

HELENA JASIULEWICZ

Dyskretny proces ryzyka z uwzględnieniem reasekuracji i losowej stopy procentowej¹

Streszczenie

W artykule rozważane jest prawdopodobieństwo ruiny w klasycznym dyskretnym procesie ryzyka z włączeniem reasekuracji i losowej stopy inwestycji. Nadwyżka finansowa ubezpieczyciela jest inwestowana według stopy opisanej jednorodnym łańcuchem Markowa. Wyprowadzono wzory rekurencyjne na prawdopodobieństwo ruiny w czasie skończonym i nieskończonym. Podano również górne ograniczenie prawdopodobieństwa ruiny za pomocą współczynnika Lundberga. Dla reasekuracji proporcjonalnej i reasekuracji nadwyżki szkody wyznaczono optymalne poziomy retencji, przyjmując za kryterium optymalizacyjne maksymalizację współczynnika dopasowania. Uzyskane wyniki przedstawiono w tabelach i na wykresach w zależności od narzutów na bezpieczeństwo ubezpieczyciela i reasekuratora oraz poziomu kapitału początkowego.

1. Wstęp

Celem pracy jest zbadanie wpływu reasekuracji na finanse firmy ubezpieczeniowej w klasycznym dyskretnym procesie ryzyka z uwzględnieniem inwestycji. Nadwyżka finansowa ubezpieczyciela jest inwestowana według stochastycznej stopy procentowej opisanej jednorodnym łańcuchem Markowa. Wyprowadzone zostały wzory na prawdopodobieństwo ruiny firmy ubezpieczeniowej oraz podano górne oszacowanie prawdopodobieństwa ruiny za pomocą współczynnika Lundberga. Dla najczęściej stosowanych w praktyce rodzajów reasekuracji wyznaczono optymalne poziomy retencji reasekuracji. Zamieszczono wykresy i wyniki liczbowe dotyczące optymalnego poziomu reasekuracji w zależności od narzutów na bezpieczeństwo ubezpieczyciela i reasekuratora oraz od poziomu kapitału początkowego ubezpieczyciela.

Budowa pracy jest następująca. W paragrafie 2 podane są stosowane oznaczenia i przyjęte założenia, przy których uzyskano nowe wyniki. Główne wyniki przedstawiono w paragrafie 3. W twierdzeniu 1 sformułowane są równania rekurencyjne na prawdopodobieństwo ruiny firmy ubezpieczeniowej w skończonym i nieskończonym horyzoncie czasu. W twierdzeniu 2 podano górne oszacowanie

¹ Projekt został sfinansowany ze środków Narodowego Centrum Nauki.

prawdopodobieństwa ruiny za pomocą współczynnika Lundberga. W tym paragrafie podany jest przykład rozkładu, dla którego oszacowanie w twierdzeniu 2 jest istotnie lepsze od podobnych oszacowań znanych w literaturze. W paragrafie 4 wyznaczono optymalną reasekurację dla poszczególnych przypadków reasekuracji: proporcjonalnej i nadwyżki szkody. Jako kryterium optymalizacji przyjęto maksimum współczynnika Lundberga. Wiadomo, że im wyższy współczynnik Lundberga, tym mniejsze jest prawdopodobieństwo ruiny. W paragrafie tym podane są przykłady liczbowe dotyczące optymalnej reasekuracji, przy różnych narzutach na bezpieczeństwo ubezpieczyciela i reasekuratora i różnych kapitałach początkowych.

2. Oznaczenia i założenia

W pracy przyjęto następujące oznaczenia i założenia:

1. Z_n – całkowita wypłata na końcu okresu jednostkowego $(n-1, n]$, wypłata w momencie n , Z_n – i.i.d. o dystrybuancie $W(z) = \Pr(Z_n \leq z)$ i średniej $\mu = EZ_n$.
2. $c = (1 + \theta)\mu$ – składka stała płacona na koniec każdego okresu jednostkowego $(n-1, n]$, $\theta > 0$.
3. U_n – nadwyżka finansowa na koniec okresu $(n-1, n]$ liczona po wypłacie. U_n jest inwestowana na początku okresu $(n, n+1]$ według stopy losowej $I_n \in \{i_1, i_2, \dots, i_l\}$.
4. I_1, I_2, \dots – jednorodny łańcuch Markowa o l stanach, macierzy przejścia $P = [p_{st}]_{l \times l}$ i rozkładzie początkowym $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_l)$.
5. Ubezpieczyciel reasekuruje część ryzyka z każdego rozszczenia.
 $Z_n^{ce} = h(Z_n, b)$ – część zatrzymana przez ubezpieczyciela, o dystrybuancie

$$Vz = \Pr(Z_n^{ce} \leq z), \quad \bar{V}(z) = \Pr(Z_n^{ce} > z).$$

Oczywiste założenie o funkcji h :

$$0 \leq h(x, b) \leq x.$$

$Z_n^{re} = Z_n - Z_n^{ce}$ – część ryzyka reasekurowana.

6. Reasekurator wyznacza składkę według zasady wartości oczekiwanej:

$$c_{re} = (1 + \eta) E(Z_n - h(Z_n, b)).$$

Zakładamy, że $\eta > \theta > 0$, aby ubezpieczyciel nie zarabiał bez ponoszenia ryzyka, gdyby zostawił sobie zerową wartość roszczeń.

7. Składka zatrzymana przez ubezpieczyciela w okresie jednostkowym:

$$c(b) = c - c_{re} = (1 + \eta)Eh(Z_n, b) - (\eta - \theta)\mu.$$

8. U_n^b – proces nadwyżki finansowej ubezpieczyciela przy reasekuracji na koniec okresu jednostkowego $(n - 1, n]$ po wypłynięciu składki i wypłacie:

$$U_n^b = U_{n-1}^b(1 + I_n) + c(b) - h(Z_n, b).$$

9. Prawdopodobieństwo ruiny w skończonym czasie:

$$\begin{aligned} \Psi_n^b(u, i_s) &= \Pr \left(\bigcup_{i=1}^n (U_i^b < 0) \mid U_0^b = u, I_0 = i_s \right) = \\ &= \Pr \left(U_i^b < 0 \text{ dla pewnego } i \leq n \mid U_0^b = u, I_0 = i_s \right). \end{aligned}$$

Prawdopodobieństwo ruiny w nieskończonym czasie:

$$\begin{aligned} \Psi^b(u, i_s) &= \Pr \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (U_i^b < 0) \mid U_0^b = u, I_0 = i_s \right) = \\ &= \Pr \left(U_i^b < 0 \text{ dla pewnego } i \geq 1 \mid U_0^b = u, I_0 = i_s \right). \end{aligned}$$

Oczywiście $\Psi^b(u, i_s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_n^b(u, i_s)$.

Przykłady reasekuracji najczęściej stosowanych w praktyce ubezpieczeniowej:

1. Reasekuracja proporcjonalna, gdy funkcja $h(x, b)$ jest postaci

$$h(x, b) = bx,$$

gdzie $b \in (0, 1]$.

2. Reasekuracja nadwyżki szkody, gdy funkcja $h(x, b)$ jest postaci

$$h(x, b) = \begin{cases} x, & x \leq b, \\ b, & x > b, \end{cases}$$

gdzie $b > 0$.

3. Główne wyniki

Dla uniknięcia ruiny z prawdopodobieństwem równym 1, zakłada się, że $EZ_n^{ce} < c(b)$.

Twierdzenie 1. *Prawdopodobieństwo ruiny ubezpieczyciela w czasie skończonym wyraża się rekurencyjnie w następujący sposób:*

$$\Psi_1^b(u, i_s) = \sum_{j=1}^l p_{sj} \bar{V}(u(1 + i_j) + c(b)),$$

$$\Psi_{n+1}^b(u, i_s) = \sum_{j=1}^l p_{sj} \left\{ \bar{V}(u(1+i_j) + c(b)) + \int_0^{u(1+i_j)+c(b)} \Psi_n^b(u(1+i_j) + c(b) - z, i_j) dVz \right\}.$$

Prawdopodobieństwo ruiny w czasie nieskończonym:

$$\Psi^b(u, i_s) = \sum_{j=1}^l p_{sj} \left\{ \bar{V}(u(1+i_j) + c(b)) + \int_0^{u(1+i_j)+c(b)} \Psi^b(u(1+i_j) + c(b) - z, i_j) dVx \right\},$$

gdzie $c(b) = (1 + \eta) Eh(Z_n, b) - (\eta - \theta) \mu$.

Dowód twierdzenia jest podobny do dowodu lematu 2.1 w pracy Cai i Dicksona (2004).

Dla reasekuracji proporcjonalnej

$$\begin{aligned} h(Z_n, b) &= bZ_n, \quad b \in (0, 1), \\ Z_n^{re} &= (1 - b)Z_n, \end{aligned}$$

składka zatrzymana jest postaci

$$c(b) = ((1 + \eta)b - (\eta - \theta))\mu, \quad \text{gdzie } \mu = EZ_n,$$

zaś dystrybuanta zmiennej Z_n^{ce} – postaci

$$V(z) = W\left(\frac{z}{b}\right),$$

gdzie $W(z) = \Pr(Z_n \leq z)$, $V(z) = \Pr(h(Z_n, b) \leq z)$,

$$\bar{V}(z) = \bar{W}\left(\frac{z}{b}\right).$$

Dla reasekuracji nadwyżki szkody, $b > 0$:

$$h(Z_n, b) = \min(Z_n, b) = \begin{cases} Z_n & \text{gd } Z_n \leq b, \\ b & \text{gd } Z_n > b, \end{cases}$$

$$Z_n^{re} = (Z_n - b)^+ = \begin{cases} 0, & \text{gd } Z_n \leq b, \\ Z_n - b & \text{gd } Z_n > b, \end{cases}$$

składka zatrzymana jest postaci

$$c(b) = (1 + \eta) \int_0^b \bar{V}(z) dz - (\eta - \theta) \mu,$$

gdzie

$$V(z) = \Pr(\min(Z_n, b) \leq z) = \begin{cases} Wz & \text{dla } z \leq b, \\ 1 & \text{dla } z > b, \end{cases}$$

przy czym $W(z) = \Pr(Z_n \leq z)$.

Twierdzenie 2. *Jeżeli $Eh(Z_1, b) < c(b)$ i istnieje stała dodatnia $R(b)$ spełniająca równanie*

$$Ee^{R(b)h(Z_1, b)} = e^{R(b)c(b)}, \quad (1)$$

to oszacowanie z góry prawdopodobieństwa ruiny w nieskończonym czasie jest postaci

$$\Psi^b(u, i_s) \leq \beta E\left(e^{-R(b)(u+I_1)} | I_0 = i_s\right), \quad (2)$$

gdzie

$$\beta = \sup_{x \geq c(b)} \frac{e^{R(b)x} \bar{V}(x)}{\int_x^\infty e^{R(b)z} dV(z)}, \quad 0 < \beta \leq 1. \quad (3)$$

Dowód. Dla każdego $x \geq 0$ mamy

$$\begin{aligned} \bar{V}(x + c(b)) &= \frac{e^{R(b)x} \bar{V}(x + c(b))}{\int_x^\infty e^{R(b)z} dV(z + c(b))} e^{-R(b)x} \int_x^\infty e^{R(b)z} dV(z + c(b)) = \\ &= \frac{e^{R(b)(x+c(b))} \bar{V}(x + c(b))}{\int_{x+c(b)}^\infty e^{R(b)y} dV(y)} e^{-R(b)x} \int_{x+c(b)}^\infty e^{R(b)(y-c(b))} dV(y). \end{aligned} \quad (4)$$

Niech

$$g(t) = \frac{e^{R(b)t} \bar{V}(t)}{\int_t^\infty e^{R(b)y} dV(y)}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} \bar{V}(x + c(b)) &\leq \sup_{x \geq 0} \{g(x + c(b))\} e^{-R(b)x} \int_{x+c(b)}^\infty e^{R(b)(y-c(b))} dV(y) \\ &= \beta e^{-R(b)x} \int_{x+c(b)}^\infty e^{R(b)(y-c(b))} dV(y), \end{aligned} \quad (5)$$

gdzie

$$\beta = \sup_{y \geq c(b)} g(y).$$

Z równania (1) otrzymujemy

$$\bar{V}(x + c(b)) \leq \beta e^{-R(b)x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{R(b)(y-c(b))} dV(y) = \beta e^{-R(b)x}. \quad (6)$$

Natomiast nierówność (3) wynika z faktu, że dla $z \geq t$ zachodzi nierówność $\exp(R(b)z) \geq \exp(R(b)t)$. Zatem

$$\frac{\int_t^{\infty} e^{R(b)z} dV(z)}{e^{R(b)t} \bar{V}(t)} \geq \frac{e^{R(b)t} \int_t^{\infty} dV(z)}{e^{R(b)t} \bar{V}(t)} = 1.$$

Z odwrotności tej nierówności otrzymuje się nierówność (3).

Przejdźmy do indukcyjnego dowodu nierówności (2). Z twierdzenia 3 oraz nierówności (6) mamy

$$\Psi_1^b(u, i_s) \leq \sum_{j=1}^l p_{sj} \beta e^{-R(b)u(1+i_j)} = \beta \mathbf{E} \left(e^{-R(b)u(1+I_1)} | I_0 = i_s \right).$$

Z założenia indukcyjnego

$$\Psi_n^b(u, i_s) \leq \beta \mathbf{E} \left(e^{-R(b)u(1+I_1)} | I_0 = i_s \right)$$

i twierdzenia 1 mamy

$$\begin{aligned} \Psi_{n+1}^b(u, i_s) &\leq \sum_{i=j}^l p_{sj} \left(\beta e^{-R(b)u(1+i_j)} \int_{u(1+i_j)+c(b)}^{\infty} e^{R(b)(y-c(b))} dV(y) + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{u(1+i_j)+c(b)} \beta \mathbf{E} e^{-R(b)(u(1+i_j)-z+c(b))(1+I_1)} | I_0 = i_s \right). \end{aligned}$$

Ponieważ

$$\mathbf{E} \left(e^{-R(b)(u(1+i_j)-z+c(b))(1+I_1)} | I_0 = i_s \right) \leq e^{-R(b)(u(1+i_j)-z+c(b))}, \quad (7)$$

więc

$$\begin{aligned} \Psi_{n+1}^b(u, i_s) &\leq \sum_{i=j}^l p_{sj} \beta e^{-R(b)u(1+i_j)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{R(b)(y-c(b))} dV(y) = \\ &= \beta \mathbf{E} \left(e^{-R(b)u(1+I_1)} | I_0 = i_s \right). \end{aligned}$$

Biorąc granicę przy $n \rightarrow \infty$, otrzymujemy nierówność (2). □

Oszacowanie (7) jest oszacowaniem grubym powodującym, że po prawej stronie nierówności (2) występuje tylko jeden wiersz macierzy przejścia $P = [p_{ij}]$ łańcucha Markowa I_1, I_2, \dots , a mianowicie wiersz o numerze s . Problem ten występował we wcześniejszych pracach Cai i Dicksona (2004) oraz Jasiulewicz (2010).

Przykład 1. Dla rozkładu wykładniczego $V(z)$ z parametrem $\lambda > R(b)$ współczynnik $\beta < 1$. Ponieważ

$$\int_0^{\infty} e^{R(b)z} \lambda e^{-\lambda z} dz = \frac{\lambda}{\lambda - R(b)},$$

a więc ze wzoru (3) otrzymujemy

$$\beta = \frac{\lambda - R(b)}{\lambda} < 1.$$

Współczynnik β przyjmuje wartość 1 dla rozkładu normalnego $V(z)$. Aby to pokazać, należy skorzystać z dwóch poniższych lematów.

Lemat 1.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_A^B e^{rx} e^{-\left(\frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}}\right)^2} dx &= \\ &= e^{rm+r^2\sigma^2/2} \left(\Phi\left(\frac{B-m-r\sigma^2}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{A-m-r\sigma^2}{\sigma}\right) \right), \end{aligned} \quad (8)$$

gdzie $\Phi(x)$ jest dystrybuantą rozkładu normalnego $N(0, 1)$.

Dowód. Korzystając ze wzoru

$$\left(\frac{x-m-r\sigma^2}{\sigma\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}}\right)^2 - rx + rm + \frac{r^2\sigma^2}{2}$$

i podstawienia $t = (x - m - r\sigma^2) / \sigma$, otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_A^B e^{rx} e^{-\left(\frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}}\right)^2} dx &= \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{rm+r^2\sigma^2/2} \int_A^B e^{-\left(\frac{x-m-r\sigma^2}{\sigma\sqrt{2}}\right)^2} dx = \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{rm+r^2\sigma^2/2} \int_{\frac{A-m-r\sigma^2}{\sigma}}^{\frac{B-m-r\sigma^2}{\sigma}} e^{-t^2/2} \sigma dt = \\ &= e^{rm+r^2\sigma^2/2} \left(\Phi\left(\frac{B-m-r\sigma^2}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{A-m-r\sigma^2}{\sigma}\right) \right). \quad \square \end{aligned} \quad (9)$$

Lemat 2. (*Feller, 1966, lemat 2, wzór (1.8)*)

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} < 1 - \Phi(x) < \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Przykład 2. Dla rozkładu normalnego $N(0, 1)$ z lematów 1 i 2 wynika, że granica przy $x \rightarrow \infty$ prawej strony wzoru (3) jest równa 1. Stąd $\beta = 1$.

Równanie (1) na współczynnik dopasowania $R(b)$ rzadko daje się rozwiązać analitycznie. Jego przybliżenie jest postaci

$$R(b) \approx \frac{2(c(b) - Eh(Z_1, b))}{\text{Var}h(Z_1, b)}. \quad (10)$$

Przybliżenie (10) daje równość, gdy $h(Z_1, b)$ ma rozkład normalny.

Jeżeli zmienna losowa $Z_1^{ce} = h(Z_1, b)$ jest postaci

$$h(Z_1, b) = \sum_{i=1}^{\xi_n} Y_i,$$

to

$$\begin{aligned} Eh(Z_1, b) &= (EY_i)(E\xi_n), \\ \text{Var}h(Z_1, b) &= (\text{Var}Y_i)(E\xi_n) + (EY_i^2)(\text{Var}\xi_n), \end{aligned}$$

gdzie ξ_n – zmienna losowa dyskretna o wartościach całkowitych, nieujemnych.

Oszacowaniem z góry i z dołu najmniejszego prawdopodobieństwa ruiny przy dynamicznej strategii reasekuracyjnej ubezpieczyciela dla dyskretnego procesu ryzyka zajmowali się Groniowska i Niemiro (2005).

Wyznaczenie prawdopodobieństwa ruiny z równań rekurencyjnych (twierdzenie 1) jest bardzo skomplikowane. W celu otrzymania optymalnego poziomu retencji według kryterium minimum prawdopodobieństwa ruiny skorzystano z faktu, że prawdopodobieństwo ruiny jest tym mniejsze, im większy jest współczynnik dopasowania. Dlatego za optymalny poziom retencji reasekuracji przyjęto taki poziom, dla którego współczynnik dopasowania Lundberga przyjmuje wartość największą. Współczynnik ten jest stosunkowo łatwy do wyznaczenia.

4. Szczególne przypadki reasekuracji

I. Rozważmy reasekurację proporcjonalną:

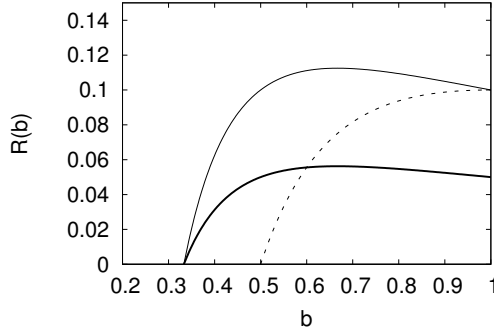
$$Z_n^{ce} = h(Z_n, b) = bZ_n.$$

Założmy, że Z_n ma rozkład $N(\mu, \sigma)$. Zatem Z_n^{ce} też ma rozkład normalny $N(b\mu, b\sigma)$. Dla tego rozkładu normalnego

$$R(b) = \frac{2(c(b) - b\mu)}{b^2\sigma^2} = \frac{2\mu}{\sigma^2} \frac{(1 + \eta)b - (\eta - \theta) - b}{b^2} = \frac{2\mu}{\sigma^2} \frac{\eta b - \eta + \theta}{b^2}.$$

Dla parametrów $\mu = 1$ i $\sigma = 2$ wykresy funkcji $R(b)$ przedstawione są na rysunku 1.

Rysunek 1. Wykres $R(b)$ dla $\eta = 0.3, \theta = 0.2$ (linia cienka), $\eta = 0.15, \theta = 0.1$ (linia gruba), $\eta = 0.4, \theta = 0.2$ (linia przerywana)



Ponieważ

$$\frac{dR(b)}{db} = \frac{-(4\mu\theta + (2b - 4)\eta\mu)}{b^3\sigma^2} = 0$$

dla

$$b_0 = \frac{2(\eta - \theta)}{\eta}$$

oraz druga pochodna

$$\frac{d^2R(b)}{db^2} = \frac{4\mu(3\theta + b\eta - 3\eta)}{b^4\sigma^2}$$

w b_0 jest równa

$$\frac{d^2R(b_0)}{db^2} = \frac{4\eta^4\mu(\theta - \eta)}{\sigma^2(2\eta - 2\theta)^4} < 0,$$

to współczynnik dopasowania $R(b)$ przyjmuje wartość największą dla

$$b_0 = \frac{2\eta - \theta}{\eta}, \quad b_0 \in (0, 1). \quad (11)$$

Niech

$$\gamma = \frac{\theta}{\eta}, \quad 0 < \theta < \eta.$$

Wówczas

$$b_0 = b_0(\gamma) = 2(1 - \gamma), \quad \gamma \in [0.5, 1).$$

Wartość maksymalna współczynnika dopasowania $R(b)$ wynosi

$$R(b_0) = \frac{\mu}{\sigma^2} \frac{\eta^2}{2\eta - \theta}.$$

Maksymalne współczynniki dopasowania, gdy $Z_n^{ce} \sim N(b, 2b)$ ($\mu = 1$, $\sigma = 2$), przedstawia tabela 1.

Tabela 1. Wartości maksymalne $R(b)$ rozkładu normalnego

η	θ	b_0	Rb_0
0.30	0.2	0.6667	0.1125
0.15	0.1	0.6667	0.0562
0.40	0.2	1.0000	0.1000

Wartości parametrów η oraz θ są zaczerpnięte z pracy Dicksona i Watersa (1996).

Teraz zajmijmy się górnym oszacowaniem prawdopodobieństwa ruiny danego w twierdzeniu 2, czyli prawą stroną nierówności (2). Wcześniej zostało pokazane, że $\beta = 1$ dla rozkładu normalnego. W dalszych rozważaniach przyjmujemy, że $\mu = 1$, $\sigma = 2$ oraz łańcuch Markowa jest trzystanowy: $i_1 = 0.04$, $i_2 = 0.08$, $i_3 = 0.12$ o macierzy przejścia

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 & 0 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0 & 0.7 & 0.3 \end{bmatrix} \quad (12)$$

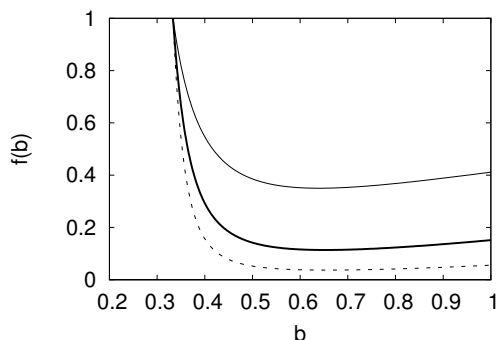
i rozkładzie początkowym $\pi = (0, 1, 0)$.

Niech

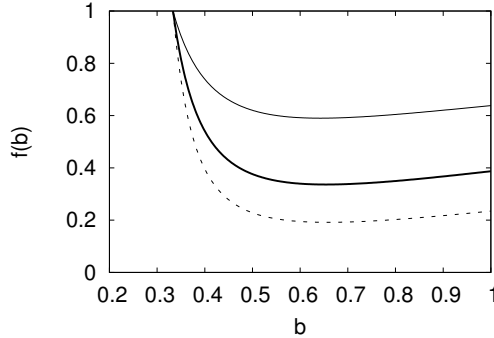
$$f(\eta, \theta, b, u) = \beta E\left(e^{-R(b)(u+I_1)} | I_0 = i_2\right). \quad (13)$$

Wykresy funkcji $f(\eta, \theta, b, u)$ dla maksymalnego współczynnika dopasowania przy ustalonych parametrach η oraz θ są przedstawione na rysunkach 2, 3 i 4.

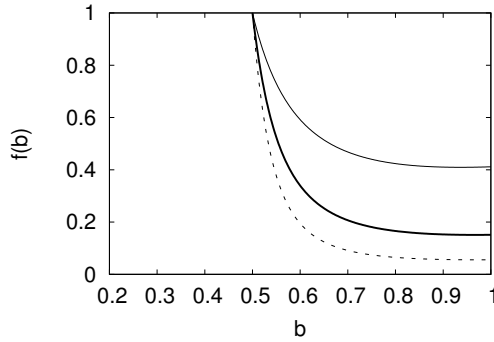
Rysunek 2. Wykres $f(0.3, 0.2, b, u)$ dla $u = 10$ (linia cienka), $u = 20$ (linia gruba), $u = 30$ (linia przerywana)



Rysunek 3. Wykres $f(0.15, 0.1, b, u)$ dla $u = 10$ (linia cienka), $u = 20$ (linia gruba), $u = 30$ (linia przerywana)



Rysunek 4. Wykres $f(0.4, 0.2, b, u)$ dla $u = 10$ (linia cienka), $u = 20$ (linia gruba), $u = 30$ (linia przerywana)



Górne ograniczenia prawdopodobieństwa ruiny $\Psi^{b_0}(u, i_0)$, gdzie b_0 wyznaczone jest tak, że współczynnik dopasowania dla rozważanego rozkładu i łańcucha Markowa przyjmuje wartość największą, równą $R(b_0)$, przedstawione są w tabeli 2.

Tabela 2. Górne ograniczenie prawdopodobieństwa ruiny dla rozkładu normalnego

η	θ	b_0	Rb_0	$f(\eta, \theta, b_0, u)$		
				$u = 10$	$u = 20$	$u = 30$
0.30	0.2	0.6667	0.1125	0.3217	0.1045	0.0339
0.15	0.1	0.6667	0.0562	0.5672	0.3232	0.1842
0.40	0.2	1.0000	0.1000	0.3649	0.1343	0.0494

II. Rozważmy reasekurację nadwyżki szkody:

$$Z_n^{ce} = \min(Z_n, b).$$

Gdy zmienna losowa Z_n ma rozkład wykładniczy o dystrybuancie $W(z) = 1 - e^{-\lambda z}$, $z \leq 0$, to zmienna losowa Z_1^{ce} ma dystrybuantę

$$Vz = \begin{cases} 0 & \text{dla } z \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda z} & \text{dla } 0 < z \leq b, \\ 1 & \text{dla } z > b \end{cases}$$

oraz

$$EZ_1^{ce} = \frac{1 - e^{-\lambda b}}{\lambda},$$

$$\text{Var}Z_1^{ce} = -\frac{e^{-2\lambda b} (3e^{2\lambda b} + (2\lambda b - 4)e^{\lambda b} + 1)}{\lambda^2}.$$

Przy tego typu reasekuracji składka zatrzymana przez ubezpieczyciela jest postaci

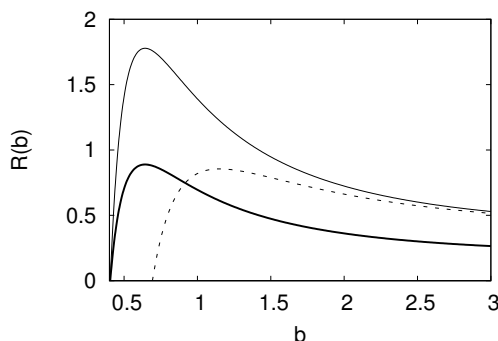
$$cb = \frac{e^{-\lambda b} (e^{\lambda b} \theta + e^{\lambda b} - \eta - 1)}{\lambda}.$$

Współczynnik dopasowania $R(b)$ dla rozkładu $V(z)$ ma postać:

$$Rb = -\frac{2\lambda e^{2\lambda b} \theta - 2\eta \lambda e^{\lambda b}}{3e^{2\lambda b} + (2\lambda b - 4)e^{\lambda b} + 1}.$$

Dla $\lambda = 1$ wykresy funkcji $R(b)$ są przedstawione na rysunku 5.

Rysunek 5. Współczynnik dopasowania $R(b)$ dla $\eta = 0.3$, $\theta = 0.2$ (linia cienka), $\eta = 0.15$ (linia gruba), $\theta = 0.1$, $\eta = 0.4$, $\theta = 0.2$ (linia przerywana)



Maksymalne współczynniki dopasowania dla uciętego rozkładu wykładniczego z parametrem $\lambda = 1$ zmiennej Z_n^{ce} przedstawia tabela 3.

Tabela 3. Wartości maksymalne $R(b)$ rozkładu wykładniczego uciętego

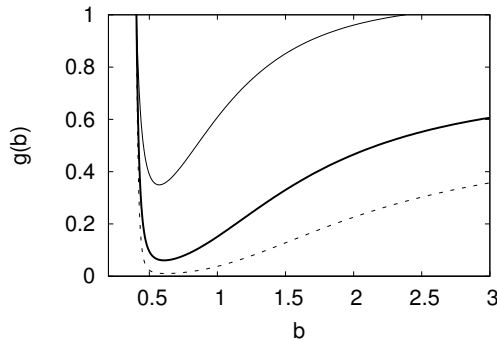
η	θ	b_0	$R(b_0)$
0.30	0.2	0.6430	1.7783
0.15	0.1	0.6430	0.8891
0.40	0.2	1.1514	0.8555

Górne oszacowanie prawdopodobieństwa ruiny danego w twierdzeniu 2 oznaczmy przez $g(\eta, \theta, b, u)$, tzn.

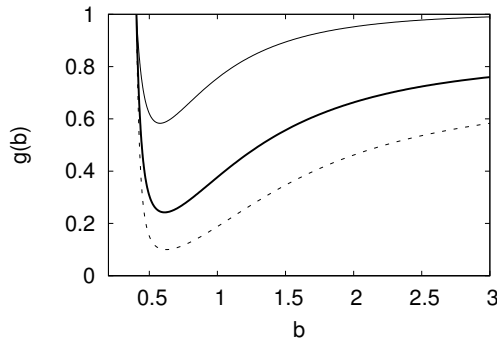
$$g\eta, \theta, b, u = \beta E \left(e^{-R(b)(u+I_1)} | I_0 = i_2 \right). \quad (14)$$

Dla uciętego rozkładu wykładniczego współczynnik $\beta = 1$. W dalszych rozważaniach przyjmujemy $\lambda = 1$. Łańcuch Markowa I_n jest określony tak, jak w reasekuracji proporcjonalnej. Wykresy funkcji $g(\eta, \theta, b, u)$ dla maksymalnego współczynnika dopasowania przy ustalonych parametrach η oraz θ są przedstawione na rysunkach 6, 7, 8.

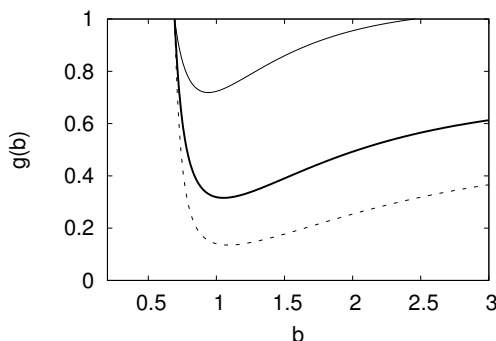
Rysunek 6. Wykres $g(0.3, 0.2, b, u)$ dla $u = 10$ (linia cienka), $u = 20$ (linia gruba), $u = 30$ (linia przerywana)



Rysunek 7. Wykres $g(0.15, 0.1, b, u)$ dla $u = 10$ (linia cienka), $u = 20$ (linia gruba), $u = 30$ (linia przerywana)



Rysunek 8. Wykres $g(0.4, 0.2, b, u)$ dla $u = 10$ (linia cienka), $u = 20$ (linia gruba), $u = 30$ (linia przerywana)



Górne ograniczenia prawdopodobieństwa ruiny $\Psi^{b_0}(u, i_0)$ przedstawione są w tabeli 4.

Tabela 4. Górne ograniczenie prawdopodobieństwa ruiny dla rozkładu wykładniczego uciętego

η	θ	b_0	Rb_0	$g(\eta, \theta, b_0, u)$		
				$u = 1$	$u = 2$	$u = 3$
0.30	0.2	0.6430	1.7783	0.1467	0.02478	0.0042
0.15	0.1	0.6430	0.8891	0.3829	0.1574	0.0647
0.40	0.2	1.1514	0.8555	0.3971	0.1688	0.0717

5. Podsumowanie

Uwzględnienie reasekuracji i losowej stopy procentowej inwestycji w klasycznym dyskretnym procesie ryzyka przybliża ten model do rzeczywistości. Elementy wprowadzone do modelu mają istotny wpływ na wyniki finansowe firm ubezpieczeniowych. Również rozważany model dyskretny w porównaniu do ciągłego jest bliższy praktyce ubezpieczeniowej, a ponadto używa dość prostych narzędzi matematycznych.

Otrzymane nowe wyniki są podane w paragrafie 2. Uogólniają one wyniki prac Cai i Dicksona (2004) oraz Jasiulewicz (2010), dotyczących klasycznego dyskretnego procesu ryzyka bez reasekuracji. Wyznaczenie prawdopodobieństwa ruiny z równań rekurencyjnych (twierdzenie 1) jest bardzo skomplikowane, choć możliwe. Dlatego przy wyznaczaniu optymalnego poziomu retencji reasekuracji według kryterium minimalizacji prawdopodobieństwa ruiny wykorzystano maksymalizację współczynnika dopasowania Lundberga, który jest stosunkowo łatwy do uzyskania. Wykorzystano fakt, że prawdopodobieństwo ruiny jest tym mniejsze, im większy jest współczynnik dopasowania. Wykorzystując twierdzenie 2, za

optymalny poziom retencji przyjęto taki poziom, który minimalizuje górne ograniczenie współczynnika dopasowania. Dla podstawowych rodzajów reasekuracji, proporcjonalnej i nadwyżki szkody dla konkretnych rozkładów całkowitej straty w pojedynczym okresie, wyznaczono optymalne poziomy retencji.

Współczynnik Lundberga ma kluczowe znaczenie dla wyznaczania górnego ograniczenia prawdopodobieństwa ruiny. Wiadomo, że ten współczynnik istnieje tylko dla rozkładów lekkoogonowych. Jednak w przypadku reasekuracji nadwyżki szkody strata zatrzymana przez ubezpieczyciela Z_n^{ce} zawsze ma rozkład o lekkim ogonie, niezależnie od rozkładu Z_n . Dla tego rodzaju reasekuracji zastosowana w pracy metoda wyznaczania optymalnego poziomu retencji może być stosowana również, gdy rozkład całkowitej straty przed reasekuracją Z_n jest rozkładem ciężkoogonowym.

Dalsze badania skupią się na określeniu rozkładu wielkości deficytu firmy w momencie ruiny, gdy ubezpieczyciel stosuje reasekurację optymalną i inwestuje nadwyżkę finansową.

Dziękuję Recenzentom za uwagi i sugestie dotyczące zmian.

Bibliografia

- [1] Cai J., Dickson D.C.M. (2004), *Ruin probabilities with a Markov chain interest model*, „Insurance Math. Econom”, vol. 35, s. 513–525.
- [2] Dickson D.C.M., Waters H.R. (1996), *Reinsurance and ruin*, „Insurance Math. Econom”, vol. 19, s. 61–80.
- [3] Feller W. (1966), *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, PWN, Warszawa.
- [4] Groniowska A., Niemirow W. (2005), *Controlled risk processes in discrete time: Lower and upper approximation to the optimal probability of ruin*, „Insurance Math. Econom”, vol. 36, s. 433–440.
- [5] Jasiulewicz H. (2010), *Proces rezerwy w czasie dyskretnym z losową stopą procentową i losową składką*, w: *Zagadnienia aktuarialne – teoria i praktyka*, red. W. Otto, Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa, s. 36–43.

Discrete risk process with reinsurance and random interest rate

Abstract

In the paper a probability of ruin in the classical discrete risk process, including reinsurance and random investment rate is considered. A financial surplus of an insurer is invested according to random rate described by a homogeneous Markov chain. Recurrence formulae for probabilities of ruin in the finite and infinite time were derived. The upper bound of ruin probability was also given using Lundberg's coefficient. For the proportional

reinsurance and reinsurance of stop-loss an optimal level of retention was determined, assuming maximalize of fitting coefficient as an optimizing criterion. The obtained results were presented in tables and on figures. They depend on loading for safety of an insurer and reinsurer and on level of an initial capital.

Autor:

Helena Jasiulewicz, Instytut Nauk Ekonomicznych i Społecznych, Uniwersytet Przyrodniczy we Wrocławiu, pl. Grunwaldzki 24 A, 50-363 Wrocław,

e-mail: helena.jasiulewicz@up.wroc.pl