

ANNA DECEWICZ
Kolegium Analiz Ekonomicznych
Szkoła Główna Handlowa w Warszawie

Modele Markowa w analizie dynamiki zróżnicowania regionalnego dochodu w krajach UE

Streszczenie

Przedmiotem artykułu jest analiza zróżnicowania regionalnego dochodu w krajach Unii Europejskiej za pomocą modeli Markowa, przy uwzględnieniu powiązań przestrzennych. W badaniu wykorzystuje się informacje dotyczące poziomu PKB *per capita* w odniesieniu do średniej europejskiej, pochodzące z banku danych regionalnych Eurostatu. Analiza obejmuje zróżnicowanie regionalne PKB w kolejnych latach, badanie efektów przestrzennych oraz dynamikę rozkładu PKB. Ostatni cel jest realizowany przy użyciu modelu Markowa, którego stany odpowiadają wyodrębnionym na podstawie rozkładu dochodu *per capita* charakterystykom regionów. Oszacowanie macierzy przejścia umożliwi wnioskowanie na temat dynamiki rozkładu dochodów w kolejnych okresach oraz konwergencji regionalnej. Rozszerzenie podstawowego modelu Markowa polega na uwzględnieniu efektów przestrzennych, a więc oddziaływań sąsiadów na dynamikę danego regionu, poprzez zastosowanie modelu niejednorodnego.

Słowa kluczowe: konwergencja, efekty przestrzenne, modele Markowa

1. Wprowadzenie

Przedmiotem opracowania jest analiza dynamiki zróżnicowania poziomu dochodu w regionach krajów członkowskich Unii Europejskiej przy użyciu podejścia bazującego na łańcuchu Markowa, zaproponowanego w pracach Quaha¹,

¹ D.T. Quah, *Empirics for Stratification, Polarization, and Convergence Clubs Growth and Distribution*, „Journal of Economic Growth” 1997, vol. 2, s. 27–59.

Magriniego i in.² jako alternatywa wobec ekonometrycznego modelowania zjawiska konwergencji. Głównym celem przeprowadzanej analizy jest próba włączenia do modelu Markowa efektów przestrzennych oddających wpływ sąsiadów na dynamikę dochodu regionalnego.

Skupiono się na badaniu zróżnicowania i dynamiki produktu krajowego brutto *per capita*. Wykorzystane dane pochodzą z bazy danych regionalnych Eurostat i obejmują wartość PKB *per capita* w odniesieniu do średniej E-27, na poziomie NUTS 3, dla okresu 1999–2008³. Uwagę poświęcono szczególnie regionom należącym do nowych państw członkowskich UE. W celu przeanalizowania dynamiki rozkładu PKB *per capita* podjęto próby skonstruowania różnorodnych modeli Markowa, w tym: modelu o stałych prawdopodobieństwach przejścia, modelu ze zmianami strukturalnymi oraz modelu z efektami przestrzennymi, w którym prawdopodobieństwa przejścia są uzależnione od pozycji danego regionu wśród sąsiadów.

2. Łańcuchy Markowa w modelowaniu konwergencji

Zjawisko konwergencji definiuje się jako zbieżność gospodarek do poziomu równowagi lub długoterminową tendencję do wyrównywania dochodu *per capita* czy wielkości produkcji krajów (regionów) bogatszych i biedniejszych. Wśród sposobów wykorzystywanych do empirycznej weryfikacji występowania tego zjawiska, oprócz najczęściej stosowanych metod ekonometrii panelowej i przestrzennej, swoje miejsce mają również łańcuchy Markowa.

Zastosowanie łańcuchów Markowa w badaniu konwergencji polega na podziale rozważanych jednostek na grupy według ustalonych kryteriów – np. na podstawie rozkładu dochodu *per capita* wyróżnia się jednostki najbogatsze, bogate, średnie, biedne, najbiedniejsze. Wyodrębnione grupy odpowiadają stanom łańcucha, którego prawdopodobieństwa przejścia są interpretowane jako szanse awansu lub spadku w ciągu ustalonego czasu. Na podstawie oszacowanej macierzy przejścia łańcucha można następnie prognozować rozkłady bezwarunkowe badanej zmiennej, a więc zróżnicowanie dochodów w kolejnych okresach. O kon-

² S. Magrini, *The evolution of income disparities among the regions of the European Union*, „Regional Science and Urban Economics” 1999, vol. 29(2), s. 257–281.

³ Zakres czasowy badania został ograniczony ze względu na brak danych w bazie Eurostat.

wergencji mówi się, gdy w rozkładzie stacjonarnym masa prawdopodobieństwa jest skoncentrowana wokół jednego stanu.

Najczęściej stosowanym w badaniu konwergencji modelem Markowa jest łańcuch jednorodny, jednak mechanizm zmian stanów reprezentowany przez macierz przejścia może być zróżnicowany zarówno w czasie, jak i w przekroju. Obecne w literaturze rozszerzenie klasycznego modelu polega na uwzględnieniu efektów przestrzennych⁴ poprzez dekompozycję macierzy przejścia łańcucha w taki sposób, aby uzyskać prawdopodobieństwa przejścia danego kraju/regionu ze stanu i do stanu j , pod warunkiem, że średni ważony dochód jego sąsiadów należy do klasy odpowiadającej stanowi k . Alternatywą wobec takiej metody jest podejście prezentowane w dalszej części niniejszego opracowania, polegające na wprowadzeniu efektów przestrzennych bezpośrednio do modelu Markowa poprzez zmienne reprezentujące wpływ sąsiedztwa na prawdopodobieństwa zmiany stanów, a co za tym idzie – na dynamikę dochodu.

3. Estymacja macierzy przejścia na podstawie danych panelowych

Stosując łańcuch Markowa, przyjmuje się, że zmiana stanu ma miejsce tylko w ustalonych momentach, zwykle tożsamy z momentami obserwacji. W modelu opisanym w tym paragrafie zakłada się, że przejście może nastąpić w dowolnej chwili, ale obserwacje pochodzą tylko z ustalonych okresów. W obu przypadkach podstawą estymacji parametrów modelu są dane o charakterze panelowym. W modelu z czasem ciągłym mechanizm zmiany stanów opisuje macierz intensywności przejść:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -q_1 & q_{12} & \cdots & q_{1r} \\ q_{21} & -q_2 & & q_{21} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ q_{r1} & q_{r2} & \cdots & -q_r \end{bmatrix}, \quad (1)$$

gdzie q_{ij} oznacza intensywność przejścia ze stanu i do stanu j , a q_i – intensywność wyjścia ze stanu i .

⁴ S.J. Rey, *Spatial empirics for regional economic growth and convergence*, „Geographical Analysis” 2001, vol. 33(3), s. 195–214; J. Le Gallo, *Space-time analysis GDP disparities cross European regions: a Markov chain approach*, „International Regional Science Review” 2004, vol. 27, s. 138–163.

Estymacja parametrów modelu Markowa na podstawie danych panelowych⁵ odbywa się poprzez maksymalizację funkcji wiarygodności:

$$L(\mathbf{Q}) = \prod_{k,n} p_{s(t_{k,n})s(t_{k,n+1})}(t_{k,n+1} - t_{k,n}), \quad (2)$$

gdzie $s(t_{k,n})$ oznacza stan, w którym w chwili obserwacji n znajduje się jednostka o numerze k , a prawdopodobieństwa $p_{s(t_{k,n})s(t_{k,n+1})}$ pochodzą z macierzy prawdopodobieństw przejścia w okresie długości t , której związek z macierzą intensywności (1) wyraża się wzorem:

$$\mathbf{P}(t) = e^{\mathbf{Q}t}. \quad (3)$$

Aby wychwycić wpływ czynników zewnętrznych na zmiany stanów, do modelu wprowadza się zmienne objaśniające, a intensywności przejść przyjmują postać:

$$q_{ij}(z_{k,n}) = q_{ij}^{(0)} \exp(\beta_{ij}^T z_{k,n}), \quad (4)$$

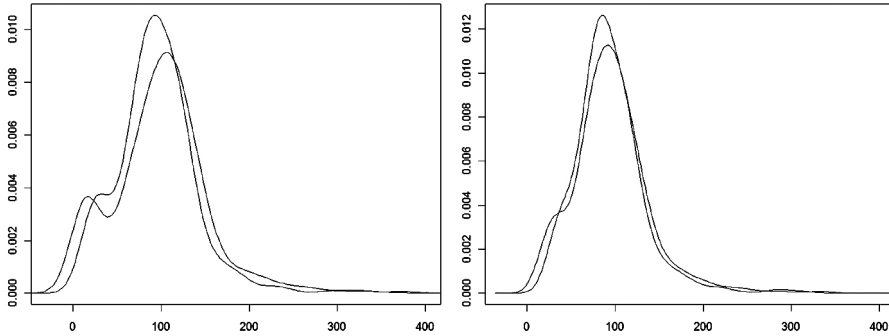
gdzie $z_{k,n}$ oznacza wektor wartości zmiennych objaśniających dla jednostki k w chwili n . Wartość wyrażenia $\exp(\beta_{ij}^T z_{k,n})$ odnosi się wówczas do zmiany intensywności przejścia ze stanu i do stanu j wywołanej jednostkowym wzrostem wartości danej zmiennej objaśniającej.

4. Analiza dynamiki rozkładu PKB *per capita*

Do analizy dynamiki zróżnicowania PKB *per capita* i ewentualnej konwergencji regionalnej wykorzystano dane z bazy Eurostat, obejmujące informacje o podregionach krajów członkowskich UE, na poziomie NUTS 3. Badane zmienne to PKB *per capita* mierzone w euro jako procent średniej europejskiej oraz analogiczna zmienna wyrażona w PSN, pochodzące z lat 1999–2008. Kilka jednostek zostało wyeliminowanych z analizy ze względu na niekompletność danych i ostatecznie wykorzystano informacje dotyczące 1276 podregionów.

⁵ J. Kalbfleisch, J. Lawless, *The Analysis of Panel Data under a Markov Assumption*, „Journal of the American Statistical Association” 1985, vol. 80(392), s. 863–871.

Aby zaprezentować rozkład poziomu PKB *per capita*, oszacowano funkcję gęstości rozkładu badanych zmiennych, używając w tym celu metody estymacji jądrowej (rysunek 1).



Rysunek 1. PKB *per capita* w podregionach jako procent średniej EU-27, 1999 vs 2008 (euro po lewej i PSN po prawej)

Źródło: opracowanie własne przy użyciu pakietu KernSmooth programu R CRAN.

W przypadku zmiennej E (PKB *per capita*, w euro) wyraźnie widoczna jest dwumodalność rozkładu w 1999 r., stopniowo zanikająca w kolejnych latach. Może to świadczyć o powolnym zanikaniu polaryzacji regionów UE, wynikającej z drastycznych pierwotnie różnic w poziomie PKB *per capita* w starych i nowych krajach członkowskich. W przypadku zmiennej P (PKB *per capita*, w PSN) w 2008 r. można zauważyć słabo zaznaczone zwiększenie gęstości rozkładu w wysokich przedziałach wartości (ok. 300), nieobecne jeszcze w 1999 r. Być może jest to początek nowego rodzaju polaryzacji – wyłaniania się grupy podregionów, najczęściej wielkich aglomeracji, o znacznie wyższym poziomie zamożności.

W celu określenia powiązań przestrzennych wykorzystano pojęcie autokorelacji przestrzennej, określającej stopień skorelowania wartości zmiennej w danej lokalizacji z jej wartościami w innych lokalizacjach. Aby dokonać pomiaru powiązań przestrzennych, określono sąsiedztwo na podstawie informacji o współrzędnych geograficznych środków ciężkości poszczególnych jednostek terytorialnych i zbudowano macierz wag k -najbliższych sąsiadów⁶, narzucając intensywność interakcji między poszczególnymi lokalizacjami. Macierz wag została również w dalszej części wykorzystana do skonstruowania zmiennej oddającej średni poziom PKB *per capita* w sąsiedztwie danego regionu, która to zmienna została uwzględniona przy estymacji macierzy intensywności przejść.

⁶ Przyjęto $k = 5$.

Obliczenia zaprezentowane w tabelach 1 i 2 zostały wykonane na podstawie podziału próby na podregiony państw będących członkami UE przed 1 maja 2004r. i tych, które przystąpiły w 2004 lub 2008r. W każdym przypadku jednostronny test Morana wskazuje na dodatnią autokorelację przestrzenną, szczególnie widoczną w przypadku nowych państw członkowskich, co stanowi uzasadnienie wprowadzenia efektów przestrzennych w modelu opisującym dynamikę zmian PKB *per capita* w tych podregionach.

Tabela 1. PKB *per capita* (w euro) – statystyka globalna Morana

	Stare kraje członkowskie	Nowe kraje członkowskie
2000	Moran I statistic standard deviate = 18,120, p -value < 2,2e-16 alternative hypothesis: greater sample estimates: Moran I statistic Expectation Variance 0,31691583 -0,00094073 0,00030769	Moran I statistic standard deviate = 15,147, p -value < 2,2e-16 alternative hypothesis: greater sample estimates: Moran I statistic Expectation Variance 0,5933038 -0,0047393 0,0015588
2008	Moran I statistic standard deviate = 13,803, p -value < 2,2e-16 Moran I statistic Expectation Variance 0,24090255 -0,00094073 0,00030697	Moran I statistic standard deviate = 10,668, p -value < 2,2e-16 Moran I statistic Expectation Variance 0,4154764 -0,0047393 0,0015515

Źródło: opracowanie własne, przy użyciu pakietu *spdep* programu R CRAN.

Tabela 2. PKB *per capita* (w PSN) – statystyka globalna Morana

	Stare kraje członkowskie	Nowe kraje członkowskie
2000	Moran I statistic standard deviate = 13,696, p -value < 2,2e-16 Moran I statistic Expectation Variance 0,23957145 -0,00094073 0,00030840	Moran I statistic standard deviate = 12,05, p -value < 2,2e-16 Moran I statistic Expectation Variance 0,4703150 -0,0047393 0,0015543
2008	Moran I statistic standard deviate = 11,334, p -value < 2,2e-16 Moran I statistic Expectation Variance 0,19713382 -0,00094073 0,00030544	Moran I statistic standard deviate = 6,6557, p -value = 1,41e-11 Moran I statistic Expectation Variance 0,2561549 -0,0047393 0,0015365

Źródło: opracowanie własne przy użyciu pakietu *spdep* programu R CRAN.

Badanie dynamiki rozkładu PKB *per capita* rozpoczęto od oszacowania macierzy intensywności przejścia – por. wzór (1) – jednorodnego procesu Markowa, o 11 stanach wyróżnionych na podstawie decyli rozkładu PKB *per capita* (stan 1 odpowiada poziomowi zmiennej poniżej 15% średniej EU, stan 2 – między 15% a 40% itd.). Na jej podstawie obliczono, zgodnie z wzorem (3), macierz prawdopodobieństw przejścia w ciągu jednego roku, średni czas pobytu w każdym stanie i rozkład graniczny (tabela 3). Wszystkie błędy względne oszacowań intensywności przejść przyjęły wartości mniejsze niż 10%.

Tabela 3. Jednookresowa macierz przejścia, PKB *per capita* (w euro)

Stany (% śr. UE)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1 (0–15)	0,891	0,109	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2 (15–40)	0,002	0,953	0,045	0	0	0	0	0	0	0	0
3 (40–68)	0	0,009	0,907	0,084	0	0	0	0	0	0	0
4 (68–81)	0	0	0,082	0,815	0,103	0	0	0	0	0	0
5 (81–92)	0	0	0,002	0,116	0,783	0,099	0	0	0	0	0
6 (92–101)	0	0	0	0,006	0,167	0,714	0,109	0,005	0	0	0
7 (101–110)	0	0	0	0	0,016	0,168	0,71	0,101	0,004	0	0
8 (110–121)	0	0	0	0,001	0,001	0,011	0,184	0,697	0,105	0,001	0
9 (121–135)	0	0	0	0	0	0,001	0,006	0,178	0,752	0,063	0
10 (135–180)	0	0	0	0	0	0	0,002	0,006	0,126	0,848	0,018
11 (180–)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,089	0,911
Czas pobytu	5,12	7,7	5,34	3,24	2,19	1,83	2,02	1,51	2,36	3,35	7,38
Rozkład graniczny	8E-04	0,05	0,244	0,245	0,208	0,113	0,066	0,037	0,022	0,011	0,002
Stare kraje członkowskie											
Czas pobytu	–	1,96	5,48	3,7	2,57	1,59	2,4	1,55	2,68	3,19	6,54
Rozkład graniczny	–	0,006	0,254	0,269	0,22	0,115	0,066	0,036	0,022	0,01	0,002
Nowe kraje członkowskie											
Czas do pochłonięcia	82,5	73,3	48,6	9,65	5,82	2,25	1				

Źródło: opracowanie własne przy użyciu pakietu msm programu R CRAN.

Macierze intensywności przejścia oszacowane po podziale próby na podregiony należące do starych i nowych państw członkowskich, przy jednakowo zdefiniowanych stanach, pokazują zróżnicowanie dynamiki w obu grupach

(dolna część tabeli 3). Proces opisujący dynamikę w nowych regionach okazał się pochłaniający – stan 11, odpowiadający najbogatszym podregionom, jest izolowany, a pozostałe stany zostają ostatecznie pochłonięte przez stan 7, odpowiadający poziomowi nieznacznie przekraczającemu średnią EU, przy czym oczekiwany czas do pochłonięcia dla stanów odpowiadających najniższym wartościom badanej zmiennej sięga kilkudziesięciu lat.

Analogiczne obliczenia przeprowadzono dla zmiennej wyrażonej w PSN (tabela 4), w tym wypadku proces opisujący dynamikę w podregionach należących do nowych państw członkowskich również okazał się pochłaniający, przy czym stan pochłaniający odpowiada najbogatszej z wyróżnionych klas.

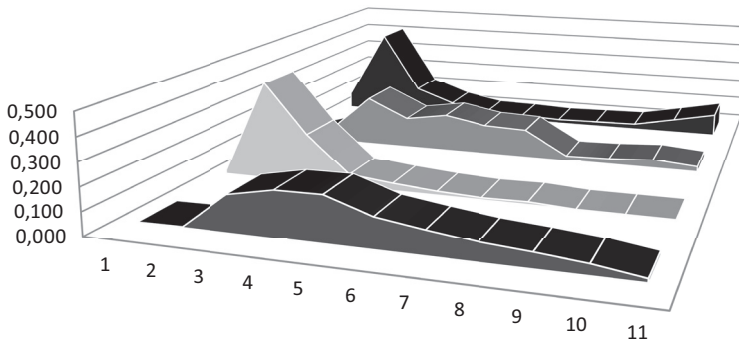
Tabela 4. Jednookresowa macierz przejścia, PKB *per capita* (w PSN)

Stany (% śr. UE)	1 0–31	2 31–58	3 58–71	4 71–79	5 79–87	6 87–95	7 95–103	8 103–113	9 113–126	10 126–166	11 166–
Czas pobytu	5,26	4,94	3,76	3,44	1,99	1,22	1,98	2,02	2,14	2,58	8,21
Rozkład graniczny	0,029	0,234	0,297	0,15	0,133	0,082	0,064	0,009	0,002	0,001	0
Stare kraje członkowskie											
Czas pobytu	–	3,545	2,677	2,976	1,761	1,56	1,92	2,296	2,328	3,124	5,791
Rozkład graniczny	0	0,143	0,436	0,151	0,129	0,075	0,056	0,008	0,002	0,001	0
Nowe kraje członkowskie											
Czas do pochłonięcia	115	106	72,3	49,6	28,2	20,9	17,4	15,3	12	9	–

Źródło: opracowanie własne przy użyciu pakietu msm programu R CRAN.

Na rysunku 2 przedstawiono prognozy rozkładu PKB *per capita* (w euro i PSN), jakie można otrzymać na podstawie macierzy przejścia dla podregionów należących do starych i nowych państw członkowskich na 2030 r., przy założeniu jednorodności procesu.

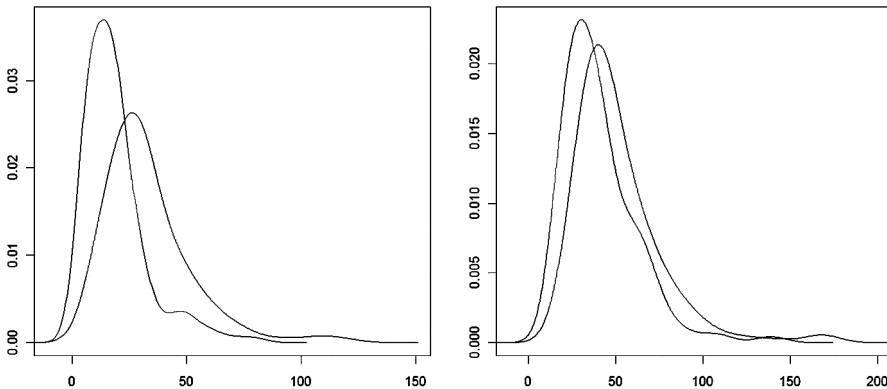
Z uwagi na wskazane wcześniej zróżnicowanie dynamiki zmian poziomu PKB *per capita* w podregionach należących do starych i nowych państw członkowskich odrębną analizę przeprowadzono dla jednostek należących do nowych państw członkowskich, przeddefiniowując uprzednio stany procesu. Rozkład PKB *per capita* dopasowany za pomocą estymacji jądrowej przedstawiono na rysunku 3. W przypadku zmiennej wyrażonej zarówno w euro, jak i w PSN zauważalne jest przesunięcie w prawo funkcji gęstości dotyczącej 2008 r. w stosunku do 1999 r.



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
■ stare (euro)	0,000	0,003	0,157	0,196	0,198	0,133	0,105	0,080	0,065	0,046	0,016
■ nowe (euro)	0,017	0,443	0,221	0,055	0,034	0,018	0,009	0,012	0,000	0,000	0,000
■ stare (PSN)	0,000	0,060	0,231	0,144	0,176	0,141	0,134	0,023	0,028	0,040	0,024
■ nowe (PSN)	0,080	0,423	0,134	0,066	0,030	0,027	0,018	0,023	0,027	0,065	0,106

Rysunek 2. Prognoza rozkładu PKB per capita na 2030 r.

Źródło: obliczenia własne.



Rysunek 3. PKB per capita w podregionach nowych państw członkowskich jako procent średniej EU-27, 1999 vs 2008 (euro po lewej i PSN po prawej)

Źródło: obliczenia własne przy użyciu pakietu KernSmooth programu R CRAN.

Ze względu na znacznie mniejszą niż poprzednio liczbę obserwacji przyjęto cztery stany, definiując je na podstawie rozkładu zmiennej PKB per capita wyrażonej w euro: stan 1 – jednostki, dla których PKB per capita stanowi mniej niż 15% średniej europejskiej, stan 2 – od 15% do 25%, stan 3 – od 25% do 35%, stan 4 – powyżej 35%. Dla zmiennej wyrażonej w PPS zdefiniowano: stan 1

– jednostki, dla których PKB *per capita* wyrażone w PSN stanowi poniżej 30%, stan 2 – od 30% do 40%, stan 3 – od 40% do 60%, stan 4 – powyżej 60%.

Wyniki oszacowań parametrów macierzy intensywności przejścia modelu jednorodnego (model E0 dla zmiennej mierzonej w euro i model P0 – w PSN) zawarto w tabeli 5.

Tabela 5. Macierze intensywności przejścia dla modeli jednorodnych, E0 i P0

Model E0	1 (0–15)	2 (15–25)	3 (25–35)	4 (pow. 35)
1	–0,1503 (0,0160)	0,1503 (0,016)		
2	0,0281 (0,0071)	–0,2216 (0,020)	0,1935 (0,0182)	
3		0,0935 (0,020)	–0,2202 (0,0279)	0,1267 (0,0198)
4			0,0195 (0,0083)	–0,0195 (0,0083)
czas pobytu	6,7 (0,71)	4,5 (0,40)	4,5 (0,58)	51,3 (21,69)
rozkład graniczny	0,02	0,06	0,12	0,8
Model P0	1 (0–30)	2 (30–40)	3 (40–60)	4 (pow. 60)
1	–0,1141 (0,0150)	0,1135 (0,0149)	0,0006 (0,0012)	
2	0,0262 (0,0077)	–0,1567 (0,0181)	0,1304 (0,0164)	
3		0,0253 (0,0075)	–0,0853 (0,0133)	0,0600 (0,0110)
4			0,0317 (0,0097)	–0,0317 (0,0097)
czas pobytu	8,8 (1,15)	6,4 (0,74)	11,7 (1,83)	31,5 (9,59)
rozkład graniczny	0,01	0,06	0,32	0,6

Uwagi: w nawiasach podano błędy standardowe.

Źródło: opracowanie własne przy użyciu pakietu msm programu R CRAN.

Na podstawie otrzymanych macierzy intensywności zbudowano macierze przejścia w ciągu jednego roku i wyznaczono rozkłady graniczne oraz oczekiwane czasy dalszego pobytu w każdym stanie. W obu przypadkach proces okazał się ergodyczny, a w rozkładach granicznych obserwuje się silną koncentrację w stanie 4.

Następne dwa modele uwzględniają powiązania przestrzenne między regionami poprzez wprowadzenie zmiennej objaśniającej mającej wpływ na intensywności zmian stanów. W modelu E1 zmienną objaśniającą zdefiniowano jako uśredniony (wg obliczonej wcześniej macierzy wag k -najbliższych sąsiadów W) poziom PKB *per capita* w sąsiednich jednostkach, $Eh = W \cdot E$. W modelu

E2 zmienną objaśniającą jest różnica $E - Eh$, która ma za zadanie określić, czy dany region jest bogatszy, czy biedniejszy od swoich sąsiadów. Analogicznie zdefiniowano modele P1 i P2. W tabeli 6 przedstawiono wartości $\exp(\beta)$ dla każdej pary stanów, między którymi możliwe jest przejście.

W modelu E1 obserwuje się dodatni wpływ zmiennej objaśniającej na intensywność przejścia ze stanu 1 do 2. Nieco słabszy dodatni efekt występuje również przy przejściu ze stanu 2 do 3, tu jednopunktowy wzrost PKB *per capita* u sąsiadów powoduje wzrost intensywności awansu o ok. 2%. W modelu E2 o dodatnim wpływie zmiennej objaśniającej można mówić przy przejściu ze stanu 2 do 1. Im bogatszy jest region na tle swoich sąsiadów, tym większe ryzyko spadku do niższego stanu.

Tabela 6. Modele z efektami przestrzennymi, $\exp(\beta)$

Z	Do	Model E1	Model E2	Model P1	Model P2
1	2	1,091	0,985	1,044	0,984
1	3	–	–	1,185	1,062
2	1	0,948	1,054	1,025	1,032
2	3	1,023	1,014	1,03	1,009
3	2	0,976	1,019	0,983	0,996
3	4	1,004	0,997	1,005	1,044
4	3	0,946	1,001	0,970	0,995

Źródło: opracowanie własne przy użyciu pakietu msm programu R CRAN.

Aby dokładniej zilustrować wpływ zmiennych objaśniających na prawdopodobieństwa przejścia i własności graniczne modelu, zbudowano przykładowe macierze przejścia dla wybranych wartości tych zmiennych (tabela 7). W modelu E1 rozkład graniczny przesuwa się wraz ze wzrostem zamożności sąsiadów do stanu 4. W grupie podregionów otoczonych przez bogatych sąsiadów następuje przesunięcie do stanów 2 i 3. W modelu E2 wzrost zamożności jednostki na tle sąsiadów nie przekłada się na zwiększenie prawdopodobieństwa trafienia w przyszłości do najwyższego stanu. Najlepsze dopasowanie (mierzone wartością kryterium informacyjnego Akaikego) otrzymano dla modelu jednorodnego. Przeprowadzone testy ilorazu wiarygodności dały to samo wskazanie.

Tabela 7. Macierze przejścia w modelu E1

Model E1	Biedni sąsiedzi ($Eh = 10$)				Bogaci sąsiedzi ($Eh = 40$)			
Stan	1	2	3	4	1	2	3	4
1	0,920	0,075	0,005	0,000	0,319	0,590	0,086	0,005
2	0,052	0,841	0,100	0,007	0,006	0,780	0,198	0,016
3	0,003	0,102	0,779	0,116	0,000	0,049	0,814	0,137
4	0,000	0,004	0,053	0,943	0,000	0,000	0,011	0,989
Rozkład graniczny	0,14	0,21	0,20	0,44	0,00018	0,018	0,071	0,91
Model E2	$E - Eh = -50$				$E - Eh = 100$			
Stan	1	2	3	4	1	2	3	4
1	0,862	0,133	0,005	0,000	0,885	0,107	0,008	0,000
2	0,008	0,917	0,072	0,003	0,044	0,821	0,126	0,009
3	0,000	0,086	0,844	0,070	0,002	0,072	0,805	0,122
4	0,000	0,000	0,012	0,988	0,000	0,002	0,049	0,949
Rozkład graniczny	0,009	0,14	0,12	0,73	0,054	0,13	0,23	0,58

Źródło: opracowanie własne przy użyciu pakietów `spdep` i `msm` programu R CRAN.

Tabela 8. Modele ze zmienną czasową, $\exp(\beta)$

Z	Do	Model E3	Model P3
1	2	1,206	1,262
1	3	–	1,194
2	1	1,075	0,999
2	3	1,268	1,172
3	2	0,973	0,899
3	4	1,146	1,077
4	3	0,860	1,184

Źródło: opracowanie własne przy użyciu pakietów `spdep` i `msm` programu R CRAN.

Ostatnia grupa modeli uwzględnia zmiany intensywności przejść w czasie (tabela 8). Modele oznaczone symbolami E3 i P3 zawierają zmienną czasową jako zmienną objaśniającą. W każdym przypadku wraz z upływem czasu rosną szanse awansu, co jest szczególnie widoczne w przypadku stanów 1 i 2, odpowiadających najuboższym podregionom. Kryterium Akaikego i testy ilorazu

wiarygodności potwierdziły istotność zmiennej czasowej. W konsekwencji można się spodziewać, że w rozkładach stacjonarnych nastąpi jeszcze większa koncentracja w stanie 4, niż to wynika z prognoz otrzymanych na podstawie modeli jednorodnych.

5. Podsumowanie

Celem opracowania było pokazanie możliwości zastosowania niejednorodnych modeli Markowa w analizie dynamiki rozkładu PKB *per capita* w regionach państw członkowskich Unii Europejskiej. Zaproponowane podejście, polegające na uwzględnieniu bezpośrednio w specyfikacji modelu zmian w czasie oraz zmiennych odzwierciedlających wpływ powiązań przestrzennych na prawdopodobieństwa przejścia regionu do klasy o wyższym lub niższym poziomie PKB *per capita*, wykazało dodatni wpływ poziomu zamożności sąsiednich regionów na prawdopodobieństwa awansu oraz, szczególnie widoczną w regionach nowych państw członkowskich, ogólną tendencję do zwiększania tych prawdopodobieństw w kolejnych latach.

Dalsze rozszerzenie analizy dynamiki zmian PKB *per capita* prowadzonej przy wykorzystaniu modeli Markowa obejmuje badanie wrażliwości stosowanej metody na sposób przeprowadzenia dyskretyzacji zmiennych, jak również uwzględnienie głębszej pamięci procesu. Obecnie weryfikacja otrzymanych wyników jest jednak utrudniona ze względu na poważne luki w danych dotyczących poziomu PKB *per capita* zgłaszanych przez poszczególne kraje do bazy Eurostatu.

Bibliografia

1. Fingleton B., *Specification and testing of Markov chain models: an application to convergence in the European Union*, „Oxford Bulletin of Economics and Statistics” 1997, vol. 59(3), s. 358–403.
2. Kalbfleisch J., Lawless J., *The Analysis of Panel Data under a Markov Assumption*, „Journal of the American Statistical Association” 1985, vol. 80(392), s. 863–871.
3. Kopczevska K., *Ekonometria i statystyka przestrzenna z wykorzystaniem programu R CRAN*, CeDeWu, Warszawa 2006.

4. Le Gallo J., *Space-time analysis GDP disparities cross European regions: a Markov chain approach*, „International Regional Science Review” 2004, vol. 27, s. 138–163.
5. Lopez-Bazo E., Vaya E., Mora A.J., Surhach J., *Regional economic dynamics and convergence in European Union*, „The Annals of Regional Science” 1999, vol. 33, s. 343–370.
6. Magrini S., *The evolution of income disparities among the regions of the European Union*, „Regional Science and Urban Economics” 1999, vol. 29(2), s. 257–281.
7. Quah D.T., *Empirics for Stratification, Polarization, and Convergence Clubs Growth and Distribution*, „Journal of Economic Growth” 1997, vol. 2, s. 27–59.
8. Rey S.J., *Spatial empirics for regional economic growth and convergence*, „Geographical Analysis” 2001, vol. 33(3), s. 195–214.
9. Siverman B.W., *Density estimation for statistics and data analysis*, Chapman and Hall, London 1986.
10. Wójcik P., *Dywergencja czy konwergencja: dynamika rozwoju polskich regionów*, „Studia Regionalne i Lokalne” 2008, t. 2(32), s. 41–60.

* * *

Markov models in analysis of income distribution dynamics in EU regions

The paper presents analysis of income distribution dynamics by means of Markov models with covariates referring to spatial or time nature factors. Markov models applied for GDP per capita distribution dynamics in European regions from 1999 to 2008 show strong tendency to stay in the same class of GDP level in succeeding years and a very slow convergence to limit distribution. Markov models with spatial and time effects prove positive impact of neighbours' welfare on probability of moving up to higher states and general time increasing tendency to move to higher states.

Keywords: convergence, spatial effects, Markov model