

MICHAŁ BERNARDELLI
Kolegium Analiz Ekonomicznych
Szkoła Główna Handlowa w Warszawie

Nieklasyczne modele Markowa w analizie cykli koniunktury gospodarczej w Polsce

Streszczenie

Badanie cykli koniunkturalnych stanowi jedno z podstawowych źródeł oceny aktualnej i przyszłej sytuacji gospodarczej. Do analizy zmian klimatu koniunktury w Polsce z powodzeniem wykorzystuje się nieklasyczne modele Markowa. Przedmiotem badania było wykorzystanie wielostanowych modeli Markowa do analizy wyników testu koniunktury w przemyśle prowadzonym przez Instytut Rozwoju Gospodarczego Szkoły Głównej Handlowej w Warszawie. W przeprowadzonych badaniach szczególny nacisk został położony na modele rozszerzone o efekty przestrzenne, dzięki uwzględnieniu jako danych wejściowych łańcucha Markowa kombinacji par szeregów sald odpowiedzi na pytania testu koniunktury. Porównana została dokładność tych modeli z ukrytymi modelami Markowa związanymi z szeregiem sald odpowiedzi na pojedyncze pytania testu. Zweryfikowana została także przydatność zaprojektowanych modeli pod kątem identyfikacji punktów zwrotnych cyklu koniunkturalnego w Polsce.

Słowa kluczowe: ukryte modele Markowa, algorytm Viterbiego, test koniunktury w przemyśle, punkty zwrotne cyklu koniunkturalnego

1. Wprowadzenie

Badanie cykli koniunkturalnych stanowi jedno z podstawowych źródeł oceny aktualnej i przyszłej sytuacji gospodarczej. Budowa deterministycznych modeli prognostycznych jest utrudniona ze względu na stosunkowo niewielką długość dostępnych koniunkturalnych szeregów czasowych, jak również ze względu na potencjalną obecność zmiennych ukrytych w tworzonych modelach. Stąd

nawet jednoznaczna identyfikacja punktów zwrotnych w polskiej gospodarce nie jest zadaniem łatwym. Alternatywne rozwiązanie stanowią, stosowane z powodzeniem, modele Markowa, których podstawą jest ich niedeterministyczny charakter¹.

Celem badania było porównanie jakości dopasowania wielostanowych ukrytych modeli Markowa wyznaczonych na podstawie kombinacji par szeregów sald odpowiedzi na pytania testu koniunktury w przemyśle z dopasowaniem modeli, których parametry zostały obliczone na podstawie pojedynczych pytań testu. Uwzględnienie panelowości danych wejściowych zwiększa złożoność obliczeniową rozwiązywania badanego zagadnienia, ale uzyskane wyniki stanowią pozytywną odpowiedź na pytanie o zasadność takiego podejścia i pozwalają optymistycznie patrzeć na przydatność zaprojektowanych modeli pod kątem np. identyfikacji punktów zwrotnych cyklu koniunkturalnego w Polsce.

Opracowanie podzielone jest na sześć paragrafów. Po wprowadzeniu w tematykę pracy krótko zostały scharakteryzowane ukryte modele Markowa. Paragraf trzeci poświęcony jest opisowi danych z testu koniunktury w przemyśle. Została tu przedstawiona procedura przetworzenia danych empirycznych użytych do konstrukcji ukrytych modeli Markowa. W paragrafie czwartym została opisana przeprowadzona symulacja komputerowa. Następnie zaprezentowano rezultaty uzyskane w wyniku działania napisanego przez autora programu komputerowego, stanowiącego dokładną implementację postępowania opisanego w paragrafie czwartym. Praca zakończona jest wnioskami.

2. Ukryte modele Markowa

Modele Markowa można zdefiniować na gruncie procesów stochastycznych². Można również sformułować równoważną definicję wykorzystującą terminologię z dziedziny automatów skończonych. Niech S_x będzie skończonym k -elementowym zbiorem, tzw. zbiorem stanów z wyróżnionym stanem S_0 traktowanym jako stan początkowy. Zakładamy tym samym, że zbiór stanów jest niepusty, czyli $k > 0$. Niech

¹ M. Bernardelli, M. Dędyś, *Ukryte modele Markowa w analizie wyników testu koniunktury gospodarczej*, w: *Badanie koniunktury – zwierniadał gospodarki*, cz. 1, red. K. Walczyk, „Prace i Materiały” Instytutu Rozwoju Gospodarczego SGH, nr 90, Warszawa 2012, s. 159–181.

² Np. O. Cappé, E. Moulines, T. Rydén, *Inference in Hidden Markov Models*, Springer, New York 2005.

$$P = [p_{i,j}]_{i,j=1}^k$$

będzie macierzą prawdopodobieństw przejść, gdzie $p_{i,j}$ oznacza prawdopodobieństwo przejścia ze stanu i do stanu j . Zakładamy, że macierz przejść jest stochastyczna, czyli dla każdego i

$$\sum_{j=1}^k p_{i,j} = 1.$$

Łańcuchem Markowa nazywamy uporządkowaną trójkę (S_x, S_0, P) . Kluczową cechą łańcucha Markowa jest tzw. brak pamięci. Oznacza to, iż następny stan zależy tylko od stanu obecnego, a nie od historii dojścia do aktualnego stanu.

Ukryte modele Markowa, w skrócie HMM (ang. *Hidden Markov Models*), w literaturze informatycznej znane są również pod nazwą probabilistycznych automatów z wyjściem. Stanowią one rozszerzenie definicji łańcucha Markowa o dodatkowy alfabet Σ , którego litery emitowane są w konkretnym stanie z zadanym prawdopodobieństwem. Jeżeli dany HMM jest w stanie $i \in S_x$, to emituje on symbol $i \in \Sigma$ z prawdopodobieństwem $e_i(x)$, a następnie przechodzi do stanu j z prawdopodobieństwem $p_{i,j}$. Przyjmujemy, iż w każdym stanie emitowany jest jakiś symbol, tj. dla każdego $i \in S_x$

$$\sum_{x \in \Sigma} e_i(x) = 1.$$

Obserwowalne zatem są tylko symbole emitowane przez model, to zaś, w jakim aktualnie stanie znajduje się ukryty łańcuch Markowa, pozostaje nieobserwowalne. W pracy będzie rozważany nieskończony alfabet Σ złożony z liczb rzeczywistych, przy czym prawdopodobieństwo emisji danego symbolu – liczby rzeczywistej – dane jest rozkładem normalnym i tożsame ze statystycznego punktu widzenia z założeniem normalnego warunkowego rozkładu prawdopodobieństwa.

Jeśli przestrzeń stanów ukrytego łańcucha Markowa jest k -elementowa, to będziemy mówić o k -stanowym modelu HMM. Ze względu na łatwość interpretacji ekonomicznej oraz praktyczne zastosowanie badanie zostało ograniczone do modeli dwu-, trój- i czterostanowych.

W ekonometrii modele HMM wykorzystuje się najczęściej do analizy szeregów finansowych i makroekonomicznych³. Podstawowym zakresem zastosowań HMM

³ Np. M. Bernardelli, M. Dędyś, op.cit.; ibidem.

jest jednak rozpoznawanie wzorców, jak np.: mowy, sygnałów czy odręcznego pisma. Ukryte modele Markowa są również szeroko stosowane w bioinformatyce.

3. Charakterystyka danych empirycznych

W pracy zostały wykorzystane odpowiedzi na pytania pochodzące z testu koniunktury w przemyśle przeprowadzonego przez Instytut Rozwoju Gospodarczego SGH w Warszawie od marca 1997 r. do sierpnia 2011 r. W skład testu wchodzi następujące pytania:

Pytanie 1. Wielkość produkcji.

Pytanie 2. Portfel zamówień ogółem.

Pytanie 3. Portfel zamówień eksportowych.

Pytanie 4. Poziom zapasów produkowanych wyrobów.

Pytanie 5. Ceny produkowanych wyrobów.

Pytanie 6. Poziom zatrudnienia.

Pytanie 7. Sytuacja finansowa przedsiębiorstwa.

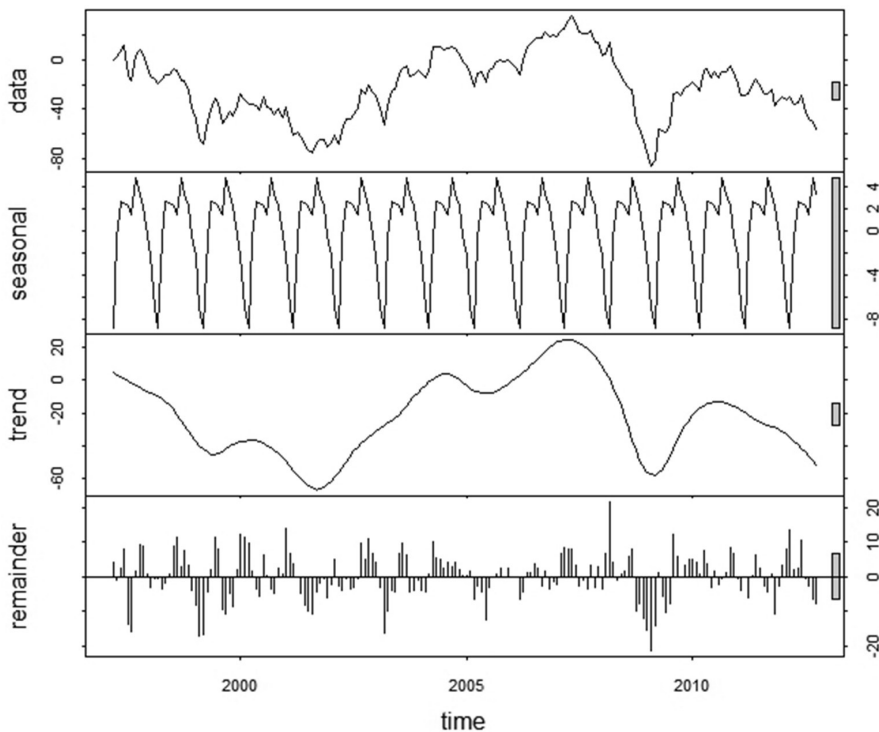
Pytanie 8. Ogólna sytuacja gospodarki polskiej.

Dane zawierają odpowiedzi na pytania o aktualną sytuację w gospodarce oraz o prognozę na najbliższy okres dokonywaną przez respondentów. Ze względu na liczbę możliwych kombinacji danych wejściowych konieczne było ograniczenie się do kilku klas o najlepszych właściwościach. Po dokładnej weryfikacji⁴ do dalszej analizy wykorzystano modele oparte na trendach szeregów sald dotyczących oceny stanu aktualnego. Do dekompozycji szeregów została wykorzystana procedura *stl* z pakietu komputerowego R. Procedura ta stanowi implementację algorytmu opartego na lokalnie ważonej metodzie regresji znanego pod nazwą „loess”⁵. Na rysunku 1 została przedstawiona dekompozycja szeregu sald odpowiedzi na pytanie o ogólną sytuację gospodarki polskiej (pytanie 8). Wyeksponowane zostały składowa sezonowa (ang. *seasonal*), trend (ang. *trend*) oraz składowa losowa (ang. *remainder*), przy czym:

$$data = seasonal + trend + remainder.$$

⁴ M. Bernardelli, M. Dędyś, op.cit.

⁵ R.B. Cleveland, W.S. Cleveland, J.E. McRae, I. Terpenning, *STL: A Seasonal-Trend Decomposition Procedure Based on Loess*, „Journal of Official Statistics” 1990, vol. 6, s. 3–73.



Rysunek 1. Dekompozycja szeregu sald odpowiedzi na pytanie o ogólną sytuację gospodarki polskiej (pytanie 8) z wykorzystaniem procedury STL

Źródło: opracowanie własne.

Tak oczyszczone z wahań sezonowych i losowych dane z zestawów odpowiedzi na każde z ośmiu pytań potraktowano jako realizacje składowej obserwowalnej ukrytego modelu Markowa. Na ich podstawie zostały dobrane parametry modeli HMM.

4. Opis badania

W celu sprawdzenia wpływu liczby uwzględnionych zestawów odpowiedzi na dokładność dopasowania do szeregów referencyjnych przeanalizowano ukryte modele Markowa o różnej liczbie stanów dla zmiennych danych wejściowych. W pierwszej kolejności przebadano kolejno każde z ośmiu pytań, a następnie porównano uzyskane wyniki z rezultatami obliczeń dla wszystkich możliwych kombinacji par pytań (28 możliwości).

W przypadku dwustanowego modelu HMM przyjęto, iż dwuelementowa przestrzeń stanów ma postać $S_x = \{0, 1\}$. Stan zerowy jest związany z okresami opisywanymi przez respondentów jako gorsze w odniesieniu do rozpatrywanego pytania, natomiast stan określony przez liczbę jeden jest związany z sytuacją ocenianą jako lepsza.

W przypadku trójstanowego modelu HMM przestrzeń stanów ma postać $S_x = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$. Stany 0 oraz 1, tak jak w przypadku modelu dwustanowego, oznaczają odpowiednio spowolnienie i ożywienie sytuacji gospodarczej w Polsce. Stan $\frac{1}{2}$ symbolizuje stan przejściowy pomiędzy stanami 0 oraz 1, tj. stan niepewny i trudny do jednoznacznej klasyfikacji.

Analogicznie jak dla trójstanowego modelu HMM, przestrzeń stanów modelu o czterech stanach jest postaci $S_x = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$. Stan 0 oznacza zdecydowane spowolnienie gospodarcze, stan 1 niepodważalne ożywienie sytuacji gospodarczej w Polsce, natomiast stany $\frac{1}{3}$ oraz $\frac{2}{3}$ są stanami przejściowymi, przy czym stan $\frac{1}{3}$ należy interpretować jako stan niepewny ze wskazaniem na gorszą sytuację gospodarczą w kraju, stan $\frac{2}{3}$ sugeruje zaś raczej lepsze warunki gospodarcze.

Można oczywiście rozpatrywać również modele o większej niż cztery liczbie stanów, jednakże zrezygnowano z tego pomysłu ze względu na rozmywającą się wraz z rosnącą liczbą stanów interpretację ekonomiczną, jak również stosunkowo krótką długość badanych szeregów.

Dla każdego z k -stanowych modeli HMM wymagane jest dobranie następujących parametrów:

- prawdopodobieństw startowych dla poszczególnych stanów (k parametrów),
- prawdopodobieństw przejścia pomiędzy dwoma stanami (k^2 parametrów),
- prawdopodobieństw emisji symbolu w danym stanie ($2k$ parametrów),

przy czym w badaniu $k \in \{2, 3, 4\}$. W przypadku modeli trój- oraz czterostanowych przyjęto zerowe wartości prawdopodobieństw przejść pomiędzy stanami, które nie są w bezpośrednim sąsiedztwie. Jest to tożsame z przyjęciem uzasadnionego ekonomicznie twierdzenia, iż zmiany w gospodarce następują stopniowo. Stąd nie jest dopuszczona sytuacja, w której z fazy całkowitego spowolnienia gospodarczego przechodzimy do fazy ożywienia – muszą zostać wcześniej osiągnięte wszystkie stany pośrednie. Nie ma to oczywiście znaczenia w przypadku modeli o tylko dwóch stanach.

Do doboru parametrów modeli HMM wykorzystano iteracyjny algorytm należący do klasy metod maksymalizujących wartość oczekiwaną, tzw. metody *Expectation-Maximization*. Mówiąc dokładniej: użyto implementacji zawartej w procedurze *fit* z biblioteki *depmixS4* pakietu obliczeniowego R. Metoda ta jest

powszechnie znana pod nazwą algorytmu Bauma–Welcha⁶, którego dokładny opis można znaleźć m.in. w artykule Bauma⁷. Algorytm ten należy ze względu na sposób działania zaliczyć do klasy algorytmów zachłanych. Stąd uzyskane rozwiązania mogą okazać się dalekie od optymalnych. Nie mamy bowiem gwarancji, iż uzyskany rezultat jest maksimum globalnym. Przy pewnych wartościach startowych może okazać się, iż znalezione rozwiązanie jest tylko lokalnym maksimum. Stanowi to podstawową wadę algorytmu Bauma–Welcha. Stosowanym wyjściem z tej sytuacji jest wielokrotne wykonanie algorytmu dla tych samych danych, ale różnych wartości startowych. Weryfikacja wyników oraz wybór najlepszego z nich może nastąpić wówczas na podstawie kilku kryteriów, przede wszystkim kryteriów informacyjnych, np. AIC i BIC, jak również częstości uzyskania konkretnego maksimum metodą *Expectation-Maximization*. Stabilność rozpatrywanych modeli została wykazana przy użyciu symulacji Monte Carlo⁸.

Duża złożoność obliczeniowa jest cechą charakterystyczną współczesnych badań ekonometrycznych wspomaganych przez zaawansowane algorytmy i programy komputerowe. Jest ona szczególnie widoczna w przypadku obliczeń związanych z danymi panelowymi, gdy znacząco rośnie liczba możliwych kombinacji⁹. Opisane w niniejszym artykule modele ze względu na swój stopień złożoności stanowią doskonały przykład wykorzystania znanych od lat algorytmów i dostępnej współcześnie mocy obliczeniowej komputerów do bardziej wyrafinowanej, a przede wszystkim dokładniejszej analizy badanego zjawiska. Parametry rozpatrywanych modeli zostały uzyskane na podstawie 5 tys. losowych prawdopodobieństw startowych dla poszczególnych stanów. Liczby losowane były z rozkładu jednostajnego na przedziale [0,1]. Oznacza to, iż zbudowano i zbadano ponad 0,5 mln modeli HMM z warunkowymi rozkładami normalnymi. Dla najlepszych parametrów w rozpatrywanych klasach modeli

⁶ Inna powszechnie stosowana nazwa dla algorytmu doboru parametrów modeli HMM to algorytm *forward-backward*, a w literaturze polskojęzycznej również algorytm prefiksowo-sufiksowy.

⁷ L.E. Baum, T. Petrie, G. Soules, N. Weiss, *A maximization technique occurring in the statistical analysis of probabilistic functions of Markov chains*, „Ann. Math. Statist.” 1970, vol. 41, no. 1, s. 164–171.

⁸ M. Bernardelli, *Nieklasyczne modele Markowa – problemy numeryczne*, praca badawczo-rozwojowa, SGH 2012.

⁹ Np. M. Próchniak, B. Witkowski, *Bayesian Model Averaging in Modelling GDP Convergence with the Use of Panel Data*, „Roczniki” Kolegium Analiz Ekonomicznych SGH, z. 26, Oficyna Wydawnicza SGH, Warszawa 2012, s. 45–60; M. Próchniak, B. Witkowski, *Time Stability of the Beta Convergence among EU Countries: Bayesian Model Averaging Perspective*, „Economic Modelling” 2013, vol. 30, s. 322–333.

została wygenerowana najbardziej prawdopodobna ścieżka ukrytego łańcucha Markowa w całym rozpatrywanym okresie. W tym celu zastosowano algorytm Viterbiego¹⁰, zaimplementowany w procedurze *posterior* z pakietu obliczeniowego R. Dokładniejszy opis generowania optymalnych z punktu widzenia maksymalizacji prawdopodobieństwa ścieżek ukrytego łańcucha Markowa został przedstawiony w pracy Bernardellego i Dędys¹¹.

Należy dodać, iż uzyskana bezpośrednio w wyniku działania algorytmu Bauma–Welcha numeracja stanów nie musi odpowiadać nadawanej im interpretacji ekonomicznej. Innymi słowy: może się okazać, iż w niektórych modelach będzie konieczne przenumerowanie stanów. Formalnie stan 0 jest utożsamiany z rozkładem warunkowym o najniższej wartości średniej, czyli najmniejszej wartości oczekiwanej prawdopodobieństwa rozkładu normalnego odpowiadającego danemu stanowi. Analogicznie numerem 1 określony jest stan o rozkładzie warunkowym z największą wartością średnią. Po ustaleniu stanów 0 i 1 pozostałe stany, to jest $\frac{1}{2}$ w przypadku modeli trójstanowych oraz $\frac{1}{3}$ i $\frac{2}{3}$ w przypadku modeli o czterech stanach, określone są jednoznacznie. Jest to bezpośrednia konsekwencja zerowych prawdopodobieństw przejść pomiędzy niesąsiadującymi stanami.

Wyznaczone algorytmem Viterbiego ścieżki zostały porównane z szeregiem referencyjnymi uwzględniającymi datowania punktów zwrotnych cyklu koniunkturalnego dokonany przez:

- OECD – szereg referencyjny określany mianem cyklu odchyłeń,
- M. Drozdowicz-Bieć¹² – zwany w dalszej części pracy cyklem klasycznym.

Porównania uwzględniają możliwość wyprzedzenia bądź opóźnienia badanych szeregów w stosunku do szeregów referencyjnych. Maksymalny badany czas przesunięcia został przyjęty na poziomie połowy roku, przy czym – dla przypomnienia – badane szeregi mają częstotliwość miesięczną. Najlepsze przesunięcie zostało wybrane automatycznie poprzez sprawdzenie wszystkich możliwości. Minimalizowana przy tym była liczba błędów dopasowania. Przez błąd rozumiemy sytuację, gdy szereg referencyjny oraz szereg badany wskazują na skrajnie różne stany, tj. kiedy jeden z nich wskazuje na ożywienie, a drugi na spowolnienie gospodarcze. Alternatywą mogłaby być maksymalizacja poprawnych dopasowań obu szeregów, jednakże ze względu na brak stanów

¹⁰ A. Viterbi, *Error bounds for convolutional codes and an asymptotically optimum decoding algorithm*, „IEEE Transactions on Information Theory” 1967, vol. 13(2), s. 260–269.

¹¹ M. Bernardelli, M. Dędys, op.cit.

¹² M. Drozdowicz-Bieć, *Cykle i wskaźniki koniunktury*, Poltext, Warszawa 2012.

pośrednich w szeregach referencyjnych nie wydaje się to lepszym rozwiązaniem. Oczywiście w przypadku modeli o dwóch stanach oba podejścia są równoważne.

Jakość dopasowań do szeregów referencyjnych mierzona liczbą błędów stanowiła podstawowe kryterium mające dać odpowiedź na pytanie o sensowność uwzględnienia jako danych wejściowych par pytań w miejsce pojedynczych szeregów czasowych.

5. Wyniki badania

W tabelach 1–3 zostały zebrane informacje na temat liczby błędnych dopasowań do klasycznego szeregu referencyjnego modeli o odpowiednio dwóch, trzech i czterech stanach. W miejscu przecięcia wiersza odpowiadającego i -temu pytaniu i kolumnie związanej z pytaniem j -tym, dla $j \neq i$ została umieszczona liczba pomyłek popełniona przy porównaniu z optymalnym dopasowaniem, uwzględniającym możliwe opóźnienia i wyprzedzenia, ścieżki ukrytego łańcucha Markowa wyznaczonego na podstawie dwóch pytań o numerach i oraz j . Na najciemniejszym tle zostały umieszczone wartości na przekątnej tabeli, tj. dla $i = j$, które to oznaczają liczby niedopasowań dla modeli HMM wyznaczonych na podstawie tylko jednego pytania. Pogrubioną czcionką na szarym tle zaznaczone zostały te kombinacje pytań w danej kolumnie, które dają w rezultacie lepsze dopasowanie modelu HMM niż model z wykorzystaniem pojedynczego pytania.

Tabela 1. Wyniki porównania dwustanowych ukrytych modeli Markowa z klasycznym szeregiem referencyjnym mierzone liczbą błędnych dopasowań

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	16	16	16	44	60	12	18	12
2	16	18	17	44	58	15	20	15
3	16	17	19	20	60	15	21	19
4	44	44	20	40	28	24	29	24
5	60	58	60	28	54	44	58	59
6	12	15	15	24	44	28	15	7
7	18	20	21	29	58	15	21	15
8	12	15	19	24	59	7	15	13

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 2. Wyniki porównania trójstanowych ukrytych modeli Markowa z klasycznym szeregiem referencyjnym mierzone liczbą błędnych dopasowań

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	6	5	10	9	32	6	4	12
2	5	7	9	11	34	3	3	14
3	10	9	13	14	31	2	23	23
4	9	11	14	11	11	5	24	23
5	32	34	31	11	23	0	21	23
6	6	3	2	5	0	0	2	0
7	4	3	23	24	21	2	24	14
8	12	14	23	23	23	0	14	7

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 3. Wyniki porównania czterostanowych ukrytych modeli Markowa z klasycznym szeregiem referencyjnym mierzone liczbą błędnych dopasowań

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	6	2	11	3	2	0
2	3	5	2	17	11	3	3	2
3	6	2	4	4	12	0	28	0
4	2	17	4	0	7	0	0	6
5	11	11	12	7	19	0	23	6
6	3	3	0	0	0	0	2	0
7	2	3	28	0	23	2	1	0
8	0	2	0	6	6	0	0	0

Źródło: opracowanie własne.

Bez względu na liczbę rozpatrywanych stanów w modelu dla każdego pytania istnieje przynajmniej jedna możliwość połączenia go z innym z pytań, która nie pogorszy jakości dopasowania. Jeżeli pominiemy dopasowania optymalne – z zerową liczbą błędów – to istnieją kombinacje pytań poprawiające jakość dopasowania. Oznacza to, iż dodanie jako szeregu wejściowego drugiego szeregu wnosi do modelu informacje, które nie są zawarte w pojedynczym szeregu. Wyraźnie wyróżnia się tutaj pytanie o poziom zatrudnienia (pytanie 6), którego uwzględnienie w modelu znacznie poprawia jakość dopasowania. W przypadku wielu modeli wzięcie pod uwagę pytania o wielkość produkcji (pytanie 1) lub pytania o ogólną sytuację gospodarki polskiej (pytanie 8) również zmniejsza liczbę błędów dopasowań modelu do klasycznego szeregu referencyjnego.

Zdecydowanie najgorzej na tle wszystkich pytań wypadają modele związane z pytaniem o ceny produkowanych wyrobów (pytanie 5). Jakość dopasowania jest w tych przypadkach słabsza i dopiero uwzględnienie innych szeregów czasowych daje widoczną poprawę.

Na rysunkach 2 i 3 zostały przedstawione wykresy porównujące najbardziej prawdopodobne ścieżki dwustanowego HMM z klasycznym szeregiem referencyjnym, przy czym danymi wejściowymi do modelu był odpowiednio szereg sald odpowiedzi na pytanie o wielkość zatrudnienia (pytanie 6) oraz połączone szeregi sald odpowiedzi na pytania o wielkość zatrudnienia (pytanie 6) i ogólną sytuację gospodarki polskiej (pytanie 8). Liczba błędów dopasowania zmniejszyła się w tym przypadku z 28 do siedmiu (patrz tabela 1). Wyraźnie widoczna jest też wizualna poprawa jakości dopasowania.

Przykład skuteczności zastosowania danych panelowych w miejsce pojedynczego szeregu czasowego dla modeli HMM o trzech stanach pokazany jest na rysunkach 4 i 5. Liczba błędów dopasowania zmniejszyła się z 24 do dwóch (patrz tabela 2), a wraz z nią wzrosła jakość rozpatrywanych modeli.

Tabela 4. Wyniki porównania dwustanowych ukrytych modeli Markowa z szeregiem referencyjnym odchyłeń mierzone liczbą błędnych dopasowań

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	24	26	26	20	32	26	22	20
2	26	26	29	21	30	27	22	21
3	26	29	29	32	32	29	25	23
4	20	21	32	27	42	29	30	23
5	32	30	32	42	36	16	30	29
6	26	27	29	29	16	30	23	23
7	22	22	25	30	30	23	21	17
8	20	21	23	23	29	23	17	19

Źródło: opracowanie własne.

W tabelach 4–6 zostały przedstawione wyniki dopasowania do szeregu referencyjnego OECD modeli HMM o dwóch (tabela 4), trzech (tabela 5) i czterech (tabela 6) stanach. Znaczenie wykorzystanych pogrubień i kolorów jest takie samo jak w przypadku tabel 1–3. Zebrane dane wskazują na skuteczność uwzględnienia kombinacji dwóch pytań w modelach HMM w stosunku do jakości dopasowania modeli opartych tylko na pojedynczym szeregu czasowym. Najwięcej korzyści przynosi dołączenie pytania o ogólną sytuację gospodarki

polskiej (pytanie 8). W przeważającej liczbie przypadków dużą poprawę wnosi również wykorzystanie pytania o wielkość produkcji (pytanie 1) lub pytania o sytuację finansową przedsiębiorstwa (pytanie 7).

Tabela 5. Wyniki porównania trójstanowych ukrytych modeli Markowa z szeregiem referencyjnym odchyłeń mierzone liczbą błędnych dopasowań

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	7	4	7	5	3	4	5	0
2	4	7	7	7	14	16	8	4
3	7	7	13	18	15	15	11	6
4	5	7	18	20	18	7	10	4
5	3	14	15	18	15	2	14	14
6	4	16	15	7	2	15	15	14
7	5	8	11	10	14	15	11	3
8	0	4	6	4	14	14	3	14

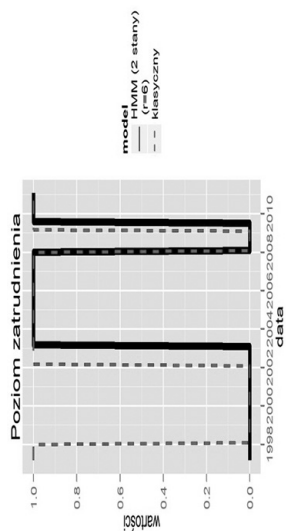
Źródło: opracowanie własne.

Tabela 6. Wyniki porównania czterostanowych ukrytych modeli Markowa z szeregiem referencyjnym odchyłeń mierzone liczbą błędnych dopasowań

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	0	0	1	0	0	35
2	1	1	21	7	1	0	1	0
3	0	21	7	4	7	0	4	0
4	0	7	4	7	4	0	13	13
5	1	1	7	4	10	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	11	0
7	0	1	4	13	0	11	0	12
8	35	0	0	13	0	0	12	14

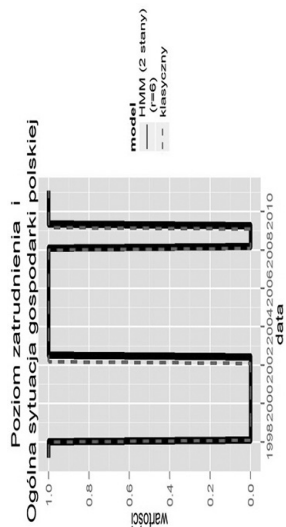
Źródło: opracowanie własne.

Na rysunkach 6–7 zostały przedstawione wykresy porównujące najbardziej prawdopodobne ścieżki dwustanowego HMM z szeregiem referencyjnym OECD. Zobrazowano poprawę jakości dopasowania modelu po uwzględnieniu w danych wejściowych dodatkowego pytania o wielkość zatrudnienia (pytanie 6) w stosunku do modelu uzyskanego na podstawie tylko jednego pytania o cenę produkowanych wyrobów (pytanie 5). W tym przypadku liczba błędów dopasowania zmniejszyła się z 36 do 16 (patrz tabela 4).



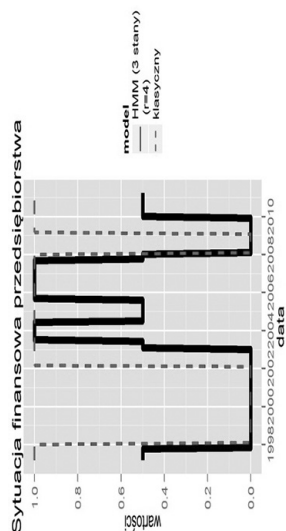
Rysunek 2. Porównanie najbardziej prawdopodobnej ścieżki dwustanowego HMM dla szeregu sald odpowiedzi na pytanie 6 z klasycznym szeregiem referencyjnym

Źródło: opracowanie własne.



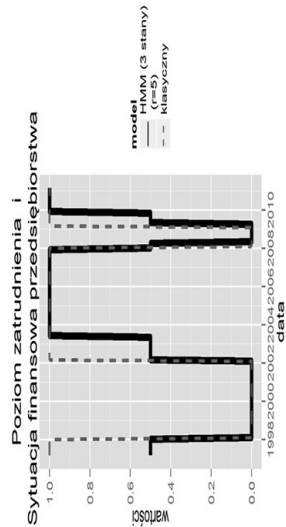
Rysunek 3. Porównanie najbardziej prawdopodobnej ścieżki dwustanowego HMM dla szeregu sald odpowiedzi na pytania 6 i 8 z klasycznym szeregiem referencyjnym

Źródło: opracowanie własne.



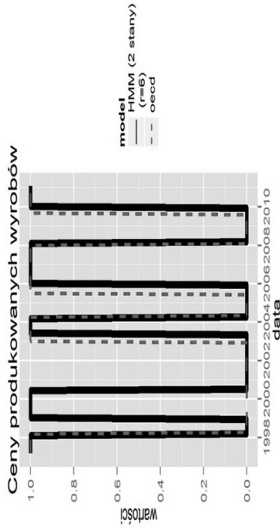
Rysunek 4. Porównanie najbardziej prawdopodobnej ścieżki trójstanowego HMM dla szeregu sald odpowiedzi na pytanie 7 z klasycznym szeregiem referencyjnym

Źródło: opracowanie własne.



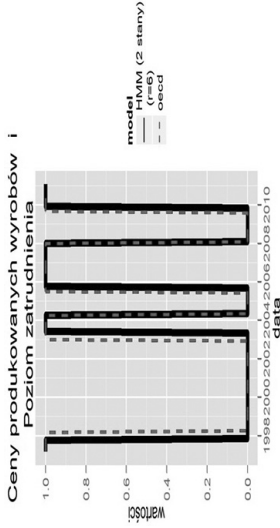
Rysunek 5. Porównanie najbardziej prawdopodobnej ścieżki trójstanowego HMM dla szeregu sald odpowiedzi na pytania 6 i 7 z klasycznym szeregiem referencyjnym

Źródło: opracowanie własne.



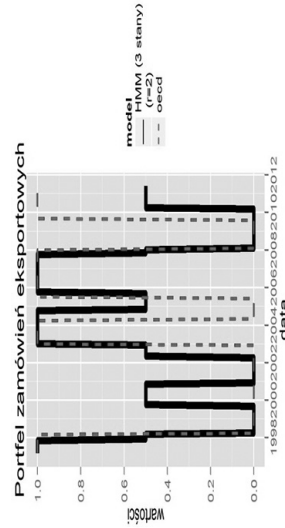
Rysunek 6. Porównanie najbardziej prawdopodobnej ścieżki dwustanowego HMM dla szeregu sald odpowiedzi na pytanie 5 z szeregiem referencyjnym odchyłeń

Źródło: opracowanie własne.



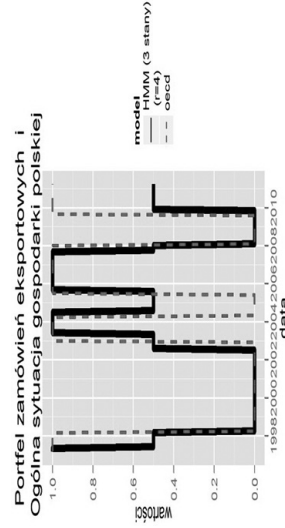
Rysunek 7. Porównanie najbardziej prawdopodobnej ścieżki dwustanowego HMM dla szeregu sald odpowiedzi na pytania 5 i 6 z szeregiem referencyjnym odchyłeń

Źródło: opracowanie własne.



Rysunek 8. Porównanie najbardziej prawdopodobnej ścieżki trójstanowego HMM dla szeregu sald odpowiedzi na pytanie 3 z szeregiem referencyjnym odchyłeń

Źródło: opracowanie własne.



Rysunek 9. Porównanie najbardziej prawdopodobnej ścieżki trójstanowego HMM dla szeregu sald odpowiedzi na pytania 3 i 8 z szeregiem referencyjnym odchyłeń

Źródło: opracowanie własne.

Wyraźną poprawę jakości dopasowania do szeregu referencyjnego odchyłeń widać na rysunkach 8 i 9, przedstawiających trójstanowe modele HMM wyznaczone na podstawie samego szeregu sald odpowiedzi na pytanie o portfel zamówień eksportowych (pytanie 3) oraz po dodatkowym uwzględnieniu szeregu sald odpowiedzi na pytanie o ogólną sytuację gospodarki polskiej (pytanie 8). Liczba błędów dopasowania zmniejszyła się z 13 do sześciu (patrz tabela 5).

Warto również zwrócić uwagę na zdecydowaną poprawę jakości dopasowania wraz ze wzrostem liczby stanów. Wartości liczbowe zebrane w tabelach 3 oraz 6 sugerują, iż w praktyce nie ma sensu rozpatrywać ukrytych modeli Markowa o większej niż cztery liczbie stanów. Co więcej, w wielu przypadkach wystarczające jest wykorzystanie tylko trójstanowych modeli HMM, ale po ograniczeniu do najlepszych kombinacji pytań (patrz tabele 2 i 5).

6. Podsumowanie

Z przeprowadzonych analiz wyników symulacji komputerowych można wyciągnąć następujące wnioski:

1. Wykorzystanie kombinacji odpowiednich szeregów sald odpowiedzi na pytania testu koniunktury w przemyśle daje wyraźną poprawę mierzoną liczbą błędnych dopasowań do szeregów referencyjnych bez względu na liczbę stanów ukrytego modelu Markowa.
2. Zwiększenie liczby stanów ukrytego modelu Markowa poprawia jakość dopasowania do szeregów referencyjnych.
3. Wykorzystanie danych panelowych może poprawić identyfikację punktów zwrotnych cyklu koniunkturalnego na podstawie wyników badań ankietowych, stanowiąc uzasadnienie zajęcia się tą problematyką.

Bibliografia

1. Baum L.E., Petrie T., Soules G., Weiss N., *A maximization technique occurring in the statistical analysis of probabilistic functions of Markov chains*, „Ann. Math. Statist.” 1970, vol. 41, no. 1, s. 164–171.
2. Bernardelli M., *Nieklasyczne modele Markowa – problemy numeryczne*, praca badawczo-rozwojowa, SGH 2012.

3. Bernardelli M., Dędyś M., *Ukryte modele Markowa w analizie wyników testu koniunktury gospodarczej*, w: *Badanie koniunktury – zwierciadło gospodarki*, cz. 1, red. K. Walczyk, „Prace i Materiały” Instytutu Rozwoju Gospodarczego SGH, nr 90, Warszawa 2012, s. 159–181.
4. Cappé O., Moulines E., Rydén T., *Inference in Hidden Markov Models*, Springer, New York 2005.
5. Cleveland R.B., Cleveland W.S., McRae J.E., Terpenning I., *STL: A Seasonal-Trend Decomposition Procedure Based on Loess*, „Journal of Official Statistics” 1990, vol. 6, s. 3–73.
6. Drozdowicz-Bieć M., *Cykle i wskaźniki koniunktury*, Poltext, Warszawa 2012.
7. Próchniak M., Witkowski B., *Bayesian Model Averaging in Modelling GDP Convergence with the Use of Panel Data*, „Roczniki” Kolegium Analiz Ekonomicznych SGH, z. 26, Oficyna Wydawnicza SGH, Warszawa 2012, s. 45–60.
8. Próchniak M., Witkowski B., *Time Stability of the Beta Convergence among EU Countries: Bayesian Model Averaging Perspective*, „Economic Modelling” 2013, vol. 30, s. 322–333.
9. Viterbi A., *Error bounds for convolutional codes and an asymptotically optimum decoding algorithm*, „IEEE Transactions on Information Theory” 1967, vol. 13(2), s. 260–269.

* * *

Non-classical Markov models in the analysis of business cycles in Poland

The exploration of business cycles is one of the main sources of assessment of the current and future economic situation. Non-classical Markov models are used with successes in analysis of changes of the economic climate in Poland. The object of the study was the use of multistate Markov models for analyzing the results of the questions of business tendency surveys in industry conducted by the Research Institute for Economic Development in Warsaw School of Economics. Special emphasis in the study was put on models extended by the spatial effects by considering as input of Markov chain, combinations of pairs of series of balances answers to questions of business tendency surveys. The accuracy of these models was compared with the accuracy of hidden Markov models, associated with series of balances answers to single question. Also, the verification of the usefulness of designed models for identifying turning points in the business cycle in Poland was done.

Keywords: hidden Markov models, Viterbi algorithm, business tendency surveys, business cycle turning points