

# DEKOMPOZYCJA STRUKTURALNA WZROSTU GOSPODARCZEGO Z WYKORZYSTANIEM BAYESOWSKICH MODELI GRANICZNYCH NA PRZYKŁADZIE KRAJÓW UE15<sup>1</sup>

## 1. Wstęp

Analizy produktywności z wykorzystaniem modeli granicznych zostały zapoczątkowane przez Koopmansa<sup>2</sup> i Debreu<sup>3</sup>, którzy sformułowali podstawy teoretyczne, wykorzystane później przez Farrella<sup>4</sup> w jego pionierskiej pracy na temat analizy sprawności produkcyjnej rolnictwa w Stanach Zjednoczonych. W kontekście modeli granicznych uzasadnione jest również porównywanie między sobą gospodarek całych krajów, jako jednostek wytwarzających porównywalny produkt (np. PKB), przy użyciu określonych czynników wytwórczych (np. kapitał, praca) i w oparciu o wspólną

---

<sup>1</sup> Praca współfinansowana ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach projektu INWENCJA – potencjał młodych naukowców oraz transfer wiedzy i innowacji wsparciem dla kluczowych dziedzin świętokrzyskiej gospodarki.

<sup>2</sup> T. Koopmans, *Activity Analysis of Production and Allocation*, John Wiley & Sons, New York 1951, s. 33–93.

<sup>3</sup> G. Debreu, *The Coefficient of Resource Utilization*, „Econometrica” 1951, vol. 19 (3), s. 273–292.

<sup>4</sup> M.J. Farrell, *The Measurement of Productive Efficiency*, „Journal of the Royal Statistical Society (Series A)” 1957, vol. 120, s. 253–290.

dla nich technologii<sup>5</sup>. W tak zdefiniowanym modelu wzrost produkcji może wynikać z: akumulacji czynników produkcji (*IC*), wzrostu sprawności technicznej (*EC*) oraz postępu technicznego (*TC*). Powyższa koncepcja dekompozycji, przeprowadzanej na podstawie modeli granicznych, została po raz pierwszy zaimplementowana w 1994 r. przy analizie komponentów wzrostu gospodarczego wybranych krajów<sup>6</sup>. Dekompozycje przedstawiane do tej pory w kontekście modeli granicznych opisywały łączny wpływ *IC*, a wnioskowanie na temat wpływu poszczególnych czynników odbywało się nie wprost<sup>7</sup> lub poprzez wprowadzanie dodatkowych restrykcji (np. stałych globalnych korzyści skali)<sup>8</sup>. Istotna wydaje się więc dekompozycja komponentu *IC* na jego składowe, tak aby możliwa była do rozstrzygnięcia rola, jaką pełni akumulacja kapitału i pracy we wzroście gospodarczym. Ponadto, w kontekście parametrycznych modeli granicznych ważne jest określenie optymalnej parametryzacji funkcji produkcji.

Celem niniejszej pracy jest wykorzystanie stochastycznych modeli granicznych w podejściu bayesowskim do analizy zmian, jakie zachodziły w rozwoju gospodarczym krajów strefy UE15 (tzw. starej Unii) na przestrzeni ostatniej dekady (2000–2010). Zastosowana do tego została dekompozycja strukturalna zaproponowana przez Koopa, Osiewalskiego oraz Steela<sup>9</sup>, poszerzona o dalszą dekompozycję składnika *IC* na udział akumulacji kapitału i pracy. Istotną kwestią zaprezentowaną w artykule jest również dobór odpowiedniej parametryzacji oraz rozkładu nieefektywności, nie tylko w oparciu o przesłanki merytoryczne (parametryzacja powinna dopuszczać istotną z punktu widzenia analizy dekompozycję), lecz także na podstawie informacji płynących z danych wyznaczonych w oparciu o czynnik Bayesa. Optymalny model określono więc, wykorzystując kryterium maksymalizacji brzegowej gęstości wektora obserwacji.

Dane użyte w analizie pochodzą z bazy danych AMECO, zarządzanej przez DG ECFIN Komisji Europejskiej. Dla produkcji daną tą jest PKB w mld PPS w cenach stałych<sup>10</sup> z 2000 r., dla kapitału – *net capital stock* w mld PPS w cenach stałych z roku 2000 r., dla pracy – liczba godzin przepracowana w danej gospodarce w danym roku.

<sup>5</sup> H.O. Fried, K.C. Lovell, S.S. Schmidt, *The Measurement of Productive Efficiency and Productivity Growth*, Oxford University Press, New York 2008, s. 16–19.

<sup>6</sup> R. Färe, S. Grosskopf, M. Norris, Z. Zhang, *Productivity Growth, Technical Progress, and Efficiency Change in Industrialized Countries*, „American Economic Review” 1994, vol. 84, s. 66–83.

<sup>7</sup> K. Makiela, *Economic Growth Decomposition. An Empirical Analysis Using Bayesian Frontier Approach*, „Central European Journal of Economic Modelling and Econometrics” 2009, vol. 1 (4), s. 345–348.

<sup>8</sup> O. Badunenko, D.J. Henderson, V. Zelenyuk, *Technological Change and Transition: Relative Contributions to Worldwide Growth During the 1990s*, „Oxford Bulletin of Economics and Statistics” 2008, vol. 70 (4), s. 461–492.

<sup>9</sup> G. Koop, J. Osiewalski, M.F. Steel, *The Components of Output Growth: A Stochastic Frontier Analysis*, „Oxford Bulletin of Economics and Statistics” 1999, vol. 61 (4), s. 455–487.

<sup>10</sup> P. Schreyer, F. Koechlin, *Purchasing power parities – measurement and uses*, „Statistics Brief” 2002, vol. 3, s. 2–8.

## 2. Bayesowskie modele graniczne

Niech  $Y_{it}$ ,  $K_{it}$  oraz  $L_{it}$  kolejno oznaczają wielkość produkcji, kapitału oraz pracy  $i$ -tego kraju ( $i = 1, \dots, I$ ) w  $t$ -tym roku ( $t = 1, \dots, I$ ). Dla logarytmów naturalnych tych zmiennych, oznaczonych kolejno  $y_{it}$ ,  $k_{it}$  oraz  $l_{it}$ , ogólny model przyjmuje następującą postać:

$$y_{it} = h(k_{it}, l_{it}; \beta) + v_{it} - u_{it}, \quad (1)$$

gdzie  $h(\cdot)$  jest zlogarytmowaną formą funkcji produkcji,  $v_{it}$  to niezależne zmienne o rozkładzie normalnym z zerową wartością oczekiwaną i nieznaną wariancją  $\sigma^2$ , a  $u_{it}$  określa nieefektywność tak, że sprawność techniczna równa jest  $r_{it} = \exp(-u_{it})$ , gdzie  $0 < r_{it} \leq 1$ , a  $r_{it} = 1$  oznacza pełną sprawność. W ramach możliwych parametryzacji  $h(\cdot)$  w tej pracy rozważamy następujące formy funkcyjne:

- funkcja produkcji typu Cobba–Douglasa (oznaczona dalej jako CD):

$$h(k_{it}, l_{it}; \beta) = \beta_0 + \beta_1 k_{it} + \beta_2 l_{it}, \quad (2)$$

- zdynamizowana funkcja produkcji typu Cobba–Douglasa (oznaczona CDt):

$$h(k_{it}, l_{it}; \beta) = \beta_0 + \beta_1 k_{it} + \beta_2 l_{it} + \beta_3 t, \quad (3)$$

- funkcja produkcji typu translog (oznaczona TR):

$$h(k_{it}, l_{it}; \beta) = \beta_0 + \beta_1 k_{it} + \beta_2 l_{it} + \beta_3 k_{it}^2 + \beta_4 l_{it}^2 + \beta_5 k_{it} l_{it}, \quad (4)$$

- zdynamizowana funkcja produkcji typu translog (TRt):

$$h(k_{it}, l_{it}; \beta) = \beta_0 + \beta_1 k_{it} + \beta_2 l_{it} + \beta_3 k_{it}^2 + \beta_4 l_{it}^2 + \beta_5 k_{it} l_{it} + \beta_6 t, \quad (5)$$

- funkcja produkcji typu translog z trendem liniowym w parametrach:

$$h(k_{it}, l_{it}; \beta_t) = \beta_{t0} + \beta_{t1} k_{it} + \beta_{t2} l_{it} + \beta_{t3} k_{it}^2 + \beta_{t4} l_{it}^2 + \beta_{t5} k_{it} l_{it},$$

gdzie  $\beta_{ta} = \dot{\beta}_a + t\ddot{\beta}_a$  ( $a = 0, \dots, 5$ ) oznaczana dalej jako LT; funkcję tę można również zapisać jako:

$$h(k_{it}, l_{it}; \beta) = \dot{\beta}_0 + \dot{\beta}_1 k_{it} + \dot{\beta}_2 l_{it} + \dot{\beta}_3 k_{it}^2 + \dot{\beta}_4 l_{it}^2 + \dot{\beta}_5 k_{it} l_{it} + t(\ddot{\beta}_0 + \ddot{\beta}_1 k_{it} + \ddot{\beta}_2 l_{it} + \ddot{\beta}_3 k_{it}^2 + \ddot{\beta}_4 l_{it}^2 + \ddot{\beta}_5 k_{it} l_{it}), \quad (6)$$

- funkcja produkcji typu translog z trendem kwadratowym w parametrach:

$$h(k_{it}, l_{it}; \beta_t) = \beta_{t0} + \beta_{t1} k_{it} + \beta_{t2} l_{it} + \beta_{t3} k_{it}^2 + \beta_{t4} l_{it}^2 + \beta_{t5} k_{it} l_{it},$$

gdzie  $\beta_{ta} = \dot{\beta}_a + t\ddot{\beta}_a + t^2\ddot{\beta}_a$  ( $a = 0, \dots, 5$ ) oznaczana dalej jako QT. Analogicznie jak dla LT, funkcję tę można przedstawić następująco:

$$\begin{aligned}
h(k_{it}, l_{it}; \beta) &= \dot{\beta}_0 + \dot{\beta}_1 k_{it} + \dot{\beta}_2 l_{it} + \dot{\beta}_3 k_{it}^2 + \dot{\beta}_4 l_{it}^2 + \dot{\beta}_5 k_{it} l_{it} \\
&+ t(\ddot{\beta}_0 + \ddot{\beta}_1 k_{it} + \ddot{\beta}_2 l_{it} + \ddot{\beta}_3 k_{it}^2 + \ddot{\beta}_4 l_{it}^2 + \ddot{\beta}_5 k_{it} l_{it}) \\
&+ t^2(\dddot{\beta}_0 + \dddot{\beta}_1 k_{it} + \dddot{\beta}_2 l_{it} + \dddot{\beta}_3 k_{it}^2 + \dddot{\beta}_4 l_{it}^2 + \dddot{\beta}_5 k_{it} l_{it}).
\end{aligned} \tag{7}$$

Wzory (2)–(7) można ogólnie zapisać jako  $h(k_{it}, l_{it}; \beta) = x'_{it} \beta$ , gdzie wektor  $x_{it}$  jest elementem macierzy  $X$ , który zawiera listę argumentów odpowiednią danej funkcji produkcji. W pracy tej rozważamy również dwa najczęściej spotykane w literaturze założenia odnośnie do rozkładów zmiennych nieefektywności ( $u_{it}$ ), tj. wykładnicze oraz półnormalne<sup>11</sup>. W efekcie daje nam to dwie klasy modeli – normalno-wykładniczy (z ang. *normal-exponential*, oznaczany dalej jako NEx) oraz normalno-półnormalny (z ang. *normal-half-normal*, oznaczany dalej jako NHN) – po sześć możliwych sposobów parametryzacji na klasę. Pełny bayesowski model graniczny dla modeli klasy NEx jest zdefiniowany przez następującą funkcję gęstości, określoną na przestrzeni obserwacji i wielkości nieobserwowalnych<sup>12</sup>:

$$\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^N \prod_{t=1}^T f_N(y_{it} | h(k_{it}, l_{it}, \beta) - u_{it}, \sigma^2) p(\beta) \cdot \\
&f_G(\sigma^{-2} | 0.5n_0, 0.5a_0) f_G(\lambda^{-1} | 1, -\ln(r_0)) f_G(u_{it} | 1, \lambda^{-1}),
\end{aligned} \tag{8}$$

gdzie  $f_G(\cdot | a, b)$  jest funkcją gęstości rozkładu gamma o średniej  $a/b$  i wariancji  $a/b^2$ . W badaniu założono  $n_0 = a_0 = 10^{-6}$ , ponieważ prowadzi to do bardzo rozproszonego rozkładu gamma (o średniej 1 i wariancji  $2 \cdot 10^6$ ). Parametr  $r_0$  może być interpretowany jako mediana *a priori* efektywności, ponieważ jest medianą brzegowego rozkładu dla  $r_{it}$ <sup>13</sup>. W tej pracy przyjmujemy 0,75, co oznacza jednakowe szanse *a priori*, że sprawność techniczna danego kraju jest większa bądź mniejsza niż 75%. Restrykcje na elastyczności produkcji względem parametrów wprowadzone są poprzez  $p(\beta)$ . Jeśli warunki regularności ekonomicznej są spełnione, to  $p(\beta) = 1$ , w przeciwnym wypadku  $p(\beta) = 0$ . Model ten jest zbyt skomplikowany, aby analitycznie wyznaczyć pełne brzegowe rozkłady poszukiwanych parametrów ( $\sigma$ ,  $\lambda$ ,  $\beta$ ,  $u$ ). Możliwe jest jednak wyznaczenie ich rozkładów warunkowych:

<sup>11</sup> W.H. Greene, *The Econometric Approach to Efficiency Analysis*, w: *The Measurement of Productive Efficiency and Productivity Growth*, red. H.O. Fried, C.A. Lovell, S.S. Schmidt, Oxford University Press, Oxford 2008, s. 117–120.

<sup>12</sup> G. Koop, J. Osiewalski, M.F. Steel, op.cit., s. 462–466.

<sup>13</sup> J. van den Broeck, G. Koop, J. Osiewalski, M.F. Steel, *Stochastic Frontier Models; A Bayesian Perspective*, „Journal of Econometrics” 1994, vol. 61 (2), s. 284–287.

$$\begin{aligned}
 p(\beta | y, X, u, \lambda^{-1}, \sigma^{-2}) &\propto p(\beta) f_N^J(\beta | (X'X)^{-1} X'(y+u), \sigma^2 (X'X)^{-1}) \\
 p(\sigma^{-2} | y, X, u, \lambda^{-1}, \beta) \\
 &\propto f_G(\sigma^{-2} | \frac{n_0 + NT}{2}, 0.5[a_0 + (y+u - h(X; \beta))'(y_t + u_t - h(X; \beta))]) \\
 p(u | y, X, \lambda^{-1}, \sigma^{-2}, \beta) & \tag{9} \\
 &\propto f_N^{NT}(u | h(X, \beta) - y - \sigma^2 \lambda^{-1}, \sigma^2 \cdot I_{NT}) I(u \in R_+^{NT}) \\
 p(\lambda^{-1} | y, X, u, \sigma^{-2}, \beta) &\propto f_G(\lambda^{-1} | NT + 1, \sum_{n=1}^N \sum_{t=1}^T u_{it} - \ln(r_0)) ,
 \end{aligned}$$

gdzie  $J$  równe jest liczbie parametrów w  $\beta$ . Na ich podstawie, używając schematu Gibbsa<sup>14</sup>, możemy aproksymować interesujące nas rozkłady. Z kolei pełny bayesowski model graniczny klasy NHN rozważany w tej pracy zdefiniowano przez następującą funkcję gęstości<sup>15</sup>:

$$\begin{aligned}
 &\prod_{i=1}^N \prod_{t=1}^T f_N(y_{it} | h(k_{it}, l_{it}, \beta) - u_{it}, \sigma^2) p(\beta) \cdot \\
 &f_G(\sigma^{-2} | 0.5n_0, 0.5a_0) f_G(\omega^{-2} | 5, 10 \ln^2(r_0)) f_N(u_{it} | 0, \omega^2),
 \end{aligned} \tag{10}$$

gdzie  $n_0 = a_0 = 10^{-6}$  oraz  $r_0 = 0,75$ . Tak jak w przypadku modeli klasy NEx, pełne brzegowe rozkłady muszą być aproksymowane numerycznie, np. z wykorzystaniem schematu Gibbsa, w oparciu o znane warunkowe rozkłady brzegowe. Dla parametrów  $\beta$  oraz  $\sigma^2$  rozkłady warunkowe pozostają bez zmian w odniesieniu do modeli klasy NEx. Rozkłady warunkowe pozostałych zmiennych tych modeli przyjmują postać:

$$\begin{aligned}
 p(\omega^{-2} | y, X, u, \sigma^{-2}, \beta) &\propto f_G(\omega^{-2} | 0.5NT + 5, 0.5 \cdot \sum_{n=1}^N \sum_{t=1}^T u_{it} + 10 \ln^2(r_0)) \\
 p(u | y, X, \omega^{-2}, \sigma^{-2}, \beta) &\propto f_N^{NT}(u | \frac{\omega(h(X; \beta) - y)}{\omega^2 + \sigma^2}, \frac{\omega^2 \sigma^2}{\omega^2 + \sigma^2}) I(u \in R_+^{NT}).
 \end{aligned} \tag{11}$$

Na podstawie wyżej wymienionych założeń wyznaczono łącznie 12 modeli. Do obliczeń wykorzystano schemat Gibbsa, zaimplementowany w środowisku MATLAB, wykonując 550 tys. cykli, z których pierwsze 150 tys. pominięto (cykle spalone). Tak duża liczba losowań nie jest z reguły wymagana, w szczególności jeśli wnioskowanie odbywa się w oparciu o podstawowe statystyki, jak średnie czy odchylenia

<sup>14</sup> G. Koop, M.F. Steel, J. Osiewalski, *Posterior Analysis of Stochastic Frontier Models Using Gibbs Sampling*, „Computational Statistics” 1995, vol. 10, s. 353–373.

<sup>15</sup> J. van den Broeck, G. Koop, J. Osiewalski, M.F. Steel, op.cit., s. 280–282.

standardowe *a posteriori*<sup>16</sup>. Było to jednak konieczne do możliwie precyzyjnego oszacowania brzegowych gęstości wektora obserwacji, które posłużyły potem do wyznaczenia najlepszego modelu. Zbieżność łańcucha do poszukiwanego rozkładu stacjonarnego była monitorowana z wykorzystaniem przebiegów *cusum*<sup>17</sup>.

### 3. Dekompozycja strukturalna

Zastosowanie danych panelowych w zaprezentowanych wyżej modelach pozwala na dekompozycję strukturalną zmian w poziomie produkcji pomiędzy okresami. Załóżmy, że różnicę w logarytmie naturalnym PKB między okresem  $t$  i  $t + 1$  można zapisać jako<sup>18</sup>:

$$\Delta y = (x'_{i,t+1} \beta_{t+1} - x'_{it} \beta_t) + (u_{it} - u_{i,t+1}), \quad (12)$$

gdzie pierwsze wyrażenie związane jest z postępem (lub regresem) technicznym oraz zmianami w nakładach czynników, natomiast drugie odzwierciedla zmiany w sprawności technicznej. Pierwszą część równania (12) można dalej rozpaść jako:

$$(x'_{i,t+1} \beta_{t+1} - x'_{it} \beta_t) = 0.5(x_{i,t+1} + x_{it})'(\beta_{t+1} - \beta_t) + 0.5(\beta_{t+1} + \beta_t)'(x_{i,t+1} - x_{it}), \quad (13)$$

gdzie pierwsze wyrażenie odzwierciedla postęp (lub regres) techniczny, drugie natomiast opisuje zmiany wynikające z różnic w poziomach czynników wytwórczych pomiędzy okresami. Elementy równań (12) oraz (13) pozwalają nam zdefiniować dwa pierwsze komponenty wzrostu gospodarczego:

$$TC_{i,t+1} = \exp[0.5(x_{i,t+1} + x_{it})'(\beta_{t+1} - \beta_t)], \quad (14)$$

$$EC_{i,t+1} = \exp(u_{it} - u_{i,t+1}), \quad (15)$$

których łączny wpływ dany jako:

$$PC_{i,t+1} = EC_{i,t+1} \times TC_{i,t+1}, \quad (16)$$

wyznacza indeks produktywności Malmquista<sup>19</sup>. W dalszej dekompozycji skupiamy się na drugim komponencie z równania (13):

$$IC_{i,t+1} = \exp[0.5(\beta_{t+1} + \beta_t)'(x_{i,t+1} - x_{it})], \quad (17)$$

<sup>16</sup> W.H. Greene, op.cit., s. 120–124.

<sup>17</sup> B. Yu, P. Mykland, *Looking at Markov samplers through cusum path plots: a simple diagnostic idea*, „Statistics and Computing” 1998, vol. 8, s. 275–286.

<sup>18</sup> G. Koop, J. Osiewalski, M.F. Steel, op.cit., s. 459–461.

<sup>19</sup> D.W. Caves, L.R. Christensen, W.E. Diewert, *Multilateral Comparisons of Output, Input, and Productivity Using Superlative Index Numbers*, „The Economic Journal (Royal Economic Society)” 1982, vol. 92, s. 73–86.

który należy zapisać w taki sposób, aby można było określić osobny wpływ akumulacji kapitału i pracy na wzrost gospodarczy. Po odpowiednim rozpisaniu i pogrupowaniu wyrażeń z równania (17) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} IC_{i,t+1} &= \exp[\Delta k_{i,t+1} \cdot El.k(0.5(x_{i,t+1} + x_{it}))] \times \\ \exp[\Delta l_{i,t+1} \cdot El.l(0.5(x_{i,t+1} + x_{it}))] &= IC.k_{i,t+1} \times IC.l_{i,t+1}, \end{aligned} \quad (18)$$

gdzie  $El.k(0,5(x_{i,t+1}+x_{it}))$  i  $El.l(0,5(x_{i,t+1}+x_{it}))$  to elastyczności kapitału i pracy „w połowie” pomiędzy okresem  $t$  i  $t + 1$ . Pierwsza część równania (18) wyraża wyłączny wpływ zmiany kapitału ( $IC.k_{i,t+1}$ ), a druga pracy ( $IC.l_{i,t+1}$ ) na poziom produkcji.

Podsumowując, zmiana w poziomie PKB między okresem  $t$  i  $t + 1$  w  $i$ -tym kraju (OC) równa jest:

$$OC_{i,t+1} = ICk_{i,t+1} \times ICl_{i,t+1} \times TC_{i,t+1} \times EC_{i,t+1}, \quad (19)$$

gdzie komponenty po prawej stronie równania (19) opisują kolejno wpływ akumulacji kapitału, przyrostu pracy, postępu technicznego oraz przyrostu sprawności technicznej (sprawności gospodarowania) na wzrost gospodarczy danego kraju. Aby uprościć interpretacje wyników, wskaźniki zdefiniowane równaniami (14)–(19) zostały wyrażone jako procentowe zmiany w stosunku do okresu poprzedniego:  $\Delta\% = 100\%(\delta - 1)$ , gdzie  $\delta$  to wyjściowa wartość wskaźnika.

Należy podkreślić, że wybór parametryzacji modelu ma wpływ na stopień i szczegółowość dekompozycji. Model CD nie dopuszcza obecności postępu technicznego (przesunięć granicy), a ponieważ elastyczności są stałe, zmiany w komponencie  $IC$  wynikają wyłącznie ze zmian w poziomach nakładów. Model CDt dopuszcza postęp techniczny, lecz jest on stały dla wszystkich krajów oraz w czasie, co wydaje się mało realnym założeniem. Model TR dopuszcza postęp techniczny poprzez zmieniające się w czasie elastyczności kapitału i pracy. Nie jest możliwa jednak dokładna analiza jego wpływu, ponieważ jest on zawarty w komponencie  $IC$ . Wprowadzenie indeksu czasowego w modelu TRt rozwiązuje ten problem tylko w teorii. W praktyce pojawia się ten sam efekt co w modelu CD – mało realne założenie stałego postępu technicznego. Pełna dekompozycja na składowe możliwa jest dopiero w modelu LT. Wprowadzenie trendu liniowego do każdego z parametrów funkcji produkcji rozluźnia założenia o wpływie technologii na poszczególne kraje. Choć nadal zakłada się, że postęp (bądź regres) techniczny ma charakter liniowy, ma on różny wpływ na wzrost gospodarczy poszczególnych gospodarek. Model QT rozluźnia również to założenie, wprowadzając trend kwadratowy. W ten sposób możliwe jest uchwycenie nie tylko kierunku, lecz także dynamiki zmian postępu technicznego w UE z podziałem na poszczególne gospodarki.

## 4. Wybór optymalnego modelu

Jednym z podstawowych zagadnień we wnioskowaniu bayesowskim jest wyznaczenie brzegowej gęstości wektora obserwacji:

$$p(y | M_k) = \int p(\Theta_k | M_k) p(y | \Theta_k, M_k) d\Theta_k, \quad (20)$$

gdzie  $\Theta$  oznacza zbiór parametrów  $k$ -tego modelu  $M = \{M_1, \dots, M_k, \dots\}$ . Znając brzegowe gęstości wektora obserwacji dla poszczególnych modeli i przyjmując, że *a priori* są one wszystkie równo prawdopodobne, w prosty sposób jesteśmy w stanie obliczyć czynnik Bayesa jako

$$B_{ij} = \frac{p(y | M_i)}{p(y | M_j)}. \quad (21)$$

Iloraz ten informuje o tym, który spośród dwóch porównywanych między sobą modeli –  $M_i$  i  $M_j$  – jest bardziej prawdopodobny. Jeśli  $B_{ij} > 1$ , oznacza to, że model  $i$  jest bardziej prawdopodobny niż model  $j$ . Ponieważ do estymacji modeli wykorzystany został schemat Gibbsa, będący algorytmem klasy MCMC, naturalnym narzędziem do estymacji brzegowej gęstości wektora obserwacji jest średnia harmoniczna dana wzorem<sup>20</sup>:

$$p(y | M_k)^{-1} = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R p(\Theta^{(r)}_k | M_k)^{-1}, \quad (22)$$

gdzie  $\Theta^{(r)}_k$  to kolejne realizacje z łańcucha Markowa, a  $y$  oznacza wektor obserwacji. W drugiej kolumnie tabeli 1 przedstawiono logarytmy dziesiętne brzegowych gęstości wektora obserwacji dla poszczególnych modeli.

Na tej podstawie wytypowano model QT klasy NHN jako model o najwyższej gęstości, a więc o najwyższej mocy objaśniającej. Logarytm dziesiętny czynnika Bayesa dla tego modelu wynosi 6,55 przy porównaniu z drugim w kolejności modelem (LT klasy NHN) oraz aż 71,63 przy porównaniu z najlepszym z modeli wykorzystujących funkcję produkcji Cobba–Douglasa. Przedstawione główne wyniki badań oparte zostały więc na modelu QT klasy NHN.

<sup>20</sup> M. Newton, A. Raftery, *Approximate Bayesian inference with the weighted likelihood bootstrap*, „Journal of the Royal Statistical Society (Series B)” 1994, vol. 56, s. 3–48.



Tabela 1. Podstawowe wyniki estymacji

NHN	$\log_{10}$ $p(V M)$	Elast. kapitału		Elast. pracy		Efekt skali		$\sigma$		$\omega$	
		E(.)	D(.)	E(.)	D(.)	E(.)	D(.)	E(.)	D(.)	E(.)	D(.)
QT	146,61	~0,7035		~-0,2581		~-0,9616		0,0040	0,0034	0,0411	0,0046
LT	140,06	~0,6846		~-0,2784		~-0,9630		0,0035	0,0029	0,0412	0,0045
TRt	128,75	~0,6959		~-0,2687		~-0,9646		0,0041	0,0032	0,0411	0,0045
TR	130,09	~0,7053		~-0,2614		~-0,9667		0,0055	0,0039	0,0411	0,0045
CDt	74,04	0,7869	0,0336	0,1390	0,0323	0,9259	0,0057	0,0583	0,0085	0,0453	0,0064
CD	74,98	0,7794	0,0331	0,1456	0,0320	0,9251	0,0057	0,0589	0,0082	0,0451	0,0063
<b>NEx</b>											
										$\lambda$	
QT	81,63	~0,6583		~-0,3017		~-0,9600		0,0060	0,0044	0,1370	0,0113
LT	76,26	~0,6489		~-0,3126		~-0,9614		0,0091	0,0117	0,1368	0,0153
TRt	73,89	~0,6943		~-0,2636		~-0,9579		0,0334	0,0229	0,1158	0,0251
TR	70,59	~0,7107		~-0,2459		~-0,9567		0,0424	0,0188	0,1072	0,0218
CDt	56,22	0,7911	0,0277	0,1351	0,0264	0,9262	0,0056	0,0746	0,0099	0,1061	0,0149
CD	58,24	0,7847	0,0270	0,1410	0,0258	0,9257	0,0057	0,0743	0,0099	0,1064	0,0148

E(.) to średnia *a posteriori*; D(.) to odchylenie standardowe *a posteriori*; ~ oznacza średnią po obserwacjach  
 Źródło: opracowanie własne.

## 5. Wyniki badań

W kontekście analizy produktywności należy zauważyć, iż miniona dekada nie była pomyślna dla rozwoju strefy UE15. Zaledwie sześć krajów zanotowało średni przyrost produktywności każdego roku (patrz tabela 2). Głównym bodźcem wzrostu gospodarczego był przyrost czynników wytwórczych, w tym przede wszystkim akumulacja kapitału. Dla porównania – kraje strefy UE12 (tzw. nowej dwunastki; w badaniu użyto danych zagregowanych) notowały na ogół gorsze wyniki w kontekście zmian produktywności. Jednak wpływ akumulacji kapitału na wzrost gospodarczy był bardzo silny w UE12 i wyniósł średnio 4,77% (odchylenie standardowe *a posteriori*: 1,02%) rocznie. Ponadto, strefa UE12 miała dużo wyższy współczynnik efektu skali produkcji – 1,08 (0,02). W efekcie rozwijała się ona średnio ponad dwa razy szybciej niż kraje „starej piętnastki”.

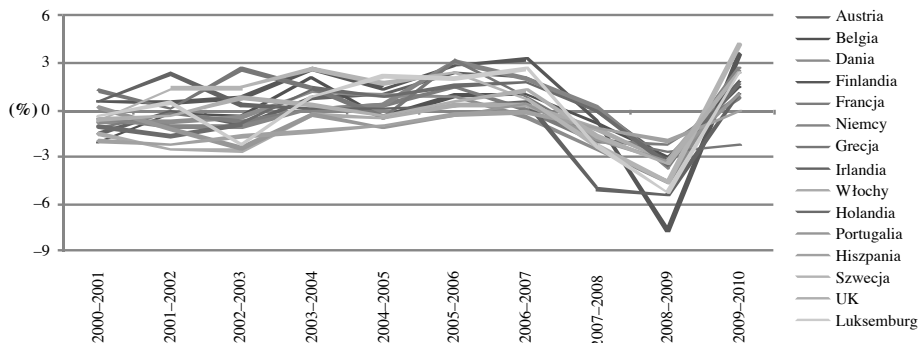
Akumulacja kapitału w UE15 miała największy wpływ na gospodarki Irlandii oraz Luksemburga, gdzie wzrosła ona odpowiednio o 3,04% (0,36%) oraz o 3,49% (0,86%). Z kolei komponent wzrostu produktywności odegrał największą rolę we wzroście gospodarczym Szwecji i Finlandii, gdzie wyniósł on odpowiednio – 0,78% (0,13%) oraz 0,63% (0,14%). Dalsza dekompozycja produktywności pokazuje, iż w obu przypadkach głównym czynnikiem wzrostu był komponent zmian sprawności technicznej. Komponent postępu technicznego był najwyższy dla Hiszpanii 0,19% (0,27%) i Holandii 0,18% (0,26%), choć wysokie odchylenia standardowe *a posteriori* wskazują, iż należy być ostrożnym przy wyciąganiu daleko idących wniosków.

W latach 2008–2009 wszystkie gospodarki strefy UE15 zanotowały istotny spadek wydajności technicznej (rysunek 1). Jako jedna z pierwszych, na przełomie lat 2007–2008, zareagowała Irlandia, notując spadek w tej dziedzinie aż o 4,99% (0,91%) względem roku poprzedniego. Kryzys w tym kraju miał dość długotrwały wpływ na sprawność techniczną gospodarki. W kolejnym roku Irlandia zanotowała spadek o 5,4% (1,3%), co było drugim największym spadkiem wśród krajów UE15 w tym okresie. Większy, choć jednorazowy, spadek zanotowała jedynie Finlandia i wyniósł on 7,69% (1,01%). Warto podkreślić, że wszystkie gospodarki UE15, z wyjątkiem Grecji, zaczęły odrabiać straty już w 2010 r.

**Tabela 2. Wyniki dekompozycji**

Kraj	Śr. IC	Śr. IC <sub>k</sub>	Śr. IC <sub>I</sub>	Śr. PC	Śr. EC	Śr. TC	Śr. OC	ΔPKB
Austria	1,26	1,24	0,02	0,28	0,17	0,11	1,55	1,54
	<i>0,16</i>	<i>0,17</i>	<i>0,01</i>	<i>0,18</i>	<i>0,31</i>	<i>0,27</i>	<i>0,07</i>	
Belgia	1,43	1,17	0,26	-0,04	-0,15	0,12	1,39	1,37
	<i>0,08</i>	<i>0,15</i>	<i>0,08</i>	<i>0,11</i>	<i>0,26</i>	<i>0,26</i>	<i>0,07</i>	
Dania	1,14	1,14	0,01	-0,48	-0,46	-0,03	0,65	0,64
	<i>0,14</i>	<i>0,14</i>	<i>0,00</i>	<i>0,15</i>	<i>0,35</i>	<i>0,40</i>	<i>0,07</i>	
Finlandia	1,22	1,18	0,04	0,63	0,65	-0,02	1,86	1,85
	<i>0,12</i>	<i>0,14</i>	<i>0,02</i>	<i>0,14</i>	<i>0,32</i>	<i>0,36</i>	<i>0,07</i>	
Francja	1,43	1,37	0,06	-0,29	-0,37	0,09	1,13	1,13
	<i>0,35</i>	<i>0,37</i>	<i>0,02</i>	<i>0,35</i>	<i>0,82</i>	<i>0,79</i>	<i>0,07</i>	
Niemcy	0,70	0,76	-0,06	0,23	0,16	0,07	0,93	0,93
	<i>0,21</i>	<i>0,19</i>	<i>0,02</i>	<i>0,22</i>	<i>0,71</i>	<i>0,71</i>	<i>0,07</i>	
Grecja	1,80	1,67	0,13	0,32	0,18	0,15	2,13	2,11
	<i>0,10</i>	<i>0,14</i>	<i>0,03</i>	<i>0,13</i>	<i>0,31</i>	<i>0,32</i>	<i>0,08</i>	
Irlandia	3,08	3,04	0,03	-0,67	-0,59	-0,08	2,39	2,36
	<i>0,34</i>	<i>0,36</i>	<i>0,01</i>	<i>0,34</i>	<i>0,33</i>	<i>0,30</i>	<i>0,08</i>	
Włochy	1,20	1,10	0,09	-0,79	-0,96	0,16	0,39	0,39
	<i>0,16</i>	<i>0,19</i>	<i>0,03</i>	<i>0,18</i>	<i>0,32</i>	<i>0,35</i>	<i>0,07</i>	
Luksemburg	3,75	3,49	0,25	-0,99	-0,06	-0,91	2,72	2,69
	<i>0,51</i>	<i>0,86</i>	<i>0,36</i>	<i>0,49</i>	<i>1,04</i>	<i>1,07</i>	<i>0,08</i>	
Holandia	1,23	1,16	0,08	0,14	-0,05	0,18	1,37	1,36
	<i>0,14</i>	<i>0,16</i>	<i>0,02</i>	<i>0,16</i>	<i>0,27</i>	<i>0,26</i>	<i>0,07</i>	
Portugalia	1,89	1,91	-0,02	-1,20	-0,95	-0,25	0,67	0,66
	<i>0,41</i>	<i>0,37</i>	<i>0,03</i>	<i>0,40</i>	<i>0,92</i>	<i>1,05</i>	<i>0,07</i>	
Hiszpania	3,12	2,80	0,32	-1,02	-1,21	0,19	2,07	2,05
	<i>0,30</i>	<i>0,38</i>	<i>0,08</i>	<i>0,29</i>	<i>0,29</i>	<i>0,27</i>	<i>0,08</i>	
Szwecja	1,26	1,15	0,11	0,78	0,64	0,13	2,05	2,03
	<i>0,11</i>	<i>0,14</i>	<i>0,03</i>	<i>0,13</i>	<i>0,27</i>	<i>0,25</i>	<i>0,08</i>	
UK	1,67	1,64	0,03	-0,02	-0,17	0,15	1,65	1,63
	<i>0,20</i>	<i>0,21</i>	<i>0,01</i>	<i>0,21</i>	<i>0,29</i>	<i>0,31</i>	<i>0,07</i>	
UE12	4,75	4,77	-0,02	-1,05	-0,33	-0,70	3,64	3,57
	<i>1,05</i>	<i>1,02</i>	<i>0,03</i>	<i>1,00</i>	<i>1,61</i>	<i>1,81</i>	<i>0,08</i>	

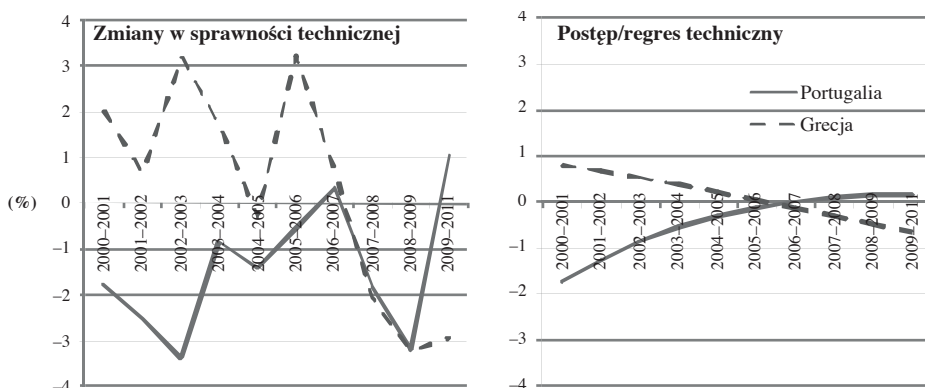
Śr. – oznacza średnią zmianę *a posteriori* w badanym okresie; kursywą jest zapisane odchylenie standardowe *a posteriori*  
 Źródło: opracowanie własne.



**Rysunek 1. Zmiany w sprawności technicznej w badanym okresie (w %)**

Źródło: opracowanie własne.

W kontekście struktury rozwoju gospodarczego ostatniej dekady najgorsze wyniki miały bezsprzecznie gospodarki Grecji i Portugalii. Grecja okazała się najmniej wydajną gospodarką spośród badanych krajów UE15 i w 2010 r. wciąż traciła na sprawności technicznej, podczas gdy większość gospodarek odrabiała już straty. Portugalia była drugą najmniej wydajną gospodarką, jednocześnie notując spadek produktywności średnio o 1,2% (0,4%) rocznie. Wyniki z całego okresu analizy wskazują jednoznacznie, że gdyby nie silny wpływ akumulacji kapitału w Portugalii od dawna byłaby recesja. Należy również zwrócić uwagę na odmienną dynamikę wpływu postępu technicznego oraz sprawności technicznej w tych dwóch krajach (rysunek 2). Choć Portugalia na początku badanego okresu miała wyniki wyraźnie gorsze od Grecji, kierunek zmian w tych gospodarkach był odmienny.



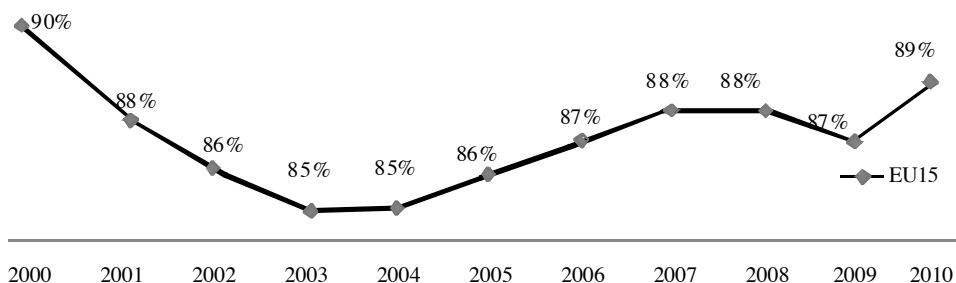
**Rysunek 2. Zmiany produktywności w Portugalii i Grecji w latach 2000-2010**

Źródło: opracowanie własne.

## 6. Podsumowanie i wnioski

Bez względu na zastosowany w estymacji model, akumulacja kapitału stanowiła główny bodziec wzrostu gospodarczego w strefie UE15, kilkakrotnie przewyższając swoim znaczeniem drugi co do ważności komponent – przyrost sprawności technicznej. Przyrost pracy okazał się dopiero trzecim pod względem istotności czynnikiem wpływającym na wzrost gospodarczy, a wpływ postępu technicznego był marginalny.

Poszczególne komponenty *TC* oraz *EC*, odzwierciedlające wpływ postępu technicznego oraz zmiany w sprawności technicznej, okazały się na ogół trudne do precyzyjnego oszacowania (dość wysokie odchylenia standardowe *a posteriori* w stosunku do średnich). Powodem tego stanu rzeczy z jednej strony jest struktura samej dekompozycji. Zgodnie z konstrukcją modelu nieefektywność *i*-tego kraju w *t*-tym okresie estymowana jest jako zmienna ukryta. Choć możemy w miarę dokładnie określić jej poziom, oszacowania pierwszych przyrostów mogą być już dość mało precyzyjne. Z drugiej strony wpływ na precyzję oszacowań miał z pewnością również okres, jaki poddano analizie. Światowy kryzys finansowy w różnym stopniu zniweczył w latach 2008–2009 dorobek ekonomiczny wypracowany przez kraje UE15 do 2007 r. Trudno więc mówić o prostych jednokierunkowych zmianach zachodzących w tej strefie i nie powinien dziwić też fakt, że czynnik Bayesa wskazał model najbardziej złożony parametrycznie.



**Rysunek 3. Poziom sprawności technicznej strefy UE15 w latach 2000–2010**

Źródło: opracowanie własne.

Na zakończenie należy podkreślić, że zastosowanie bayesowskich modeli granicznych pozwoliło na dobór najlepszego modelu nie tylko w oparciu o przesłanki teoretyczne omówione pod koniec sekcji 2.2, ale również na podstawie informacji zawartych w danych. Czynnik Bayesa w szczególności: pomógł zdecydowanie odrzucić funkcję produkcji typu Cobba–Douglasa; określił modele klasy NHN jako lepiej opisujące analizowane dane niż modele klasy NEx; wskazał na najbardziej złożone parametrycznie modele, czego powodem może być kryzys, jaki miał (i ma nadal)

miejsce. Ponadto, zastosowanie wnioskowania bayesowskiego pozwoliło określić dokładność oszacowanych zmian w sprawności technicznej poszczególnych gospodarek. Jest to tym bardziej istotne, że – jak pokazuje niniejszy przykład – zmiany te często podlegają dużym wahaniom.

## Bibliografia

1. Badunenko O., Henderson D.J., Zelenyuk V., *Techological Change and Transition: Relative Contributions to Worldwide Growth During the 1990s*, „Oxford Bulletin of Economics and Statistics” 2008, vol. 70 (4), s. 461–492.
2. Broeck J. van den, Koop G., Osiewalski J., Steel M.F., *Stochastic Frontier Models; A Bayesian Perspective*, „Journal of Econometrics” 1994, vol. 61 (2), s. 273–303.
3. Caves D.W., Christensen L.R., Diewert W.E., *Multilateral Comparisons of Output, Input, and Productivity Using Superlative Index Numbers*, „The Economic Journal (Royal Economic Society)” 1982, vol. 92, s. 73–86.
4. Debreu G., *The Coefficient of Resource Utilization*, „Econometrica” 1951, vol. 19 (3), s. 273–292.
5. Färe R., Grosskopf S., Norris M., Zhang Z., *Productivity Growth, Technical Progress, and Efficiency Change in Industrialized Countries*, „American Economic Review” 1994, vol. 84, s. 66–83.
6. Farrell M.J., *The Measurement of Productive Efficiency*, „Journal of the Royal Statistical Society (Series A)” 1957, vol. 120, s. 253–290.
7. Fried H.O., Lovell K.C., Schmidt S.S., *The Measurement of Productive Efficiency and Productivity Growth*, Oxford University Press, New York 2008.
8. Greene W.H., *The Econometric Approach to Efficiency Analysis*, w: *The Measurement of Productive Efficiency and Productivity Growth*, red. H.O. Fried, C.A. Lovell, S.S. Schmidt, Oxford University Press, Oxford 2008, s. 92–159.
9. Koop G., Osiewalski J., Steel M.F., *The Components of Output Growth: A Stochastic Frontier Analysis*, „Oxford Bulletin of Economics and Statistics” 1999, vol. 61 (4), s. 455–487.
10. Koop G., Steel M.F., Osiewalski J., *Posterior Analysis of Stochastic Frontier Models Using Gibbs Sampling*, „Computational Statistics” 1995, vol. 10, s. 353–373.
11. Koopmans T., *Activity Analysis of Production and Allocation*, John Wiley & Sons, New York 1951.
12. Makieła K., *Economic Growth Decomposition. An Empirical Analysis Using Bayesian Frontier Approach*, „Central European Journal of Economic Modelling and Econometrics” 2009, vol. 1 (4), s. 333–369.

13. Newton M., Raftery A., *Approximate Bayesian inference with the weighted likelihood bootstrap*, „Journal of the Royal Statistical Society (Series B)” 1994, vol. 56, s. 3–48.
14. Schreyer P., Koechlin F., *Purchasing power parities – measurement and uses*, „Statistics Brief” 2002, vol. 3, s. 1–8.
15. Yu B., Mykland P., *Looking at Markov samplers through cusum path plots: a simple diagnostic idea*, „Statistics and Computing” 1998, vol. 8, s. 275–286.

## Summary

### Structural decomposition of economic growth in the EU15 using Bayesian Stochastic Frontier analysis

This paper investigates changes in productivity among the EU15 countries over the last decade. Bayesian Stochastic Frontier models along with structural decomposition of output growth are used to derive the components of output growth. In doing so we explore what impact capital accumulation, labour change, technical progress and technical efficiency change have had on economic growth in those countries. Moreover, estimates of the growth components are conditioned upon model parametrization and the underlying assumptions. Thus, we consider a number of competing specifications and propose Bayes factor as a criterion to choose the best model given the data.

**Keywords:** stochastic frontier models, panel data, Bayesian inference, productivity analysis, components of output growth

**JEL classification:** C11, C23, O47, O52