypadku, gdy prawdopodobieństwa zysków i strat są zniekształcane w ten sam sposób (lub w szczególności, gdy nie są zniekształcane).

W dalszej części pracy oznaczamy

$$\sup X = \inf\{x : P(X > x) = 0\}$$

oraz $\inf X = -\sup(-X)$. Niech $H(X)$ będzie składką wyznaczoną z równania (2), $H(X|Y)$ zaś będzie składką wyznaczoną ze wzoru

$$u(w - H(X|Y)) = \mathrm{E}_{gh}\left[u(w - X)|Y\right].$$

Rozważmy następujące przypadki.

(i) Jeśli $g(x) = h(x) = x$ dla $0 \leqslant x \leqslant 1$, to $\mathrm{E}_{gh}X = \mathrm{E}X$ oraz

$$H(X) = w - u^{-1}(\mathrm{E}u(w - X)).$$

$H(X)$ jest zatem składką *mean-value*, która jest iteracyjna (por. Gerber, 1979; Goovaerts i in., 1984).

(ii) Jeśli $g(x) = \mathbf{1}_{\{1\}}(x)$ i $h(x) = \overline{g}(x) = \mathbf{1}_{(0,1]}(x)$ dla $0 \leqslant x \leqslant 1$, to $E_{gh}X = \inf X$ oraz $H(X) = \sup X$. Wiadomo, że w tym przypadku $H(X)$ jest iteracyjna (por. Goovaerts i in., 1984).

(iii) Jeśli $g(x) = \mathbf{1}_{(0,1]}(x)$ i $h(x) = \overline{g}(x) = \mathbf{1}_{\{1\}}(x)$ dla $0 \leqslant x \leqslant 1$, to $E_{gh}X = \sup X$ oraz $H(X) = \inf X$. Ponieważ $\inf X = -\sup(-X)$, z (ii) wynika, że $\inf(\inf(X|Y)) = \inf X$.

(iv) Jeśli $g(x) = h(x) = \mathbf{1}_{\{1\}}(x)$ dla $0 \leqslant x \leqslant 1$, to

$$\mathrm{E}_{gh}X = (\inf X)_+ - (-\sup X)_+$$

oraz

$$H(X) = \begin{cases} \sup X & \text{jeśli } X \leqslant w \text{ p.w.,} \\ \inf X & \text{jeśli } X \geqslant w \text{ p.w.,} \\ w & \text{jeśli } \inf X \leqslant w \leqslant \sup X. \end{cases}$$

Oczywiście, jeśli $H(X) = w$, to $H(X)$ jest iteracyjna. Stąd z (ii) i (iii) wynika, że $H(X)$ jest iteracyjna.

(v) Jeśli $g(x) = x$ i $h(x) = \mathbf{1}_{\{1\}}(x)$ dla $0 \leqslant x \leqslant 1$, to

$$\mathrm{E}_{gh}X = \mathrm{E}X_+ - (-\sup X)_+$$

oraz

$$H(X) = \begin{cases} w - u^{-1}(\mathrm{E}u(w-X)) & \text{jeśli } X \leqslant w \text{ p.w.,} \\ \inf X & \text{jeśli } X \geqslant w \text{ p.w.,} \\ w - u^{-1}\left(\mathrm{E}\left[u(w-X)\right]_+\right) & \text{jeśli } \inf X \leqslant w \leqslant \sup X. \end{cases}$$

Zauważmy, że $\mathrm{E}\left[\mathrm{E}(X_+|Y)\right]_+ = \mathrm{E}\left[\mathrm{E}(X_+|Y)\right] = \mathrm{E}X_+$. Stąd z (i) i (iii) wynika, że $H(X)$ jest iteracyjna.

(vi) Jeśli $g(x) = \mathbf{1}_{\{1\}}(x)$ i $h(x) = x$ dla $0 \leqslant x \leqslant 1$, to

$$\mathrm{E}_{gh}X = (\inf X)_+ - \mathrm{E}(-X)_+$$

oraz

$$H(X) = \begin{cases} \sup X & \text{jeśli } X \leqslant w \text{ p.w.,} \\ w - u^{-1}(\mathrm{E}u(w-X)) & \text{jeśli } X \geqslant w \text{ p.w.,} \\ w - u^{-1}\left(\mathrm{E}\left[-u(w-X)\right]_+\right) & \text{jeśli } \inf X \leqslant w \leqslant \sup X. \end{cases}$$

Z (i), (ii) i (v) wynika, że $H(X)$ jest iteracyjna.

Twierdzenie 1 charakteryzuje warunek iteracyjności dla składki *mean-value* w teorii skumulowanej perspektywy.

Twierdzenie 1. *Niech $w \geqslant 0$ będzie ustalone. Załóżmy, że u jest ściśle rosnąca, ciągła, $u(0) = 0$ oraz $g, h \in \mathcal{G}$. Funkcjonał $H(X)$ jest iteracyjny wtedy i tylko wtedy, gdy $H(X)$ jest zdefiniowany jednym ze wzorów (i)–(vi).*

Dowód twierdzenia 1 można znaleźć w pracy Kałuszki i Krzeszowca (2013a).

Rozważmy teraz składkę zerowej użyteczności zdefiniowaną w teorii skumulowanej perspektywy. Niech X będzie zmienną losową opisującą stratę ubezpieczonego. Rozważmy firmę ubezpieczeniową z punktem referencyjnym $w \geqslant 0$, która chce sprzedać polisę wypłacającą równowartość straty X. Podobnie jak w przypadku składki *mean-value*, $(X - w)_+$ i $(w - X)_+$ oznaczają odpowiednio straty i zyski (lub straty katastroficzne i niekatastroficzne). Załóżmy, że $u_1, u_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ są pewnymi ściśle rosnącymi funkcjami wartości, przy czym u_1 mierzy zyski, u_2 zaś – straty. Załóżmy, że g i h są funkcjami zniekształcającymi prawdopodobieństwo odpowiednio zysków i strat. Kałuszka i Krzeszowiec (2012b) definiują składkę $H(X)$ za ubezpieczenie się na wypadek ryzyka X jako rozwiązanie równania

$$u_1(w) = \mathrm{E}_g u_1\left((w + H(X) - X)_+\right) - \mathrm{E}_h u_2\left((X - w - H(X))_+\right). \tag{3}$$

Zauważmy, że wzór (3) może być zapisany w postaci

$$u(w) = \mathrm{E}_{gh} u(w + H(X) - X), \tag{4}$$

gdzie funkcja $u(x) = u_1(x_+) - u_2\left((-x)_+\right)$ dla $x \in \mathbb{R}$ jest ściśle rosnąca. Gerber (1979) rozważa składkę $H(X)$ wyznaczoną z analogicznego równania, w którym funkcja wartości u jest wklęsła i prawdopodobieństwa nie są zniekształcane. W ogólniejszym modelu Heilpern (2003) zakłada, że $h = \overline{g}$, g jest wypukła, funkcja wartości zaś jest wklęsła.

Twierdzenie 2. (i) *Jeśli $g(p) = h(p) = p$ i $u(x) = cx$, $u(x) = (1 - e^{-cx})/a$ lub $u(x) = (e^{cx} - 1)/a$, to $H(X)$, która jest rozwiązaniem (4), jest iteracyjna.*

(ii) *Niech u będzie ściśle rosnącą, ciągłą funkcją wartości taką, że $u(0) = 0$ oraz dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ istnieje prawostronna pochodna u, która jest skończona i większa od 0 dla wszystkich $x \neq 0$. Niech $g, h \in \mathcal{G}$ będą ściśle rosnące i ciągłe na $[0, 1]$ oraz istnieją pochodne jednostronne $g'_-(x)$ i $h'_+(x)$ dla $x \in (0, 1)$, przy czym $0 < h'_+(0), g'_-(1) < \infty$. Jeśli składka $H(X)$ jest iteracyjna dla $w = 0$, to $g(p) = h(p) = p$ i $u(x) = cx$, $u(x) = 1 - e^{-cx}$ lub $u(x) = e^{cx} - 1$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ i pewnych $a, c > 0$.*

Dowód twierdzenia 2 podają Kałuszka i Krzeszowiec (2013b).

3. Teoria nieokreśloności

Istotną rolę w problemach dotyczących podejmowania decyzji w warunkach ryzyka i niepewności odgrywa również teoria nieokreśloności. Nieokreśloność jest pojęciem pokrewnym pojęciu ryzyka, lecz w istotny sposób od niego się różniącym. Podejmując ryzyko, wiemy bowiem, jakie są szanse na uzyskanie określonego zysku (straty) lub wygranej (przegranej). W teorii nieokreśloności, choć znane są wysokości możliwych zysków i strat, to nie muszą być w pełni znane prawdopodobieństwa, z jakimi są one osiągane. Zastosowanie teorii nieokreśloności w finansach i ubezpieczeniach pojawiło się m.in. w pracach Ludwiga i Zimpera (2006), Anwara i Zhenga (2012), Zhu (2011).

Składkę *mean-value* zdefiniujemy w ramach teorii nieokreśloności. Załóżmy, że X jest dowolną zmienną losową określoną na pewnej przestrzeni mierzalnej $(\Omega, \mathcal{A})$. Zmienna X służy do opisu straty ubezpieczonego. Na przestrzeni tej określamy rodzinę miar $\mathcal{P}$, ponieważ zgodnie z założeniami teorii nieokreśloności nie mamy informacji o prawdopodobieństwach uzyskania konkretnych strat czy zysków. Przy poprzednich założeniach opisujących równanie (2) składkę *mean-value* $H(X)$ w ujęciu teorii nieokreśloności definiujemy jako rozwiązanie równania

$$u(w - H(X)) = \inf_{P \in \mathcal{P}} \mathrm{E}_{gh} u(w - X), \tag{5}$$

gdzie $\mathcal{P}$ jest rodziną wszystkich miar probabilistycznych, jakie można określić na przestrzeni mierzalnej $(\Omega, \mathcal{A})$. Twierdzenie 3 mówi o postaci składki $H(X)$ wyznaczonej z równania (5). W dalszej części pracy będziemy używali oznaczenia $s_X = \sup_{\omega \in \Omega} X(\omega)$.

Twierdzenie 3. *Jeżeli $H(X)$ jest składką wyznaczoną z równania (5), to $H(X) = s_X$.*

Dowód. Zauważmy najpierw, że

$$u(w - H(X)) = \inf_{P \in \mathcal{P}} \mathrm{E}_{gh} u(w - X) \geqslant \inf_{P \in \mathcal{P}} \mathrm{E}_{gh} u(w - s_X) = u(w - s_X),$$

co wynika z monotoniczności uogólnionej całki Choqueta i faktu, że $\mathrm{E}_{gh} c = c$ dla $c \in \mathbb{R}$ (por. Kałuszka, Krzeszowiec, 2012a). Stąd

$$H(X) \leqslant s_X. \tag{6}$$

W celu udowodnienia, że $H(X) \geqslant s_X$, rozważmy następujące przypadki:

1. Istnieje $\omega_0 \in \Omega$ takie, że $s_X = X(\omega_0)$. Niech $\overline{P}(A) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } \omega_0 \notin A, \\ 1 & \text{gdy } \omega_0 \in A. \end{cases}$

Możliwe są dwa przypadki:

(i) Jeżeli $s_X \leqslant w$, to z (2) dla miary $\overline{P}$ mamy

$$u(w - H(X)) \leqslant \int_0^\infty g\left(\overline{P}(u(w - X) > t)\right) dt = \int_0^{u(w - s_X)} g(1)\, dt = u(w - s_X).$$

Zatem $H(X) \geqslant s_X$. Stąd i z (6) mamy $H(X) = s_X$.

(ii) Jeżeli $s_X > w$, to z (2) dla miary $\overline{P}$ mamy

$$\begin{aligned} u(w - H(X)) &\leqslant \\ &\leqslant \int_0^\infty g\left(\overline{P}(u(w-X) > t)\right) dt - \int_0^\infty h\left(\overline{P}(-u(w-X) > t)\right) dt = \\ &= \int_0^\infty g(0)\, dt - \int_0^{-u(w-s_X)} h(1)\, ds = u(w - s_X)\,. \end{aligned}$$

Zatem $H(X) \geqslant s_X$. Stąd i z (6) mamy $H(X) = s_X$.

2. Załóżmy, że $\sup\limits_{\omega\in\Omega} X(\omega)$ nie jest osiągane. Niech $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie takim ciągiem, że $\lim\limits_{n\to\infty} X(\omega_n) = s_X$. Niech $\left(\overline{P}_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem miar probabilistycznych takim, że $\overline{P}_n(A) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } \omega_n \notin A, \\ 1 & \text{gdy } \omega_n \in A. \end{cases}$

Rozważmy dwa przypadki:

(i) Jeżeli $w \geqslant s_X$, to

$$\begin{aligned} u(w - H(X)) &\leqslant \int_0^\infty g\left(\overline{P}_n(u(w-X) > t)\right) dt = \\ &= \int_0^{u(w-X(\omega_n))} g(1)\, dt = u(w - X(\omega_n))\,. \end{aligned}$$

Stąd $H(X) \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} X(\omega_n) = s_X$, gdy $n \to \infty$. Stąd i z (6) mamy $H(X) = s_X$.

(ii) Jeżeli $w < s_X$, to dla odpowiednio dużego n mamy

$$\begin{aligned} u(w - H(X)) &\leqslant \\ &\leqslant \int_0^\infty g\left(\overline{P_n}(u(w-X) > t)\right) dt - \int_0^\infty h\left(\overline{P_n}(-u(w-X) > t)\right) dt = \\ &= \int_0^\infty g(0)\, dt - \int_0^{-u(w-X(\omega_n))} h(1)\, ds = u(w - X(\omega_n))\,. \end{aligned}$$

Stąd $H(X) \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} X(\omega_n) = s_X$, gdy $n \to \infty$. Stąd i z (6) mamy $H(X) = s_X$. $\square$

Zdefiniujemy teraz składkę zerowej użyteczności w teorii nieokreśloności. Załóżmy, że X jest dowolną zmienną losową opisującą stratę ubezpieczonego. Przy poprzednich założeniach dotyczących równania (4) składkę zerowej użyteczności $H(X)$ w ujęciu teorii nieokreśloności definiujemy jako rozwiązanie równania

$$u(w) = \inf_{P\in\mathcal{P}} \mathrm{E}_{gh} u(w + H(X) - X)\,, \tag{7}$$

gdzie $\mathcal{P}$ jest rodziną wszystkich miar probabilistycznych, jakie można określić na przestrzeni mierzalnej $(\Omega, \mathcal{A})$.

Twierdzenie 4. *Jeżeli* $H(X)$ *jest składką wyznaczoną z równania (7), to* $H(X) = s_X$.

Dowód twierdzenia 4 jest analogiczny do dowodu twierdzenia 3.

W celu analizy własności iteracyjności składek wyznaczonych z równań (5) i (7) potrzebne jest wprowadzenie pojęcia funkcjonału $H(X|Y)$. Dla składki *mean-value* w ujęciu teorii nieokreśloności definiujemy $H(X|Y)$ jako rozwiązanie równania

$$u(w - H(X|Y)) = \inf_{P\in\mathcal{P}} \mathrm{E}_{gh}[u(w - X)|Y]. \tag{8}$$

Funkcjonał $H(X|Y)$ w przypadku składki zerowej użyteczności w teorii nieokreśloności definiujemy jako rozwiązanie równania

$$u(w) = \inf_{P\in\mathcal{P}} \mathrm{E}_{gh}[u(w + H(X|Y) - X)|Y]. \tag{9}$$

W dalszym ciągu będziemy oznaczali $s_X(y) = \sup\limits_{\{\omega\in\Omega: Y(\omega)=y\}} X(\omega)$. Jeżeli w dowodzie twierdzenia 3 skorzystamy z faktu, że $X \leqslant s_X(y)$ przy warunku, że $Y = y$, zamiast z oszacowania $X \leqslant s_X$, to w sposób analogiczny możemy udowodnić poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 5. *Jeżeli* $H(X|Y)$ *jest składką wyznaczoną z równań (8) i (9), to* $H(X|y) = s_X(y)$.

Z poniższego twierdzenia wynika, że zarówno składka *mean-value,* jak i składka zerowej użyteczności zdefiniowane w teorii nieokreśloności są iteracyjne.

Twierdzenie 6. *Składka* $H(X)$ *będąca rozwiązaniem równań (5) i (7) jest iteracyjna.*

Dowód. Z twierdzeń 3 i 4 wynika, że $H(X) = s_X$. Niech X, Y będą dowolnymi zmiennymi losowymi określonymi na tej samej przestrzeni probabilistycznej. Wówczas

$$H(H(X|Y)) = \sup_{y\in\mathbb{R}} H(X|y) = \sup_{y\in\mathbb{R}} s_X(y) = \sup_{\omega\in\Omega} X(\omega) = s_X = H(X). \qquad \square$$

W dotychczasowych badaniach składek ubezpieczeniowych w teorii nieokreśloności zakładaliśmy, że nie mamy żadnych informacji o rozkładach szkód i chcemy zabezpieczyć się przed najbardziej niekorzystnym dla nas scenariuszem, co sprawia, że otrzymujemy raczej mało używaną, lecz rozważaną w literaturze, składkę maksymalnej szkody. W praktyce rozsądne jest przyjęcie założenia, że z prawdopodobieństwem θ znamy rozkład wartości szkody, zaś z prawdopodobieństwem $1-\theta$ nie znamy go. Innymi słowy, z prawdopodobieństwem $1-\theta$, zwykle bliskim zero, może wydarzyć się coś, co sprawia, że prawdopodobieństwa zdarzeń trzeba obliczać, korzystając z innej, nieznanej miary. W tym modelu, przy uwzględnieniu wcześniejszych założeń, składki *mean-value* oraz zerowej użyteczności, możemy zapisać jako rozwiązanie równań odpowiednio

$$u\left(w - H\left(X\right)\right) = \theta\,\mathrm{E}_{gh}u\left(w - X\right) + \left(1 - \theta\right)\inf_{P \in \mathcal{P}} \mathrm{E}_{gh}u\left(w - X\right),$$

$$u\left(w\right) = \theta\,\mathrm{E}_{gh}u\left(w + H\left(X\right) - X\right) + \left(1 - \theta\right)\inf_{P \in \mathcal{P}} \mathrm{E}_{gh}u\left(w + H\left(X\right) - X\right).$$

Gdy u jest funkcją liniową oraz prawdopodobieństwa zysków i strat zniekształcane są w ten sposób, że $h = \overline{g}$, to w obydwu przypadkach składka $H\left(X\right)$ w tym modelu ma postać

$$H\left(X\right) = \theta\,\mathrm{E}_{\overline{g}g}X + \left(1 - \theta\right)s_X. \tag{10}$$

Składka (10) dla $\theta = 1$ była rozważana po raz pierwszy przez Heilperna (2003). Podobny funkcjonał analizowali również Kałuszka i Okolewski (2008) przy założeniu, że prawdopodobieństwa nie są zniekształcane. Łatwo sprawdzić, że jeśli $0 < \theta < 1$, to składka (10) nie jest iteracyjna.

4. Wnioski

Własność iteracyjności odgrywa ważną rolę w analizie własności składek ubezpieczeniowych (Bühlmann, 1970; Gerber, 1979; Goovaerts i in., 1984), a także jest narzędziem ułatwiającym badanie innych własności składek (Gerber, 1979; Goovaerts i in., 2010). W artykule przedstawiliśmy charakterystykę iteracyjności dla składek dostosowanych do teorii skumulowanej perspektywy i teorii nieokreśloności.

Składka *mean-value* w ujęciu teorii skumulowanej perspektywy jest iteracyjna dla dowolnej funkcji wartości i dla sześciu par funkcji zniekształcających prawdopodobieństwo. Wśród otrzymanych postaci składek, które są iteracyjne, znajdują się np. klasyczna składka *mean-value* (bez zniekształcanych prawdopodobieństw), a także dość osobliwe funkcjonały, takie jak istotny kres górny oraz istotny kres dolny straty. Uogólniona składka zerowej użyteczności, przy pewnych technicznych założeniach dotyczących funkcji zniekształcających prawdopodobieństwo i funkcji wartości, jest iteracyjna wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja wartości jest liniowa lub wykładnicza, funkcje zniekształcające prawdopodobieństwo zaś są identycznościami, co odpowiada przypadkowi, gdy prawdopodobieństwa nie są zniekształcane. Dla składek rozważanych w teorii nieokreśloności, przy założeniu o braku jakiejkolwiek informacji o prawdopodobieństwach określających wielkość poniesionej szkody, okazuje się, że w przypadku zarówno składek *mean-value,* jak i zerowej użyteczności zebrana składka równa jest maksymalnej wartości możliwej straty. Twierdzenie 6 pokazuje, że składka ta jest iteracyjna.

Bibliografia

[1] Al-Nowaihi A., Bradley I., Dhami S. (2008), *A note on the utility function under prospect theory*, „Economics Letters”, vol. 99, s. 337–339.

[2] Anwar S., Zheng M. (2012), *Competitive insurance market in the presence of ambiguity*, „Insurance: Mathematics and Economics”, vol. 50, s. 79–84.

[3] Bühlmann H. (1970), *Mathematical Methods in Risk Theory*, Springer-Verlag, Berlin.

[4] Denneberg D. (1994), *Lectures on Non-additive Measure and Integral*, Kluwer Academic Publishers, Boston.

[5] Gerber H.U. (1974), *On iterative premium calculation principles*, „Bulletin of the Swiss Association of Actuaries”, s. 163–172.

[6] Gerber H.U. (1979), *An Introduction to Mathematical Risk Theory*, Homewood, Philadelphia.

[7] Goovaerts M.J., De Vylder F. (1979), *A note on iterative premium calculation principles*, „ASTIN Bulletin”, vol. 10, s. 326–329.

[8] Goovaerts M.J., De Vylder F., Haezendonck J. (1984), *Insurance Premiums: Theory and Applications*, North-Holland, Amsterdam.

[9] Goovaerts M.J., Kaas R., Laeven R.J.A. (2010), *A note on additive risk measures in rank-dependent utility*, „Insurance: Mathematics and Economics”, vol. 47, s. 187–189.

[10] Heilpern S. (2003), *A rank-dependent generalization of zero utility principle*, „Insurance: Mathematics and Economics”, vol. 33, s. 67–73.

[11] Kałuszka M., Krzeszowiec M. (2012a), *Mean-value principle under Cumulative Prospect Theory*, „ASTIN Bulletin”, vol. 42, s. 103–122.

[12] Kałuszka M., Krzeszowiec M. (2012b), *Pricing insurance contracts under Cumulative Prospect Theory*, „Insurance: Mathematics and Economics”, vol. 50, s. 159–166.

[13] Kałuszka M., Krzeszowiec M. (2013a), *An iterativity condition for the mean-value principle under Cumulative Prospect Theory*, praca przyjęta do druku w „ASTIN Bulletin”.

[14] Kałuszka M., Krzeszowiec M. (2013b), *On iterative premium calculation principles under Cumulative Prospect Theory*, praca przyjęta do druku w „Insurance: Mathematics and Economics”.

[15] Kałuszka M., Okolewski A. (2008), *An extension of Arrow's result on optimal reinsurance contract*, „Journal of Risk and Insurance”, vol. 75, s. 275–288.

[16] Luan C. (2001), *Insurance premium calculations with anticipated utility theory*, „ASTIN Bulletin”, vol. 31, s. 23–35.

[17] Ludwig A., Zimper A. (2006), *Investment behavior under ambiguity: The case of pessimistic decision makers*, „Mathematical Social Sciences”, vol. 52, s. 111–130.

[18] Segal U. (1989), *Anticipated utility theory: a measure representation approach*, „Annals of Operations Research”, vol. 19, s. 359–373.

[19] Tversky A., Kahneman D. (1992), *Advances in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty*, „Journal of Risk and Uncertainty”, vol. 5, s. 297–323.

[20] Van der Hoek J., Sherris M. (2001), *A class of non-expected utility risk measures and implications for asset allocation*, „Insurance: Mathematics and Economics”, vol. 28, s. 69–82.

[21] Zhu W. (2011), *Ambiguity aversion and an intertemporal equilibrium model of catastrophe-linked securities pricing*, „Insurance: Mathematics and Economics", vol. 49, s. 38–46.

***

Iterativity of premium principles under Cumulative Prospect Theory and ambiguity theory

Abstract

In the paper we focus on the property of iterativity of premium principles. We analyze under which circumstances mean-value principle and zero utility principle, both of them adjusted to the Cumulative Prospect Theory, are iterative. We also generalize these results under ambiguity theory by assuming that we do not have complete information on the distribution of risk.

Autorzy:

Marek Kałuszka, Instytut Matematyki, Politechnika Łódzka, ul. Wólczańska 215, 90-924 Łódź,

e-mail: kaluszka@p.lodz.pl

Michał Krzeszowiec, Instytut Matematyki, Politechnika Łódzka, ul. Wólczańska 215, 90-924 Łódź; Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, ul. Śniadeckich 8, p.o. box 21, 00-956 Warszawa,

e-mail: michalkrzeszowiec@gmail.com